

損保数理（問題）

特に断りがないかぎり、消費税については考慮しないこととする。また、免責金額および支払限度額は 1 事故あたりのものであり、各クレームは独立であるものとする。

問題 1. 次の (1) ～ (5) について、各問の指示に従い解答しなさい。

(1), (2) : 各 5 点 (3) ～ (5) : 各 4 点 (計 22 点)

(1) 次の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

危険指標を建物の構造（構造 A・構造 B）と所在する地域（地域 C・地域 D）の 2 区分で設定している火災保険があり、その実績クレーム単価のデータが下表のとおりであったとする。

＜クレーム単価＞

	地域 C	地域 D
構造 A	800	650
構造 B	400	350

建物の構造・地域のクレーム単価 $Y_i (i=1, 2, 3, 4)$ を一般化線形モデル、すなわち、 Y_i の従う指数型

分布族をポアソン分布 $f(y_i; \mu_i) = \frac{\mu_i^{y_i}}{y_i!} e^{-\mu_i}$ （ここで、 $\mu_i = E(Y_i)$ である）、リンク関数を

$g(x) = \log(x)$ とし、次の通り定義される説明変数 $x_{ij} (i=1, 2, 3, 4, j=1, 2, 3)$ を用いて、

$\mu_i = g^{-1}(\beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3})$ と表されるモデルを用いて分析する。

$$x_{i1} = \begin{cases} 1(\text{構造 A の場合}) \\ 0(\text{構造 B の場合}) \end{cases}, x_{i2} = \begin{cases} 1(\text{構造 B の場合}) \\ 0(\text{構造 A の場合}) \end{cases}, x_{i3} = \begin{cases} 1(\text{地域 C の場合}) \\ 0(\text{地域 D の場合}) \end{cases}$$

ここで、 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ はパラメータであり、最尤法で推定する。このとき、一般化線形モデルで計算した場合の、「構造 A かつ地域 C」のクレーム単価の期待値を「構造 A かつ地域 D」のクレーム単価の期待値で除した値に最も近いものは、① である。

【①の選択肢】

- | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| (A) 1.100 | (B) 1.125 | (C) 1.150 | (D) 1.175 | (E) 1.200 |
| (F) 1.225 | (G) 1.250 | (H) 1.275 | (I) 1.300 | (J) 1.325 |

(2) 次の (ア)、(イ) の各問に答えなさい。

(ア) 次の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

事故年度から 3 年後の年度までに保険金支払が完了する保険商品について、次の実績データに基づくボーンヒュッターファーガソン法による 2019～2022 年度の支払備金（普通支払備金 + I B N R 備金）合計に最も近い数値は ② である。

ただし、累計発生保険金のロスディベロップメントファクターの予測値には、既知の対応する事故年度別ロスディベロップメントファクターを単純平均した値を用いることとする。また、最終累計発生保険金の当初予測値は、事故年度別既経過保険料に予定損害率（各年度とも 70% とする。）を乗じた値を使用することとする。さらに、インフレ率は考慮しないものとする。

なお、計算の途中において、保険金・支払備金については全て小数点以下第 1 位を四捨五入して整数値を用い、ロスディベロップメントファクター・進展率（ある年度に発生した事故の最新の累計支払保険金に対する最終累計発生保険金の比率）については小数点以下第 4 位を四捨五入して小数点以下第 3 位までの数値を用いることとする。

＜事故年度別 既経過保険料と経過年度別累計発生保険金の推移＞

事故年度	既経過 保険料	経過年度			
		1	2	3	4
2019	63,600	34,000	38,400	40,200	41,700
2020	64,300	36,600	40,400	42,100	
2021	66,400	39,900	43,500		
2022	69,300	43,100			

【②の選択肢】

- (A) 12,300 (B) 12,800 (C) 13,300 (D) 13,800 (E) 14,300
(F) 14,800 (G) 15,300 (H) 15,800 (I) 16,300 (J) 16,800

(イ) 支払備金の見積手法に関する次の (A) ～ (C) の記述のうち、内容が正しいものをすべて選び『③』に解答しなさい。なお、いずれも正しくない場合、(D) を選択しなさい。

【③の選択肢】

- (A) 個別見積法とは、既発生損害に係る個々の支払額を積算する方法であり、既発生未報告損害の見積もりに用いられる。
- (B) 算式見積法とは、一定の算出式を用いて算出する方法であり、既報告未払損害の見積もりに用いられる。
- (C) 予定損害率または予測損害率による見積法とは、実績が全くない新しい保険などの総発生保険金を見積もる際に用いる方法である。

