モラル・ハザードを考慮したマクロ・プライシングに関する一考察

明治生命　　安中　眞

【概要】

本稿では、経済学の基本的な概念の１つである「期待効用（Utility）」と、ゲーム理論とを用いることにより、モラル・ハザードを回避しつつ保険会社の期待効用を最大化する問題を、ある種の制約条件付き最適化問題として定式化する。

その上で、保険契約者および保険会社の期待効用関数についてあるモデルを設定した場合に、保険料精算体系について「保険事故の発生とは無関係に保険金額に応じて額を決める方法」よりも、「実績配当に近い傾斜配分による方法」の方が、保険会社の期待効用を大きくする場合があることを示す。

【目次】

１．はじめに

ここ数年悪質な「保険金詐欺事件」が頻発、社会問題化しており、保険会社に対してもこのような悪質な契約を排除する仕組み作りが早急に求められている。このようなモラル・ハザードに対して、保険会社は「新契約時の診査」や「保険事故発生時の査定」を、より精緻化することで対応してきた。

一方で、平成１３年１月には、日米保険協議を受けていわゆる第三分野についての規制緩和が拡大するが、その中で代表的な「医療保険」についても、「死亡保険」同様モラル・ハザードが深刻な問題となることが予想される。

「医療保険」におけるモラル・ハザードの防止策としては、一定日数未満の入院に対しては給付を行わない「不担保期間」や、責任開始期を契約日から一定期間遅らせる「待期間」の設定がある。しかし、この方法では、悪意のない大多数の契約者についても契約直後の保険事故については給付金が支払われない。

このモラル・ハザードが発生する大きな要因の１つとして、保険契約における「情報の非対称性」、すなわち、保険会社が診査や査定の段階で入手しうる情報にはどうしても限界があり、一度契約が締結されると、以後保険契約者がどのような生活態度を取るかは保険会社には完全には把握できない、という問題点がある。

このようなモラル・ハザード防止のためのマクロ・プライシングの手法について、１つの方向性を示したのが本稿である。これは、実質的な保険料精算の体系として、現在のように精算額を保険事故の発生とは無関係に保険金額に応じて決めるよりも、実績配当に近い考え方により傾斜的に配分する方が、保険会社の期待効用が大きくなる場合がある、というものである。

このように、傾斜的配分による保険料精算がより多くの期待効用を保険会社にもたらすということについて、より具体的なイメージを持ってもらうために、一例として次のような場合を考えてみよう。

すなわち、ある保険契約者がガン保険に加入しているとする。この保険契約者は、保険加入前の一定期間禁煙をしていて加入に際しても「喫煙の習慣なし」と告知したが、その後また煙草を吸い始めていつの間にか喫煙習慣が定着してしまっており、現在はまるで健康に気を遣わなくなってしまっているものとしよう。このような保険契約者は、日々節制や健康管理に努める保

険契約者に比べて保険金支払の危険性が高く、保険会社にとって望ましいものではない。そこで、保険会社も、健康に関するチラシを配ったり、健康相談を実施したり、あるいはスポーツ施設と提携して運動を奨励したりと、直接的ではないしても、様々な角度から健康的な生活態度に向かわせる方策を打つこともできる。

しかし、保険契約者の立場からすれば、いくら頭では「煙草の吸い過ぎは体によくない」と分かっていても、ただ単に煙草の本数を減らすのは、逆にストレスも増えるし、何らメリットを自覚できないかもしれない。いや、むしろ経済的主体としてはマイナスの効用を感じる可能性もあろう。

では、この時に保険会社が「1年間ガンにならなかった場合は保険料の一部をお返しします」と言ったらどうなるだろう。もし、この保険契約者から見て、「1年間無事に過ごせばお金が戻ってくる、というプラスの効用」が、「煙草の本数を減らすことによるマイナスの効用」以上であれば、保険契約者は自分から進んで煙草の本数を減らすことだろう。

ただし、この時注意が必要なのは、保険会社も「保険料の一部を返すことによるマイナスの効用」と「保険金支払が減ることによるプラスの効用」のバランスに気をつけなければならない、ということである。つまり、保険契約者と保険会社双方にとって「プラスの効用≧マイナスの効用」となるのが、望ましい状況なのである。では、このような状況が、どのような場合に起こるのかについて、次章以降で考えてみることとする。

２．問題の定式化

２．１．期待効用関数のモデル化

まず、保険契約者（注1）と保険会社の期待効用関数をモデル化する。各記号の意味は

- Ｄ：保険契約者の受け取る保険料精算の額
- Ｘ：保険料精算に対する保険契約者の効用
- e：保険契約者の保険事故発生防止活動への努力水準
- ϕ (e)：努力水準 e に対応して保険契約者が支出する一般化されたコスト
- Ｐ：ミクロ・プライシングにより算定された営業保険料（外生変数とみなす）
- Ｓ：保険事故の発生により支払われる保険金・給付金額

① 保険契約者の期待効用関数

リスク回避的とする。本稿では、以下のようにモデル化されるものとする。

- $U(D, e, P) \equiv X - \phi(e) - P$（注2）

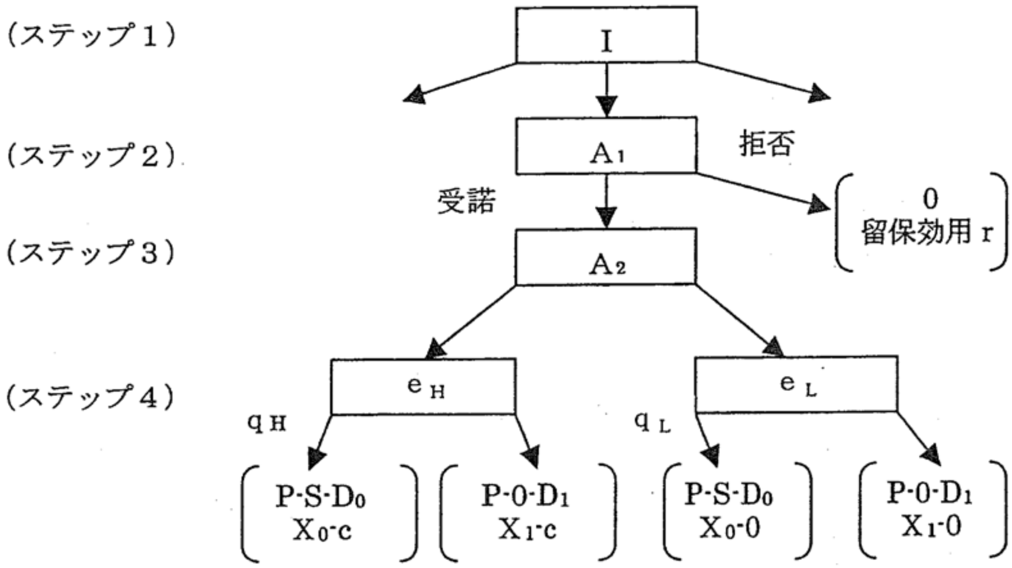
② 保険会社の期待効用関数

再保険や資本市場などの利用可能性から、保険契約者に対して、利潤に関してリスク中立的とする。したがって、期待効用関数は線形関数で表されるが、本稿では、以下のようにモデル化されるものとする。