(3) 将来の保険金 X が平均 3、分散 2 の正規分布に従うものとするとき、以下の A～D の保険料算出原理によって将来の保険金に対応する保険料（予定事業費等の付加保険料は考慮しない）を算出することを考える。このとき、次の（ア）、（イ）の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

A 期待値原理 ($P(X) = (1+h)\mu_X$) で $h = 0.1$

B 指数原理 ($P(X) = \frac{\log M_X(h)}{h}$) で $h = 0.1$

C ワンの保険料算出原理 ($P(X) = \int x \cdot e^{h\Phi^{-1}(F_X(x)) - \frac{h^2}{2}} \cdot f_X(x) dx$) で $h = 0.1$

D エッシャー原理 ($P(X) = \frac{E(Xe^{hX})}{E(e^{hX})}$) で $h = 0.1$

ただし、 μ_X 、 $M_X(h)$ 、 $F_X(x)$ 、 $f_X(x)$ はそれぞれ X の期待値、積率母関数、分布関数、確率密度関数を表し、 Φ^{-1} は標準正規分布の分布関数の逆関数を表す。

(ア) A～D で算出した保険料のうち、最大のものは ④、最小のものは ⑤ である。

(イ) 保険金 X が一律で 2 倍になったとき、A～D で算出した保険料のうち、最大のものは ⑥、最小のものは ⑦ である。

【④～⑦の選択肢】（④～⑦で共通。同じ選択肢を複数回用いてもよい。）

(A) A (B) B (C) C (D) D

(4) 次の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

次の条件が与えられている保険契約（保険期間 1 年間）がある。

<条件>

- ・ 支払限度額は 2,000,000 で、免責金額の適用はない。
- ・ 年間クレーム件数 N は、ポアソン分布にしたがう。
- ・ 損害額 L 、支払保険金額 X の分布について、次のことが分かっている。

$$P(X > 1,000,000) = 0.0125$$

$$E[\min(L, 1,000,000)] = 65,000$$

$$E[\min(L, 2,000,000)] = 75,000$$

- ・ 年間支払保険金総額 S の平均は 3,000,000 である。
- ・ 各損害額とクレーム件数は、互いに独立である。

この保険契約について、1 年間で損害額 L が 1,000,000 を超えるクレームが 1 件も発生しない確率に最も近いものは である。なお、必要があれば、 $e = 2.7183$ として計算すること。

※本問において、「損害額」、「支払保険金額」は次を表わすものとする。

損害額 : 支払限度額を考慮する前の、事故の損害の額

支払保険金額 : 支払限度額を考慮し、保険会社が支払う保険金の額

【⑧の選択肢】

- | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| (A) 2% | (B) 5% | (C) 7% | (D) 10% | (E) 13% |
| (F) 20% | (G) 30% | (H) 37% | (I) 48% | (J) 60% |

(5) 次の (ア)、(イ) の各問に答えなさい。

(ア) 次の (A) ~ (C) の記述のうち、内容が正しくないものをすべて選び『⑨』に解答しなさい。
なお、いずれも正しい場合、(D) を選択しなさい。

【⑨の選択肢】

(A) コヒーレント・リスク尺度が満たす 4 つの公理は、それぞれ「平行移動不変性」「単調性」「劣加法性」「正の同次性」である。特に劣加法性とは、ある正のリスク量 X_1, X_2 に対して、リスク尺度 ρ が $\rho(X_1 + X_2) \geq \rho(X_1) + \rho(X_2)$ の関係性を満たすことである。

(B) 2 変数のグンベル・コピュラ $C(u_1, u_2) = \exp \left\{ - \left((-\log(u_1))^\alpha + (-\log(u_2))^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\}$ は一般に、
左裾において裾従属性を持ち、右裾において漸近的に独立である。

(C) ある主体の富 X に対する効用関数を $u(x) = \log(x)$ と仮定する。このとき、期待効用原理によれば、当該効用関数をもつ主体はリスク回避的であり、そのリスク回避度は富の増大とともに増加する。

(イ) 次の (A) ~ (C) の記述のうち、内容が正しくないものをすべて選び『⑩』に解答しなさい。
なお、いずれも正しい場合、(D) を選択しなさい。

【⑩の選択肢】

(A) 支払備金の予測手法である確率論的アプローチでは、リスクと不確実性に関する調整額の算出に将来キャッシュフローの確率分布または複数シナリオを用いる。他方、決定論的アプローチでは、将来キャッシュフローを一点（期待値）で予測し、この期待値をリスクフリーレートで割り引くことで、リスクと不確実性に関する調整を行う。

(B) 再保険を契約手続き面により分類すると、再保険条件などの取引内容を個々の元受契約について個別に取り決める任意再保険と、複数の元受契約につき包括して取り決める特約再保険に分類される。一般に、任意再保険は割合再保険と非割合再保険の両方の形で取引がされている。

(C) 一般に、保険料が急増中の保険会社では、ペイドロスは今日の急成長を反映したものとなるが、リトンプレミアムは、概して従前の保険料のボリュームがまだ少ない当時のものを反映していることになる。その結果、リトンベース損害率は実態より高めとなり、急成長中の保険会社の収益を過小評価し、必要な料率水準を高めに見積もってしまう傾向にある。

問題 2. 次の (1) ~ (4) について、各問の指示に従い解答しなさい。

(1), (4) : 各 7 点 (2), (3) : 各 8 点 (計 30 点)

(1) 次の (ア)、(イ) の各問に答えなさい。

(ア) 次の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

4 月 1 日から翌年 3 月 31 日までを事業年度としている保険会社がある。この保険会社が販売した 2023 年 4 月 1 日始期契約で満期返戻金 200、保険期間 5 年の年払積立保険について、積立保険料として平準式積立保険料を採用した場合の第 3 保険年度末の払戻積立金 V_1 と、全期チルメル式積立保険料を採用した場合の第 3 保険年度末の払戻積立金 V_2 を比較したところ、 $V_2/V_1 = 0.96$ となった。このとき、積立保険料として全期チルメル式積立保険料を採用した場合における初保険年度の積立保険料と第 2 保険年度以降の積立保険料の差額に最も近いものは ① である。なお、予定契約消滅率を考慮した現価率を $\phi = 0.97$ とする。

【①の選択肢】

- (A) 9.0 (B) 9.5 (C) 10.0 (D) 10.5 (E) 11.0
(F) 11.5 (G) 12.0 (H) 12.5 (I) 13.0 (J) 13.5

(イ) 一般的な積立保険に関する次の (A) ~ (C) の記述のうち、内容が正しくないものをすべて選び『②』に解答しなさい。なお、いずれも正しい場合、(D) を選択しなさい。

【②の選択肢】

- (A) 保険料の算出において収支相等の原則が適用され、保険料算出の際の基礎率が予定通り実現していれば、過去法による責任準備金と将来法による責任準備金は一致する。
- (B) 一般に、保険設計や保険料算出の際の基礎率など、他の条件が全て同一であり、かつ、初年度経費相当額がある場合、チルメル式払戻積立金は平準式払戻積立金よりも小さくなる。
- (C) 積立保険の一部には、保険期間中、所定の事由の発生（扶養者の死亡など）を条件に、将来の保険料の払い込みを免除する制度を有するものがある。これを払込免除制度と言うが、保険料の払込免除による影響は保険金支払いに比して微々たるものであるため、保険料には織り込まれない。

(2) ある保険商品の直近年度の実績データは以下の表のとおりであった。

計上契約件数	20,000 件
計上保険料	240,000 千円
支払保険金	135,000 千円
実績社費	50,400 千円
発生クレーム件数	2,500 件
既経過保険料	244,200 千円
既発生保険金 (インカードロス)	140,000 千円
経過契約件数	20,350 件
クレーム額の標準偏差	74,500 円

また、この保険商品の現行の予定料率構成割合と営業保険料は以下の表のとおりであり、全契約の営業保険料は同一であるものとする。

予定損害率	50%
予定社費率	25%
予定代理店手数料率	20%
予定利潤率	5%
営業保険料	12,000 円

次の (ア) ~ (ウ) の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。なお、各問で計算した結果を後の問題で用いる場合は、各問で選択肢から選んだ数値を用いることとする。

(ア) 以下の条件の下で算出した全信頼度に必要なクレーム件数に最も近いものは ③ である。
なお、必要があれば下表 (標準正規分布の上側 ε 点) の数値を使用すること。

※ クレーム件数はポアソン分布に従うものとする。

※ クレーム件数および各クレーム額は互いに独立であり、クレーム総額を T 、その平均と分散

をそれぞれ、 $E(T)$ 、 $V(T)$ としたとき、 $\frac{T - E(T)}{\sqrt{V(T)}}$ は標準正規分布 $N(0,1)$ で近似できる。

※ 各クレーム額の平均および標準偏差は、直近年度の実績データを使用する。

※ クレーム総額が 90% の確率で、真のクレームコストの上下 5% 以内に収まれば、クレーム総額に全信頼度を与える。

<表> 標準正規分布の上側 ε 点 : $u(\varepsilon)$

ε	0.200	0.100	0.050	0.025	0.010
$u(\varepsilon)$	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326