- $V(P, S, D) \equiv P - S - D$

２．２．問題の構造

（図１）ゲーム・ツリー



ここで、（　）の上段は保険会社、下段は保険契約者の期待効用を表す。

（図１）は、本稿におけるマクロ・プライシングの問題の構造を、ゲーム・ツリーを使って表したものである。これは問題が４つのステップからなることを示している。すなわち、

（ステップ１）保険会社が保険契約者にある契約を提案する

（ステップ２）保険契約者はこの提案を拒否して留保効用を得るか、または受諾して契約を締結する

（ステップ３）保険契約者は様々な保険事故発生防止活動への努力水準を選ぶ

（ステップ４）保険金・給付金額が、またこれにともなって保険会社の利潤がランダムに実現され、契約に応じて保険料精算がなされる

また、このゲーム・ツリーの（ステップ２）、（ステップ３）における保険契約者の合理的な行動基準は以下のとおりである。

（ステップ２）契約が提案されたときにA_1に続くサブゲームで、保険契約者は受諾したときの最大化された期待効用と拒否したときの留保効用とを比較して大きい方を選ぶ

（ステップ３）契約が提案され、それを受諾したときにA_2に続くサブゲームで保険契約者は期待効用を最大にする努力水準ｅを選ぶ

２．３．定式化

この問題を保険会社から見た条件付最適化問題として、以下のように定式化することができる。

「$\max_{\text{全ての保険料精算体系}}$（サブゲームの均衡からの期待効用）

ただし、条件として

（条件１）保険契約者は契約を受諾した後に努力水準ｅを合理的に選ぶ

（条件２）保険契約者は（条件１）を所与として受諾か拒否かを合理的に選ぶ」

つまり、我々の目標は「保険契約者に関する上述の（条件１）、（条件２）の制約条件を満たしながら、保険会社にとって有利な努力水準ｅを保険契約者に選択させ、かつその場合の保険会社の期待効用を最大化するような契約を見つけること」である。

（注１）本稿においては、保険契約者＝被保険者とする。

（注２）記号‘≡’は、右辺で左辺を定義することを意味する。

３．簡単な例による分析

まずは、図１の構造を持つもっとも単純な設例を分析し今回の問題の特徴を把握する。

３．１．前提条件

① 保険契約者の努力水準は最もレベルの低いe_Lか、最もレベルの高いe_Hのいずれかのみとする。
② 保険料精算Ｄに対する保険契約者の期待効用ＸはＸ＝$D^{1/2}$で表される。
③ $\phi(e_L)=0$、$\phi(e_H)\equiv c>0$
④ 留保効用$\equiv r>0$
⑤ $1>q_L>q_H>0$、$p_*\equiv 1-q_*$

３．２．保険契約者の選択肢

（図１）から保険契約者の選びうる選択肢は以下の３つであることが分かる。

（ケース１）保険契約者が契約を受諾して努力水準e_Hを選ぶ
（ケース２）保険契約者が契約を受諾して努力水準e_Lを選ぶ
（ケース３）保険契約者が契約を拒否する

以下、上述の（ケース１）～（ケース３）について、保険会社の期待効用を最大化するような保険料精算の体系と、そのときの期待効用を求める。

３．３．（ケース１）努力水準e_Hを選ぶとき

このとき、保険会社の期待効用は

$$q_H\cdot(P-S-D_0)+p_H\cdot(P-0-D_1)$$

$$=P-q_H\cdot S-(q_H\cdot D_0+p_H\cdot D_1)$$

$$=P-q_H\cdot S-(q_H\cdot X_0^2+p_H\cdot X_1^2)$$

よって、「$\max_{(D_0,D_1)}$ {保険会社の期待効用} を実現する（D$_0$、D$_1$)」

は「$\min_{(X_0,X_1)}\left(q_H \cdot X_0^2 + p_H \cdot X_1^2\right)$を実現する（X$_0$、X$_1$)」:（＊）と同値である。

また、「保険契約者がｅ$_H$を選ぶ」という制約条件を式で表すと

（条件１）

「ｅ$_H$での保険契約者の期待効用≧ｅ$_L$での保険契約者の期待効用」

＝「$q_H \cdot (X_0 - c) + p_H \cdot (X_1 - c) \geq q_L \cdot X_0 + p_L \cdot X_1$」:（＃１）

（条件２）

「ｅ$_H$での保険契約者の期待効用≧保険契約者の留保効用」

＝「$q_H \cdot (X_0 - c) + p_H \cdot (X_1 - c) \geq r$」:（＃２）

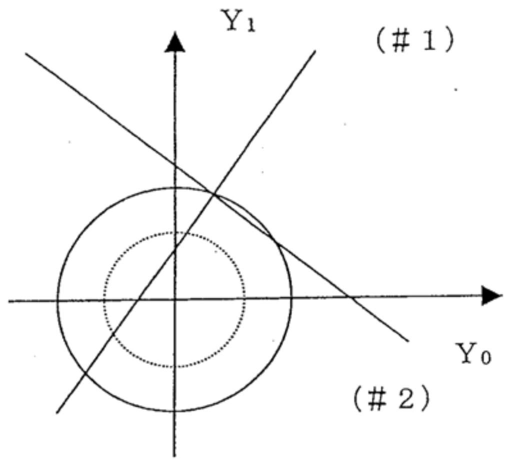
以上により定式化された、制約条件（＃１)、（＃２）の下での最適化問題（＊）を解くと以下のとおり：

$Y_0 \equiv q_H^{1/2} \cdot X_0$、$Y_1 \equiv p_H^{1/2} \cdot X_1$ と変換すると、問題は以下のようになる。

$$\min_{(Y_0,Y_1)}\left(Y_0^2 + Y_1^2\right):(*)$$

$$(q_H - q_L)\cdot q_H^{-1/2} \cdot Y_0 + (q_L - q_H)\cdot p_H^{-1/2} \cdot Y_1 \geq c : (\#1)$$

$$q_H^{1/2} \cdot Y_0 + p_H^{1/2} \cdot Y_1 \geq r + c : (\#2)$$



これは、

「(Y$_0$, Y$_1$) 平面上（＃１)、（＃２）で表される半平面（いずれも原点Ｏを含まない）の共通領域と原点Ｏとの距離（の２乗）を最小化する」

ということに他ならない。よって（＊）を最小化させる（Y$_0$, Y$_1$）は、（＃１)、（＃２）

の等号で表される２直線の交点であり、

$$\mathrm{Y}_0 = q_H^{1/2} \cdot \left(r - \frac{p_L}{q_L - q_H} \cdot c \right)、$$

$$\mathrm{Y}_1 = p_H^{1/2} \cdot \left(r + \frac{q_L}{q_L - q_H} \cdot c \right)$$

このとき、$Y_0^2 + Y_1^2 = (r + c)^2 + \dfrac{q_H \cdot p_H \cdot c^2}{(q_L - q_H)^2}$

ところで、この最適解に対応する保険料精算の額D_0、D_1はそれぞれ

$$\mathrm{D}_0 = \left(r - \frac{p_L}{q_L - q_H} \cdot c \right)^2 \quad < \quad \mathrm{D}_1 = \left(r + \frac{q_L}{q_L - q_H} \cdot c \right)^2$$

これは、「保険金・給付金の支払のなかった保険契約者に対しては、支払のあった保険契約者よりも保険料精算の額を大きくするという、実績配当に近い考え方により傾斜配分する体系を取ることで、保険会社の期待効用が最大化される」ことを意味する。

３．４．（ケース２）努力水準e_Lを選ぶとき

このときの保険会社の期待効用は

$$P - q_L \cdot S - \left(q_L \cdot X_0^2 + p_L \cdot X_1^2 \right)$$

よって求めるべきは、

「$\min_{(X_0, X_1)} \left(q_L \cdot X_0^2 + p_L \cdot X_1^2 \right)$を実現する（$\mathrm{X}_0$、$\mathrm{X}_1$）」：（＊）

また、制約条件は以下のように表現することができる。

$q_L \cdot X_0 + p_L \cdot X_1 \geq q_H \cdot (X_0 - c) + p_H \cdot (X_1 - c)$：（＃１）

$q_L \cdot X_0 + p_L \cdot X_1 \geq r$：（＃２）

以上により定式化された、制約条件（＃１）、（＃２）の下での最適化問題（＊）を３．３．と同様に解くと（詳細は●Ａｐｐｅｎｄｉｘ３．４．参照）、

最適解は、$X_0 = X_1 = r$。このとき、$q_L \cdot X_0^2 + p_L \cdot X_1^2 = r^2$

これは、現行と同じように「保険金・給付金の支払いの有無にかかわらず、一律の保険料精算を行う平坦型の体系を取ることにより保険会社の期待効用が最大化される」こと意味する。

つまり、現在の保険料精算体系は結果的に、「保険契約者は総じて保険事故を防止するような努力はしない、という仮定で保険会社の期待効用が最大化する」ような体系になっている。

３．５．（ケース３）拒否するとき

このときは、保険会社の期待効用＝0。

3．6．分析結果

以上より、各ケースの保険会社の期待効用をまとめると次表のとおり：

コストと期待効用	ケース1（受諾してe_H）	ケース2（受諾してe_L）	ケース3（拒否）
保険金・給付金額の期待値	$q_H \cdot S$	$q_L \cdot S$	−
保険料精算の期待値	$(r+c)^2 + \dfrac{q_H \cdot p_H \cdot c^2}{(q_L - q_H)^2}$	r^2	−
保険会社の期待効用	$P - q_H \cdot S - (r+c)^2 - \dfrac{q_H \cdot p_H \cdot c^2}{(q_L - q_H)^2}$	$P - q_L \cdot S - r^2$	0

これから、

①「保険金・給付金額の期待値」は、（ケース１）＜（ケース２）

②「保険料精算の期待値」は、（ケース１）＞（ケース２）

しかし、「保険会社の期待効用」については、（ケース１）と（ケース２）の大小関係は一概には決まらない。そこで、（ケース１）＞（ケース２）となる条件を算式で表してみると、

$$S > \frac{(2r+c)\cdot c}{(q_L - q_H)} + \frac{q_H \cdot p_H \cdot c^2}{(q_L - q_H)^3} \quad :(**)$$ (注3)

（＊＊）から、（ケース１）の方が保険会社の期待効用が大きくなるのは

① e_Lとe_Hとの保険事故発生率の差$q_L - q_H$が大きい

② e_Hを維持するためのコストcが小さい

すなわち

「保険契約者が少ないコスト負担をすることで、保険事故発生率の大きな改善が見込まれる」

ときである。

（注３）数値例を示すと、「$S=1000$あたり、留保効用$r=30$、$q_L=0.5$に対して$q_H=0.2$、努力水準e_Hを維持するのに必要なコスト$c=4$」

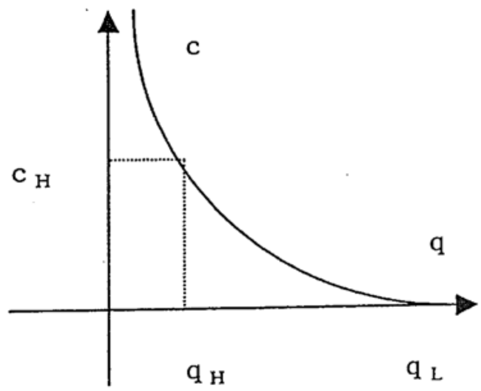
４．努力水準が３つ以上の場合

次に、やや一般化して努力水準が３つになった場合を分析する。

４．１．前提条件

① 保険契約者の努力水準は、最もレベルの低いe_Lと最もレベルの高いe_Hの他に、中間的なe_Nがあるものとする。
② 保険料精算Ｄに対する保険契約者の期待効用ＸはＸ＝$D^{1/2}$で表される。
③ $c_L \equiv \phi(e_L)=0$、$c_N \equiv \phi(e_N)$、$c_H \equiv \phi(e_H)$
④ 一般化されたコスト$c \equiv \phi(e)$は各努力水準ｅにおける保険事故発生率ｑの関数$c(q)$で表され、かつ$(q_H < q < q_L)$で以下の条件を満たす：
「$c=c(q)>0$は１回微分可能な単調減少関数、かつ下に凸」
⑤ 留保効用$\equiv r>0$
⑥ $1>q_L>q_N>q_H>0$、$p_* \equiv 1-q_*$