【③の選択肢】

- (A) 800 件 (B) 1,000 件 (C) 1,200 件 (D) 1,500 件 (E) 1,800 件
(F) 2,000 件 (G) 2,500 件 (H) 3,000 件 (I) 3,800 件 (J) 5,000 件

(イ) 直近年度の実績データを用いて、純保険料法により改定純保険料を求める。算出に当たっては信頼度を勘案するものとし、(ア)で求めた全信頼度に必要なクレーム件数を用いると、改定純保険料の値に最も近いものは 円となる。

【④の選択肢】

- | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| (A) 6,000 | (B) 6,100 | (C) 6,200 | (D) 6,300 | (E) 6,400 |
| (F) 6,500 | (G) 6,600 | (H) 6,700 | (I) 6,800 | (J) 6,900 |

(ウ) (イ)で求めた改定純保険料に基づき、営業保険料を算出することを考える。改定後の社費率、代理店手数料率および利潤率は、それぞれ実績社費率、予定代理店手数料率および予定利潤率と同一とした場合、営業保険料の値に最も近いものは 円となる。なお、実績社費率は実績社費と計上保険料から求めるものとする。

【⑤の選択肢】

- | | | | | |
|------------|------------|------------|------------|------------|
| (A) 12,000 | (B) 12,100 | (C) 12,200 | (D) 12,300 | (E) 12,400 |
| (F) 12,500 | (G) 12,600 | (H) 12,700 | (I) 12,800 | (J) 12,900 |

(3) ある保険商品の年間クレーム総額 S の分布関数 $H(x:\alpha,\beta,x_0)$ は、ガンマ分布の分布関数

$$G(x:\alpha,\beta) = \int_0^x \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt \quad (0 \leq x < \infty, 0 < \alpha < \infty, 0 < \beta < \infty)$$
 を用いて、

$$H(x:\alpha,\beta,x_0) = G(x-x_0:\alpha,\beta)$$
 と近似できていることがわかっている。

このとき、次の (ア) ~ (ウ) の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

年間クレーム総額 S の平均、標準偏差、歪度は上記近似を行っても変化しないこととする。歪度は、

確率変数 X の k 次キュムラント χ_k を用いて、歪度 $= \frac{\chi_3}{\sigma^3}$ にて定義される。なお、必要があれば次

頁に示されるガンマ分布の分布関数 $G(x:\alpha,\beta)$ の値を用いること。

(ア) 3 次キュムラント χ_3 は

⑥
⑦

 で表される。

【⑥, ⑦の選択肢】

- (A) α (B) 2α (C) 3α (D) α^2 (E) α^3
 (F) β (G) β^2 (H) 2β (I) $2\beta^2$ (J) β^3

(イ) この保険商品の年間クレーム総額 S について、平均 3、標準偏差 1、歪度 1 であることが分かっている。このとき、 x_0 の値に最も近いものは、

⑧

 である。

【⑧の選択肢】

- (A) 0.5 (B) 1.0 (C) 1.5 (D) 2.0 (E) 2.5
 (F) 3.0 (G) 3.5 (H) 4.0 (I) 4.5 (J) 5.0

(ウ) この保険商品の年間クレーム総額に対して、エクセスポイント 3 のストップロス再保険を手配する。このストップロス再保険のネット再保険料（再保険者の負担する保険金の期待値）に最も近いものは、

⑨

 である。

【⑨の選択肢】

- (A) 0.40 (B) 0.60 (C) 0.80 (D) 1.00 (E) 1.20
 (F) 1.40 (G) 1.60 (H) 1.80 (I) 2.00 (J) 2.20

＜表＞ガンマ分布の分布関数の値

$x=2$ のとき

$G(2:\alpha, \beta)$		α							
		1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0
β	0.5	0.632	0.264	0.080	0.019	0.004	0.001	0.000	0.000
	1.0	0.865	0.594	0.323	0.143	0.053	0.017	0.005	0.001
	1.5	0.950	0.801	0.577	0.353	0.185	0.084	0.034	0.012
	2.0	0.982	0.908	0.762	0.567	0.371	0.215	0.111	0.051
	2.5	0.993	0.960	0.875	0.735	0.560	0.384	0.238	0.133
	3.0	0.998	0.983	0.938	0.849	0.715	0.554	0.394	0.256
	3.5	0.999	0.993	0.970	0.918	0.827	0.699	0.550	0.401
	4.0	1.000	0.997	0.986	0.958	0.900	0.809	0.687	0.547
	4.5	1.000	0.999	0.994	0.979	0.945	0.884	0.793	0.676
	5.0	1.000	1.000	0.997	0.990	0.971	0.933	0.870	0.780
	5.5	1.000	1.000	0.999	0.995	0.985	0.962	0.921	0.857
	6.0	1.000	1.000	0.999	0.998	0.992	0.980	0.954	0.910
	6.5	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.989	0.974	0.946
	7.0	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.994	0.986	0.968
	7.5	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.997	0.992	0.982
	8.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.990

 $x = 3$ のとき[illegible]

(4) 次の条件を満たす保険商品の引き受けを実施するにあたり、事業年度における破産確率を検討する。

<条件>

- ・ 1 契約あたりのクレーム件数は平均 0.01 のポアソン分布に従い、クレーム額は平均 50 万円の指数分布に従う。また、クレーム総額の分布は近似的に正規分布に従う。なお、クレーム件数とクレーム額は独立である。
- ・ この保険商品のみの引き受けを行い、保険金支払いは事業年度期初のサープラス 600 万円と、純保険料に安全割増 10%を加えた保険料収入で賄う。
- ・ 契約引受件数は、5,000 件。
- ・ 契約はすべて事業年度期初に締結されると同時に保険料が領収され、保険金支払いは事業年度中にすべて行われるものとする。なお、運用益は考慮しない。

このとき、次の (ア)、(イ) の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。なお、必要があれば下表（標準正規分布の上側 ε 点）の数値（表に記載のない数値は表中の隣り合う 2 つの値を直線補間することで算出された数値）および $e^{-1} = 0.3679$ を使用すること。

<表>標準正規分布の上側 ε 点 : $u(\varepsilon)$

ε	0.080	0.050	0.025	0.020	0.015	0.010
$u(\varepsilon)$	1.405	1.645	1.960	2.054	2.170	2.326

(ア) 当該事業年度における破産確率に最も近いものは、⑩ である。

【⑩の選択肢】

- (A) 2.5% (B) 3.0% (C) 3.5% (D) 4.0% (E) 4.5%
(F) 5.0% (G) 5.5% (H) 6.0% (I) 6.5% (J) 7.0%

(イ) 1 クレームごとに、エクセス方式の免責金額 50 万円と支払限度額 350 万円の支払条件(*)を設けた場合の破産確率に最も近いものは、⑪ である。なお、変更した支払条件に基づき純保険料を計算するものとする。

(*)例えば、クレーム額が 450 万円の場合は、 $\min\{350, 450 - 50\} = 350$ 万円を支払う。

【⑪の選択肢】

- (A) 1.0% (B) 1.5% (C) 2.0% (D) 2.5% (E) 3.0%
(F) 3.5% (G) 4.0% (H) 4.5% (I) 5.0% (J) 5.5%

問題 3. 次の (1) ~ (5) について、各問の指示に従い解答しなさい。

(1), (3), (4) : 各 10 点 (2), (5) : 各 9 点 (計 48 点)

(1) 団体 A と団体 B の過去 3 年間の実績クレームコストの保険成績が以下の通りであったとする。

		1 年目 ($j=1$)	2 年目 ($j=2$)	3 年目 ($j=3$)
団体 A ($i=1$)	契約者数 m_{1j}	50	60	90
	クレーム総額 $m_{1j}X_{1j}$	1,000	1,440	2,160
団体 B ($i=2$)	契約者数 m_{2j}	100	80	120
	クレーム総額 $m_{2j}X_{2j}$	2,200	2,240	3,960

4 年目の団体別のクレーム総額を推定するにあたり、Bühlmann-Straub モデルを用いることとする。
なお、クレーム総額の推定にあたっては、以下の統計量を使用する。

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^r m_i \bar{X}_i}{m}, \quad \hat{v} = \frac{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} m_{ij} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{\sum_{i=1}^r (n_i - 1)}, \quad \hat{w} = \frac{\sum_{i=1}^r m_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2 - \hat{v}(r-1)}{m - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^r m_i^2}$$

$$\text{ただし、} \bar{X}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} m_{ij} X_{ij}}{m_i}, \quad m_i = \sum_{j=1}^{n_i} m_{ij}, \quad m = \sum_{i=1}^r m_i \text{ とし、}$$

n_i は各団体において実績が判明している年数、 r は団体数とする。

このとき、次の (ア)、(イ) の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

(ア) 統計量 $\hat{v}$ の値に最も近い値は ①、統計量 $\hat{w}$ の値に最も近い値は ② となる。

【①の選択肢】

- (A) 200 (B) 300 (C) 500 (D) 800 (E) 1,000
(F) 1,300 (G) 1,500 (H) 1,800 (I) 2,200 (J) 2,500

【②の選択肢】

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5
(F) 6 (G) 7 (H) 8 (I) 9 (J) 10