なお、④の単調減少性、凸性ともに狭義の意味とする。ここで、一般化されたコストｃと保険事故発生率ｑとの間に、このような条件を設定することは、次の意味で自然であると考える：



（単調減少）一般化されたコストが高い努力水準ほど、保険事故事故発生率は低い
（下に凸）同じ量の一般化コストを投下した時の保険事故事故発生率の改善度合は、低い努力水準の方が大きい

４．２．保険契約者の選択肢

保険契約者の選びうる選択肢は以下の４つである。
（ケース１）保険契約者が契約を受諾して努力水準e_Hを選ぶ
（ケース２）保険契約者が契約を受諾して努力水準e_Nを選ぶ
（ケース３）保険契約者が契約を受諾して努力水準e_Lを選ぶ

（ケース４）保険契約者が契約を拒否する（→保険会社の期待効用＝0）
以下、（ケース１）～（ケース３）について、第３章と同様の分析を行う。

４．３．（ケース１）努力水準e_Hを選ぶとき

このとき、保険会社の期待効用は

$$P - q_H \cdot S - \left(q_H \cdot X_0^2 + p_H \cdot X_1^2\right)$$

よって、３．３．に同じく、最適化すべきものは

$$\min_{(X_0, X_1)}\left(q_H \cdot X_0^2 + p_H \cdot X_1^2\right) : (*)$$

また、制約条件は以下のように表現することができる

$$q_H \cdot \left(X_0 - c_H\right) + p_H \cdot \left(X_1 - c_H\right) \geq q_N \cdot \left(X_0 - c_N\right) + p_N \cdot \left(X_1 - c_N\right)$$
：（＃１）

$$q_H \cdot \left(X_0 - c_H\right) + p_H \cdot \left(X_1 - c_H\right) \geq q_L \cdot X_0 + p_L \cdot X_1 : (\#2)$$

$$q_H \cdot \left(X_0 - c_H\right) + p_H \cdot \left(X_1 - c_H\right) \geq r : (\#3)$$

以上により定式化された、制約条件（＃１）～（＃３）の下での最適化問題（＊）解くと（詳細は●Ａｐｐｅｎｄｉｘ４．３．参照）以下のとおり：

$$X_0 = \left(r + c_H\right) - \frac{p_H}{q_N - q_H} \cdot \left(c_H - c_N\right)$$

$$X_1 = \left(r + c_H\right) + \frac{q_H}{q_N - q_H} \cdot \left(c_H - c_N\right)$$

$$X_1 - X_0 = \frac{c_H - c_N}{q_N - q_H}$$

$$q_H \cdot X_0^2 + p_H \cdot X_1^2 = \left(r + c_H\right)^2 + \frac{q_H \cdot p_H \cdot \left(c_H - c_N\right)^2}{\left(q_N - q_H\right)^2}$$

４．４．（ケース２）努力水準e_Nを選ぶとき

保険会社の期待効用は

$$P - q_N \cdot S - \left(q_N \cdot X_0^2 + p_N \cdot X_1^2\right)$$

また、制約条件は

$$q_N \cdot \left(X_0 - c_N\right) + p_N \cdot \left(X_1 - c_N\right) \geq q_H \cdot \left(X_0 - c_H\right) + p_H \cdot \left(X_1 - c_H\right)$$

：（＃１）

$$q_N \cdot \left(X_0 - c_N\right) + p_N \cdot \left(X_1 - c_N\right) \geq q_L \cdot X_0 + p_L \cdot X_1 \quad ：（＃２）$$

$$q_N \cdot \left(X_0 - c_N\right) + p_N \cdot \left(X_1 - c_N\right) \geq r \quad ：（＃３）$$

以上により定式化された、制約条件（＃１）～（＃３）の下での最適化問題（＊）解くと（詳細は●Ａｐｐｅｎｄｉｘ４．４．参照）以下のとおり：

$$X_0 = r - \frac{p_L}{q_L - q_N} \cdot c_N \quad 、\quad X_1 = r + \frac{q_L}{q_L - q_N} \cdot c_N$$

$$X_1 - X_0 = \frac{c_N}{q_L - q_N}$$

$$q_N \cdot X_0^2 + p_N \cdot X_1^2 = \left(r + c_N\right)^2 + \frac{q_N \cdot p_N \cdot c_N^2}{\left(q_L - q_N\right)^2}$$

４．５．（ケース３）努力水準e_Lを選ぶとき

保険会社の期待効用は

$$P - q_L \cdot S - \left(q_L \cdot X_0^2 + p_L \cdot X_1^2\right)$$

また、制約条件は

$$q_L \cdot X_0 + p_L \cdot X_1 \geq q_H \cdot \left(X_0 - c_H\right) + p_H \cdot \left(X_1 - c_H\right) \quad ：（＃１）$$

$$q_L \cdot X_0 + p_L \cdot X_1 \geq q_N \cdot (X_0 - c_N) + p_N \cdot (X_1 - c_N)$$ ：（＃２）

$$q_L \cdot X_0 + p_L \cdot X_1 \geq r$$ ：（＃３）

以上により定式化された、制約条件（＃１）～（＃３）の下での最適化問題（＊）解くと（詳細は●Ａｐｐｅｎｄｉｘ４．５．参照）以下のとおり：

$X_0 = X_1 = r$。このとき、$q_L \cdot X_0^2 + p_L \cdot X_1^2 = r^2$

４．６．分析結果

以上より、各ケースでの保険会社の期待効用をまとめると次表のとおり：

コストと期待効用	ケース１ (受諾して e_H)	ケース２ (受諾して e_N)	ケース３ (受諾して e_L)
保険金・給付金額の期待値	$q_H \cdot S$	$q_N \cdot S$	$q_L \cdot S$
保険料精算の期待値	$(r+c_H)^2 + \dfrac{q_H \cdot p_H \cdot (c_H - c_N)^2}{(q_N - q_H)^2}$	$(r+c_N)^2 + \dfrac{q_N \cdot p_N \cdot c_N^2}{(q_L - q_N)^2}$	r^2
保険会社の期待効用	$P - q_H \cdot S - (r+c_H)^2 - \dfrac{q_H \cdot p_H \cdot (c_H - c_N)^2}{(q_N - q_H)^2}$	$P - q_N \cdot S - (r+c_N)^2 - \dfrac{q_N \cdot p_N \cdot c_N^2}{(q_L - q_N)^2}$	$P - q_L \cdot S - r^2$