(イ) 4 年目の契約者数は団体 A が 100 人、団体 B が 160 人であることがわかっている。このとき、
団体 A の 4 年目のクレーム総額の推定値に最も近い値は ③、団体 B の 4 年目のクレーム総額の推定値に最も近い値は ④ となる。

【③の選択肢】

(A) 2,100	(B) 2,150	(C) 2,200	(D) 2,250	(E) 2,300
(F) 2,350	(G) 2,400	(H) 2,450	(I) 2,500	(J) 2,550

【④の選択肢】

(A) 4,150	(B) 4,200	(C) 4,250	(D) 4,300	(E) 4,350
(F) 4,400	(G) 4,450	(H) 4,500	(I) 4,550	(J) 4,600

(2) ある保険商品は、契約者集団内の危険度のばらつきが大きいため、この保険商品のクレーム件数過程を通常の（パラメータが定数の）ポアソン過程としてモデリングすると、クレーム件数の分散を実際よりも過小評価するおそれがあった。そのため、パラメータを確率変数とし、クレーム件数過程 $\{N_t\}_{t \geq 0}$ を、次のようにモデリングした。

- ・ $\{N_t\}_{t \geq 0}$ は、確率変数 $\Lambda = \lambda$ の条件のもとでパラメータ λ のポアソン過程に従う。

したがって、例えば以下の性質が成り立つ。

$$P(N_t = n | \Lambda = \lambda) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \quad (t > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots)$$

- ・ Λ は以下の確率密度関数を持つ分布に従う。なお、 Λ は時刻 t によらないとする。

$$f(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda} \quad (0 \leq \lambda < \infty, \underline{1 < \alpha < \infty, 1 < \beta < \infty})$$

このとき、次の（ア）～（ウ）の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。
なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

（ア） $t > 0$ のとき、 $V(N_t)/E(N_t)$ は + で表される。（⑤と⑥は順不同）

【⑤, ⑥の選択肢】

- | | | | | |
|---------|----------------|---------------|---------------------|--------------------|
| (A) 1 | (B) α | (C) β | (D) α^{-1} | (E) β^{-1} |
| (F) t | (G) αt | (H) βt | (I) $\alpha^{-1} t$ | (J) $\beta^{-1} t$ |

（イ） $t > 0$ のとき、 $P(N_t = 0)$ は $\left(\frac{\text{⑦}}{\text{⑧}} \right)^{\text{⑨}}$ で表される。

【⑦～⑨の選択肢】

- | | | | | |
|-----------------|--------------|----------------------|------------------|------------------|
| (A) 1 | (B) α | (C) β | (D) t | (E) $\alpha - 1$ |
| (F) $\beta - 1$ | (G) $t + 1$ | (H) $\alpha + \beta$ | (I) $\alpha + t$ | (J) $\beta + t$ |

(ウ) $\{N_t\}_{t \geq 0}$ について、初めてクレームが発生する時刻を T とするとき、 $E(T)$ は $\frac{\text{⑩}}{\text{⑪}}$ で

表される。

【⑩, ⑪の選択肢】

- (A) 1 (B) α (C) β (D) $\alpha+1$ (E) $\beta+1$
(F) $\alpha-1$ (G) $\beta-1$ (H) $\alpha+\beta$ (I) $\alpha+\beta+1$ (J) $\alpha+\beta-1$

(3) ある保険契約の損害額 X の分布関数は、次のとおり表される。

$$F_X(x) = 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \quad \beta > 0, \xi > 0, x \geq 0$$

このとき、次の (ア) ～ (ウ) の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

(ア) $\beta = 2$ 、 $\xi = 0.5$ のとき、この保険契約に支払限度額 10 を設定した場合の支払保険金の期待値に最も近いものは、⑫ である。

【⑫の選択肢】

- | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| (A) 2.80 | (B) 2.82 | (C) 2.84 | (D) 2.86 | (E) 2.88 |
| (F) 2.90 | (G) 2.92 | (H) 2.94 | (I) 2.96 | (J) 2.98 |

(イ) $\beta = 2$ 、 $\xi = 0.5$ のとき、この保険契約の支払保険金の 90%VaR に最も近いものは、⑬ である。

【⑬の選択肢】

- | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| (A) 8.0 | (B) 8.2 | (C) 8.4 | (D) 8.6 | (E) 8.8 |
| (F) 9.0 | (G) 9.2 | (H) 9.4 | (I) 9.6 | (J) 9.8 |

(ウ) $\beta = 2$ 、 $\xi = 0.5$ のとき、この保険契約に支払限度額 10 を設定した場合の支払保険金の 90%TVaR に最も近いものは、⑭ である。

【⑭の選択肢】

- | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| (A) 9.0 | (B) 9.1 | (C) 9.2 | (D) 9.3 | (E) 9.4 |
| (F) 9.5 | (G) 9.6 | (H) 9.7 | (I) 9.8 | (J) 9.9 |

- (4) 保険種目 A および保険種目 B を販売している保険会社について、離散時間型モデルの破産確率を考える。時点 $n(=1, 2, \dots)$ におけるサープラス U_n は、

$$U_n = u_0 + cn - S_n^A - S_n^B$$

u_0 : 期首サープラス

W_i^A, W_i^B : 期間 i における保険種目 A, B のクレーム総額

$S_n^A = W_1^A + W_2^A + \dots + W_n^A, S_n^B = W_1^B + W_2^B + \dots + W_n^B$: 最初の n 期間中の保険種目 A, B のクレーム総額

c : 各期間の収入保険料

により表されるものとし、次の仮定を置く。

- W_i^A および W_i^B はそれぞれ、個々のクレーム額が平均 μ_A および μ_B の指数分布に従い、クレーム件数がパラメータ λ_A および λ_B のポアソン分布に従う複合ポアソン分布であるとする。
- 2つの保険種目の保険料の安全割増率は等しく、 θ とする。

このとき、次の (ア) ~ (ウ) の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

- (ア) この保険種目 A と B について、 $\mu_A = \mu_B = \mu_0$ かつ $\lambda_A = \lambda_B = \lambda_0$ が成り立っており、また、保険種目 A と B のクレーム件数の間、および保険種目 A と B のクレーム額の間には正の完全相関があった場合を考える。すなわち、保険種目 A と B は同時に同件数のクレームが発生し、その時の保険種目 A と B のクレーム額は同額であるものとする。
- 保険種目 A と B の個々のクレーム件数、クレーム額は、保険種目 A と B のクレーム件数どうし、および保険種目 A と B のクレーム額どうしを除いて互いに独立であるとする、Lundberg の不等式を用いて保険会社にとって最も保守的に評価した破産確率は、 $\exp(\text{⑮})$ である。

【⑮の選択肢】

- (A) $-\frac{\theta}{1+\theta}u_0$ (B) $-\frac{\theta}{(1+\theta)\mu_0}u_0$ (C) $-\frac{\theta}{(1+\theta)\lambda_0\mu_0}u_0$ (D) $-\frac{2\theta}{1+\theta}u_0$
- (E) $-\frac{2\theta}{(1+\theta)\mu_0}u_0$ (F) $-\frac{2\theta}{(1+\theta)\lambda_0\mu_0}u_0$ (G) $-\frac{\theta}{2(1+\theta)\mu_0}u_0$
- (H) $-\frac{\theta}{2(1+\theta)\lambda_0\mu_0}u_0$ (I) $-\frac{\theta}{4(1+\theta)\mu_0}u_0$ (J) $-\frac{\theta}{4(1+\theta)\lambda_0\mu_0}u_0$

(イ) この保険種目 A と B について、 $\mu_A = \mu_B = \mu_0$ かつ $\lambda_A = \lambda_B = \lambda_0$ が成り立っており、また、保険種目 A と B の個々のクレーム件数、クレーム額はいずれも互いに独立であるとする、Lundberg の不等式を用いて保険会社にとって最も保守的に評価した破産確率は、 $\exp(\text{⑩})$ である。

【⑩の選択肢】

$$\begin{array}{llll} \text{(A)} -\frac{\theta}{1+\theta}u_0 & \text{(B)} -\frac{\theta}{(1+\theta)\mu_0}u_0 & \text{(C)} -\frac{\theta}{(1+\theta)\lambda_0\mu_0}u_0 & \text{(D)} -\frac{2\theta}{1+\theta}u_0 \\ \text{(E)} -\frac{2\theta}{(1+\theta)\mu_0}u_0 & \text{(F)} -\frac{2\theta}{(1+\theta)\lambda_0\mu_0}u_0 & \text{(G)} -\frac{\theta}{2(1+\theta)\mu_0}u_0 & \\ \text{(H)} -\frac{\theta}{2(1+\theta)\lambda_0\mu_0}u_0 & \text{(I)} -\frac{\theta}{4(1+\theta)\mu_0}u_0 & \text{(J)} -\frac{\theta}{4(1+\theta)\lambda_0\mu_0}u_0 & \end{array}$$