「保険会社の期待効用」について、（ケース１）＞（ケース２）＞（ケース３）となる条件を算式で表してみる。

① （ケース1）＞（ケース２）

を整理すると、

$$S > \frac{(2r + c_N + c_H)\cdot(c_H - c_N)}{(q_N - q_H)} + \frac{q_H \cdot p_H \cdot (c_H - c_N)^2}{(q_N - q_H)^3} - \frac{q_N \cdot p_N \cdot c_N^{\ 2}}{(q_L - q_N)^2 (q_N - q_H)}$$

：（＊＊）

② （ケース２）＞（ケース３）

を整理すると、

$$S > \frac{(2r + c_N)\cdot c_N}{(q_L - q_N)} + \frac{q_N \cdot p_N \cdot c_N^{\ 2}}{(q_L - q_N)^3} \quad ：（＊＊＊）$$

以上より、(ケース１) ＞ (ケース２) ＞ (ケース３) となるためには、

「(＊＊＊) より $\dfrac{c_N}{q_L - q_N}$ が小、かつ、(＊＊) より $\dfrac{c_H - c_N}{q_N - q_H}$ が小」

であることが必要である。

４．７．努力水準がｋ個の場合（ｋ≧3）

４．１．～４．６．で示した内容は、努力水準がｋ個の場合にも拡張しうる。このときは、前提条件として、

① 保険契約者の努力水準は、最もレベルの低い e_1（＝４．１．の e_L に相当）から最もレベルの高い e_k（＝４．１．の e_H に相当）の他に、中間的な e_2、・・・、e_{k-1} があるものとする。

② 保険料精算Ｄに対する保険契約者の期待効用ＸはＸ＝$D^{1/2}$ で表される。

③ $c_1 \equiv \phi(e_1) = 0$、$c_i \equiv \phi(e_i) > 0$ $(1 < i \leqq k)$

④ 一般化されたコスト $c \equiv \phi(e)$ は各努力水準ｅにおける保険事故発生率ｑの関数 $c(q)$ で表され、かつ $(q_k < q < q_1)$ で以下の条件を満たす：

「$c = c(q) > 0$ は１回微分可能な単調減少関数、かつ下に凸」

⑤ 留保効用 $\equiv r > 0$

⑥ $1 > q_i > q_j > 0$ $(i < j)$、$p_* \equiv 1 - q_*$

以上より、４．３．～４．５．と同様に、各努力水準における保険会社の保険料精算の期待値を計算すると、

○ 受諾して e_i $(1 < i \leqq k)$ を選んだ場合

$$\Rightarrow \quad (r + c_i)^2 + \frac{q_i \cdot p_i \cdot (c_i - c_{i-1})^2}{(q_{i-1} - q_i)^2}$$

○ 受諾して e_1 を選んだ場合　⇒　r^2

４．６．で分析したのと同様に、e_{i+1} $(i < k)$ を選んだ場合の保険会社の期待効用が、e_i を選んだ場合の保険会社の期待効用よりも大きくなる条

件を式で表すと、

$$S > \frac{(2r + c_i + c_{i+1}) \cdot (c_{i+1} - c_i)}{(q_i - q_{i+1})} + \frac{q_{i+1} \cdot p_{i+1} \cdot (c_{i+1} - c_i)^2}{(q_i - q_{i+1})^3} - \frac{q_i \cdot p_i \cdot (c_i - c_{i-1})^2}{(q_{i-1} - q_i)^2 (q_i - q_{i+1})}$$

$$S > \frac{(2r + c_2) \cdot c_2}{(q_1 - q_2)} + \frac{q_2 \cdot p_2 \cdot c_2^{\,2}}{(q_1 - q_2)^3}$$

よって、帰納的に$\dfrac{c_{i+1} - c_i}{q_i - q_{i+1}}$が小となればよい。しかしながら、c＝c（q）

が下に凸であることから、$\dfrac{c_k - c_{k-1}}{q_{k-1} - q_k} > \dfrac{c_{k-1} - c_{k-2}}{q_{k-2} - q_{k-1}} > \cdot\cdot\cdot > \dfrac{c_2 - c_1}{q_1 - q_2}$なので、結局は$\dfrac{c_k - c_{k-1}}{q_{k-1} - q_k}$が小という条件が必要となる。

5．保険金・給付金の支払事由が２つ以上の場合

次に、やや一般化して保険金・給付金の支払事由が２つになった場合を分析する。

5．1．前提条件

① 保険契約者の努力水準は最もレベルの低いe_Lか、最もレベルの高いe_Hのいずれかのみとする。
② 保険料精算Ｄに対する保険契約者の期待効用ＸはＸ＝$D^{1/2}$で表される。
③ ϕ（e_L）＝0、ϕ（e_H）≡ｃ＞0
④ 留保効用≡ｒ＞0
⑤ 各努力水準e_*（＊＝Ｌ、Ｈ）において、支払事由０（＝保険金額がＳ）の保険事故発生率をq_*、支払事由１（＝保険金額がｇ・Ｓ（0＜ｇ＜1））の保険事故発生率をr_*とする。
⑥ 1＞q_L＞q_H＞0、1＞r_L＞r_H＞0、p_*≡１－q_*－r_*

5．2．保険契約者の選択肢

保険契約者の選びうる選択肢は以下の３つである。
（ケース１）保険契約者が契約を受諾して努力水準e_Hを選ぶ
（ケース２）保険契約者が契約を受諾して努力水準e_Lを選ぶ
（ケース３）保険契約者が契約を拒否する（→保険会社の期待効用＝0）
以下、（ケース１）、（ケース２）について、第３章と同様の分析を行う。

5．3．（ケース１）努力水準e_Hを選ぶとき

このとき、保険会社の期待効用は

$$P-(q_H\cdot S+r_H\cdot g\cdot S)-(q_H\cdot X_0^2+r_H\cdot X_1^2+p_H\cdot X_2^2)$$