(ウ) この保険種目 A と B について、 $\mu_A = 5$ 、 $\mu_B = 2$ 、 $\lambda_A = 1$ 、 $\lambda_B = 2$ であり、また、保険種目 A と B の個々のクレーム件数、クレーム額はいずれも互いに独立であるとする。 $u_0 = 20$ のとき、Lundberg の不等式を用いて保険会社にとって最も保守的に評価した破産確率が e^{-2} となる場合の安全割増率 θ の値に最も近いものは ⑪ である。

【⑪の選択肢】

$$\begin{array}{lllll} \text{(A)} 0.250 & \text{(B)} 0.333 & \text{(C)} 0.500 & \text{(D)} 0.667 & \text{(E)} 0.750 \\ \text{(F)} 1.000 & \text{(G)} 1.250 & \text{(H)} 1.333 & \text{(I)} 1.500 & \text{(J)} 1.677 \end{array}$$

(5) ある保険会社は 4 つの保険商品 A,B,C,D を販売している。このとき、次の (ア) ～ (ウ) の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。また、本問で必要があれば、 $e = 2.7183$ として計算すること。

(ア) (X, Y) を一般的な連続分布に従う確率変数とする。

- ・ $Y = f(X)$ が成り立つ単調増加関数 f が存在するとき、 X と Y は共単調であるという。
- ・ X と $-Y$ が共単調のとき、 X と Y は反単調であるという。

逆に、 X と Y が共単調であるとき、 $Y = f(X)$ が成り立つ単調増加関数 f が存在する。

例えば、 X は正規分布 $N(0, \sigma^2)$ 、 Y は正規分布 $N(\mu, 1)$ にそれぞれ従い、

かつ X と Y が共単調のとき、 $Y = f(X)$ が成り立つ単調増加関数 $f(x)$ に該当するものを選択肢から選ぶと、⑮ である。

【ヒント】 $P(X \leq x)$ を与えられた条件の下で変形する。

【⑮の選択肢】

- (A) $\frac{1}{\sigma}(x + \mu)$ (B) $\frac{1}{\sigma}(x + \mu\sigma)$ (C) $\frac{1}{\sigma}(x - \mu\sigma)$ (D) $\frac{1}{\sigma}(\sigma x + \mu)$ (E) $\frac{1}{\sigma}(\sigma x - \mu)$
 (F) $x + \mu$ (G) $x + \mu\sigma$ (H) $x - \mu\sigma$ (I) $\sigma x + \mu$ (J) $\sigma x - \mu$

(イ) 保険商品 A,B について考える。

- ・ 保険商品 A,B のクレーム額はそれぞれ Y_1, Y_2 であり、いずれも確率変数である。
- ・ $\log Y_1$ は正規分布 $N(0, 1)$ に従い、 $\log Y_2$ は正規分布 $N(0, (1.5)^2)$ に従う。
- ・ Y_1, Y_2 は同時分布に従い、 Y_1, Y_2 は反単調である。

このとき、 Y_1, Y_2 のピアソンの積率相関係数の値に最も近いものは ⑰ であり、ケンドールの順位相関係数の値に最も近いものは ⑳ となる。

【⑰, ⑳の選択肢】

- (A) -1.0 (B) -0.8 (C) -0.6 (D) -0.4 (E) -0.2
 (F) 0 (G) 0.2 (H) 0.4 (I) 0.6 (J) 0.8
 (K) 1.0

(ウ) 保険商品 C,D について考える。

- ・ 保険商品 C,D のクレーム額はそれぞれ U, V であり、いずれも確率変数である。
- ・ U, V の確率密度関数は以下のとおり。

$$f_U(x) = \begin{cases} e^{-x} & \dots x > 0 \\ 0 & \dots \text{その他} \end{cases} \quad f_V(y) = \begin{cases} 1 & \dots 0 < y < 1 \\ 0 & \dots \text{その他} \end{cases}$$

- ・ U, V は同時分布に従い、 $V = h(U)$ という関係が成り立つような単調増加関数 h が存在する。

このとき、 U, V のピアソンの積率相関係数の値に最も近いものは ㉑ であり、
ケンドールの順位相関係数の値に最も近いものは ㉒ となる。

【㉑, ㉒の選択肢】

- | | | | | |
|------------|------------|------------|------------|------------|
| (A) -1.0 | (B) -0.8 | (C) -0.6 | (D) -0.4 | (E) -0.2 |
| (F) 0 | (G) 0.2 | (H) 0.4 | (I) 0.6 | (J) 0.8 |
| (K) 1.0 | | | | |

以上