よって、最適化すべきものは

$$\min_{(X_0,X_1,X_2)}(q_H\cdot X_0^2+r_H\cdot X_1^2+p_H\cdot X_2^2)\ :（＊）$$

また、制約条件は以下のように表現することができる

$$q_H \cdot (X_0 - c) + r_H \cdot (X_1 - c) + p_H \cdot (X_2 - c)$$

$$\geq q_L \cdot X_0 + r_L \cdot X_1 + p_L \cdot X_2 \quad :(\#1)$$

$$q_H \cdot (X_0 - c) + r_H \cdot (X_1 - c) + p_H \cdot (X_2 - c) \geq r \ :(\#2)$$

以上のように一般化された制約条件（＃１）、（＃２）の下での最適化問題（＊）を解くには、非線形計画法におけるKuhn－Tucker条件による方法を用いる（●Ａｐｐｅｎｄｉｘ５．３．参照)。

すなわち、最適解は以下の式を満たす：
『$\lambda_1 \geqq 0$および$\lambda_2 \geqq 0$が存在して、

$$q_H \cdot 2X_0 - \lambda_1 \cdot q_H - \lambda_2 \cdot (q_H - q_L) = 0 :(※1)$$

$$r_H \cdot 2X_1 - \lambda_1 \cdot r_H - \lambda_2 \cdot (r_H - r_L) = 0 :(※2)$$

$$p_H \cdot 2X_2 - \lambda_1 \cdot p_H - \lambda_2 \cdot (p_H - p_L) = 0 :(※3)$$

$$\lambda_2 \cdot \{(q_H - q_L) \cdot X_0 + (r_H - r_L) \cdot X_1 + (p_H - p_L) \cdot X_2 - c\} = 0 :(※4)$$

$$\lambda_1 \cdot (q_H \cdot X_0 + r_H \cdot X_1 + p_H \cdot X_2 - r - c) = 0 :(※5)$$』

これを、λ_1、λ_2が0であるか否かで場合分けして考えてみることにする。

① $\lambda_1 = 0$かつ$\lambda_2 = 0$のとき
このとき（※１）～（※３）より、$X_0 = X_1 = X_2 = 0$。よって①はあり得ない

② $\lambda_1 = 0$かつ$\lambda_2 \neq 0$のとき
このとき（※１）～（※３）より、$q_H \cdot X_0 + r_H \cdot X_1 + p_H \cdot X_2 = 0$、
すなわち、$X_0 = X_1 = X_2 = 0$。よって②もあり得ない

③　λ₁≠0かつλ₂=0のとき

このとき（※1）～（※3）より、$X_0=X_1=X_2=\lambda_1/2$。さらに（※5）より$X_0=X_1=X_2=r+c$。これは、（＃1）に反する。よって③はあり得ない

以上より、λ_1、λ_2はいずれも0でないため、最適解は次を満たすことになる。

$$(q_H-q_L)\cdot X_0+(r_H-r_L)\cdot X_1+(p_H-p_L)\cdot X_2-c=0 \text{：（※4）'}$$

$$q_H\cdot X_0+r_H\cdot X_1+p_H\cdot X_2-r-c=0 \text{：（※5）'}$$

（※1）～（※3）と（※4）'、（※5）' を解くと、

$$X_0=r+c+\frac{c\left(1-\dfrac{q_L}{q_H}\right)}{\left\{\dfrac{(q_L-q_H)^2}{q_H}+\dfrac{(r_L-r_H)^2}{r_H}+\dfrac{(p_L-p_H)^2}{p_H}\right\}}\text{、}$$

$$X_1=r+c+\frac{c\left(1-\dfrac{r_L}{r_H}\right)}{\left\{\dfrac{(q_L-q_H)^2}{q_H}+\dfrac{(r_L-r_H)^2}{r_H}+\dfrac{(p_L-p_H)^2}{p_H}\right\}}\text{、}$$

$$X_2=r+c+\frac{c\left(1-\dfrac{p_L}{p_H}\right)}{\left\{\dfrac{(q_L-q_H)^2}{q_H}+\dfrac{(r_L-r_H)^2}{r_H}+\dfrac{(p_L-p_H)^2}{p_H}\right\}}$$

このとき、$q_H\cdot X_0^2+r_H\cdot X_1^2+p_H\cdot X_2^2$

$$=(r+c)^2+\frac{c^2}{\left\{\dfrac{(q_L-q_H)^2}{q_H}+\dfrac{(r_L-r_H)^2}{r_H}+\dfrac{(p_L-p_H)^2}{p_H}\right\}}$$

５．４．（ケース２）努力水準ｅ$_L$を選ぶとき

このとき、保険会社の期待効用は

$$P-\left(q_L \cdot S + r_L \cdot g \cdot S\right)-\left(q_L \cdot X_0^2 + r_L \cdot X_1^2 + p_L \cdot X_2^2\right)$$

よって、最適化すべきものは

$$\min_{(X_0,X_1,X_2)}\left(q_L \cdot X_0^2 + r_L \cdot X_1^2 + p_L \cdot X_2^2\right) : (*)$$

また、制約条件は以下のように表現することができる

$$q_L \cdot X_0 + r_L \cdot X_1 + p_L \cdot X_2$$

$$\geq q_H \cdot \left(X_0 - c\right) + r_H \cdot \left(X_1 - c\right) + p_H \cdot \left(X_2 - c\right) : (\#1)$$

$$q_L \cdot X_0 + r_L \cdot X_1 + p_L \cdot X_2 \geq r : (\#2)$$

５．３．と同様に、Kuhn－Tucker条件による方法を用いて制約条件（＃１）、（＃２）の下での最適化問題（＊）を解くと（詳細は●Ａｐｐｅｎｄｉｘ５．４．参照）以下のとおり：

$X_0=X_1=X_2=r$。このとき、$q_H \cdot X_0^2 + r_H \cdot X_1^2 + p_H \cdot X_2^2 = r^2$

５．５．支払事由がｋ個の場合（ｋ≧2）

５．１．～５．４．で示した内容は、保険金・給付金の支払事由がｋ個の場合にも拡張し得る。前提条件として、

① 保険契約者の努力水準は最もレベルの低いe_Lか、最もレベルの高いe_Hのいずれかのみとする。
② 保険料精算Ｄに対する保険契約者の期待効用ＸはＸ＝$D^{1/2}$で表される。
③ ϕ（e_L）＝0、ϕ（e_H）≡ｃ＞0
④ 留保効用≡ｒ＞0
⑤ 各努力水準e_*（＊＝Ｌ、Ｈ）において、支払事由０（＝保険金額がＳ）の保険事故発生率を$q^{(0)}{}_*$、支払事由ｉ（＝保険金額がg_i・Ｓ

$(0 < g_i < 1)$、$1 \leqq i \leqq k-1$）の保険事故発生率を $q^{(i)}_*$ とする。
ただし、$1 > g_i > g_j > 0$（$i < j$）

⑥ $q^{(i)}_L > q^{(i)}_H$（$0 \leqq i \leqq k-1$）、$p_* \equiv 1 - \sum_{i=0}^{k-1} q_*^{(i)}$

以上より、５．３．および５．４．と同様に、各水準における保険会社の保険料精算の期待値を計算すると、

○ 受諾して e_H を選んだ場合

$$\Rightarrow \quad (r+c)^2 + \frac{c^2}{\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(q_H^{(i)} - q_L^{(i)})^2}{q_H^{(i)}} + \frac{(p_H - p_L)^2}{p_H}}$$

○ 受諾して e_L を選んだ場合 $\Rightarrow$ r^2

e_H を選んだ場合の保険会社の期待効用が、e_L を選んだ場合の保険会社の期待効用よりも大きくなる条件を式で表すと、

$$\left\{ q_L^{(0)} - q_H^{(0)} - \sum_{i=1}^{k-1} g_i \cdot \left(q_L^{(i)} - q_H^{(i)} \right) \right\} \cdot S$$

$$> (r+c)^2 + \frac{c^2}{\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(q_H^{(i)} - q_L^{(i)})^2}{q_H^{(i)}} + \frac{(p_H - p_L)^2}{p_H}} - r^2$$

6．保険契約者の期待効用関数をより一般的にした場合

ここでは、保険料精算D（＝保険会社の期待するマイナスの効用）と、それに対して保険契約者の期待する期待効用Xとの関係を、第３章で仮定した関係（$X=D^{1/2}$）から一般化した場合を分析する。

6．1．前提条件

① 保険契約者の努力水準は最もレベルの低いe_Lか、最もレベルの高いe_Hのいずれかのみとする
② $\phi(e_L)=0$、$\phi(e_H)\equiv c>0$
③ 留保効用$\equiv r>0$
④ $1>q_L>q_H>0$、$p_*\equiv 1-q_*$
⑤ 保険料精算Dに対する保険契約者の期待する効用XはX＝Φ（D）と表される。ここに、Φ（D）は以下の条件を満たす：
「X＝Φ（D）＞0は１回微分可能な単調増加関数、かつ上に凸」
（3．1．ではΦ＝√）

6．2．保険契約者の選択肢

保険契約者の選びうる選択肢は以下の３つである。
（ケース１）保険契約者が契約を受諾して努力水準e_Hを選ぶ
（ケース２）保険契約者が契約を受諾して努力水準e_Lを選ぶ
（ケース３）保険契約者が契約を拒否する（→保険会社の期待効用＝0）
以下、（ケース１）、（ケース２）について、第３章と同様の分析を行う

6．3．（ケース１）努力水準e_Hを選ぶとき

まず、6．1．の⑤から、Φには逆関数が存在するので、それをΨとおく。すなわち、「X＝Φ（D）」⟷「D＝Ψ（X）」である。Φが上に凸であることから、このΨは下に凸の単調増加関数であることが分かる。

このとき、保険会社の期待効用は

$$P-q_H\cdot S-\left(q_H\cdot\Psi(X_0)+p_H\cdot\Psi(X_1)\right)$$

よって、「保険会社の期待効用を最大化する（D₀，D₁）」

$$= \text{「}\min_{(X_0,X_1)}\left(q_H \cdot \Psi(X_0) + p_H \cdot \Psi(X_1)\right)\text{」}：(*)$$

である

また、制約条件は３．３．と同じである。すなわち、

$$q_H \cdot (X_0 - c) + p_H \cdot (X_1 - c) \geq q_L \cdot X_0 + p_L \cdot X_1 ：(\#1)$$

$$q_H \cdot (X_0 - c) + p_H \cdot (X_1 - c) \geq r ：(\#2)$$

以上にように一般化された制約条件（＃１）、（＃２）の下での最適化問題（＊）を解くために再び、Kuhn－Tucker 条件による方法を用いる。
すなわち、最適解は以下の式を満たす：
『$\lambda_1 \geqq 0$ および $\lambda_2 \geqq 0$ が存在して、

$$q_H \cdot \Psi'(X_0) - \lambda_1 \cdot q_H - \lambda_2 \cdot (q_H - q_L) = 0 ：(※1)$$

$$p_H \cdot \Psi'(X_1) - \lambda_1 \cdot p_H - \lambda_2 \cdot (p_H - p_L) = 0 ：(※2)$$

$$\lambda_2 \cdot \{(q_H - q_L) \cdot X_0 + (p_H - p_L) \cdot X_1 - c\} = 0 ：(※3)$$

$$\lambda_1 \cdot (q_H \cdot X_0 + p_H \cdot X_1 - r - c) = 0 ：(※4)』$$

ここで、∂Ψ／∂Ｘを単にΨ’と書くこととする。

これを、５．３．と同様に λ_1、λ_2 が０であるか否かで場合分けして考えてみると、Ψが下に凸であることから、結局 λ_1、λ_2 はいずれも０でないことが分かる（詳細は●Ａｐｐｅｎｄｉｘ６．３．参照）。

以上より、最適解は次を満たすことになる

$$(q_H - q_L) \cdot X_0 + (p_H - p_L) \cdot X_1 - c = 0 ：(※3)'$$

$$q_H \cdot X_0 + p_H \cdot X_1 - r - c = 0 ：(※4)'$$

（※１）、（※２）、（※３）’、（※４）’を解くと、

$$X_0=r-\frac{p_L}{q_L-q_H}\cdot c\text{、}X_1=r+\frac{q_L}{q_L-q_H}\cdot c$$

$$X_1-X_0=\frac{c}{q_L-q_H}$$

このとき、

$$q_H\cdot\Psi(X_0)+p_H\cdot\Psi(X_1)$$

$$=q_H\cdot\Psi\left(r-\frac{p_L}{q_L-q_H}\cdot c\right)+p_H\cdot\Psi\left(r+\frac{q_L}{q_L-q_H}\cdot c\right)$$

６．４．（ケース２）努力水準e_Lを選ぶとき

「保険会社の期待効用を最大化する（D_0, D_1）」

＝「$\min_{(X_0,X_1)}\left(q_L\cdot\Psi(X_0)+p_L\cdot\Psi(X_1)\right)$」：（＊）

である。

また、制約条件は３．４．と同じである。

$$q_L\cdot X_0+p_L\cdot X_1\geq q_H\cdot(X_0-c)+p_H\cdot(X_1-c)\text{：（＃１）}$$

$$q_L\cdot X_0+p_L\cdot X_1\geq r\text{：（＃２）}$$

５．４．と同様に、Kuhn－Tucker 条件による方法を用いて制約条件（＃１）、（＃２）の下での最適化問題（＊）を解くと（詳細は●Ａｐｐｅｎｄｉｘ６．４．参照）、最適解は$X_0=X_1=r$で、このとき最小値はΨ（ｒ）

６．５．分析結果

以上より、各ケースでの保険会社の期待効用をまとめると次表のとおり：

コストと期待効用	ケース１ （受諾してe_H）	ケース２ （受諾してe_L）
保険金・給付金額の期待値	$q_H \cdot S$	$q_L \cdot S$
保険料精算の期待値	$q_H \cdot \Psi\left(r - \frac{p_L}{q_L - q_H} \cdot c\right)$ $+ p_H \cdot \Psi\left(r + \frac{q_L}{q_L - q_H} \cdot c\right)$	$\Psi(r)$
保険会社の期待効用	$P - q_H \cdot S$ $-q_H \cdot \Psi\left(r - \frac{p_L}{q_L - q_H} \cdot c\right)$ $- p_H \cdot \Psi\left(r + \frac{q_L}{q_L - q_H} \cdot c\right)$	$P - q_L \cdot S - \Psi(r)$

「保険会社の期待効用」について、（ケース１）＞（ケース２）となる条件を算式で表してみると、

$$S > \frac{q_H\left(\Psi\left(r - \frac{p_L}{q_L - q_H} \cdot c\right) - \Psi(r)\right)}{(q_L - q_H)} + \frac{p_H\left(\Psi\left(r + \frac{q_L}{q_L - q_H} \cdot c\right) - \Psi(r)\right)}{(q_L - q_H)}$$

：（＊＊）

まず、Ψを固定して考えれば、（＊＊）が成り立つためには、

$\dfrac{p_L}{q_L - q_H}\cdot c$ 、$\dfrac{q_L}{q_L - q_H}\cdot c$ がいずれも小、すなわち $\dfrac{c}{q_L - q_H}$ が小である必要がある。

これは言葉で表せば、３．６．における結論と同じく

「保険契約者が少ないコスト負担をすることで、保険事故発生率の大きな改善が見込まれる」

ということである。

次に、$\dfrac{c}{q_L - q_H}$ の方を固定して考えると、（＊＊）が成り立つためには、Ψのグラフができるだけ水平に近い（つまり傾きが小さい）ことが必要である。これはΨの逆関数であるΦ（D）＝Xで言えば傾きが大きいということなので、言葉で表せば、

「保険会社が少ない保険料精算をすることで、保険契約者の期待効用の大きな増加が見込まれる」

ということである。

7．おわりに

以上、第３章で考察した簡単な設例から始まり、第４章から第６章で、ツリーの構造や期待効用関数を少しずつ複雑化した場合について、どのようなことが言えるかを考察してきた。最後に本稿で見てきたことをまとめれば、以下のようになろう。

① 保険契約者が「努力水準 e_L 以外を選ぶとき」には、「保険金・給付金の支払のなかった保険契約者に対しては、支払のあった保険契約者よりも保険料精算の額を大きくするという、実績配当に近い考え方により傾斜配分する体系を取ることで、保険会社の期待効用が最大化される」

② 保険契約者が「努力水準 e_L を選ぶとき」には、必ず最適解は $X_0 = X_1$（＝・・＝r）となる。これは、「保険金・給付金の支払いの有無にかかわらず、一律の保険料精算を行う平坦型の体系を取ることにより保険会社の期待効用が最大化される」こと意味する。現在の保険料精算体系は結果的に、「保険契約者は総じて保険事故を防止するような努力はしない、という仮定で保険会社の期待効用が最大化する」体系となっている。

③ 保険契約者が「努力水準 e_H を選ぶとき」に、保険会社の期待効用が最大になるのは、次のような場合である。

（ア）保険契約者が少ないコスト負担をすることで、保険事故発生率の大きな改善が見込まれる

（イ）保険会社が少ない保険料精算をすることで、保険契約者の期待効用の大きな増加が見込まれる

これを定量的に表すと、（第６章の場合では）次のとおり：

$$S > \frac{q_H\left(\Psi\left(r - \frac{p_L}{q_L - q_H}\cdot c\right) - \Psi(r)\right)}{(q_L - q_H)} + \frac{p_H\left(\Psi\left(r + \frac{q_L}{q_L - q_H}\cdot c\right) - \Psi(r)\right)}{(q_L - q_H)}$$

以上より、保険会社は販売商品について、上記③のような特性が認められ、また、当該商品については保険契約者が努力水準e_L以外に多いと考えるのならば、傾斜配分型の保険料精算体系を取ることも検討に値するのではないかと考える。

明治生命保険相互会社　収益管理部

【参考文献】

[1] 大倉　真人「複合リスクと最適付保率に関する一考察－Ｄｏｈｅｒｔｙ＝Ｓｃｈｌｅｓｉｎｇｅｒ［1983］モデルの拡張」

[2] 許　碩芬「モラル・ハザードとインセンティブ・システム—ゲーム理論による一考察—」、保険学雑誌、第548号

[3] 李　潤浩「保険詐欺と損害査定—ゲーム理論によるモデル分析—」、文研論集、第126号

● Appendix3．4．

$Y_0 \equiv q_L^{1/2} \cdot X_0$、$Y_1 \equiv p_L^{1/2} \cdot X_1$と変換すると、問題は次のようになる。

$$\min_{(Y_0,Y_1)}\left(Y_0^2+Y_1^2\right) : (*)$$

$$\left(q_H-q_L\right)\cdot q_L^{-1/2}\cdot Y_0+\left(q_L-q_H\right)\cdot p_L^{-1/2}\cdot Y_1 \geq -c : (\#1)$$

$$q_L^{1/2}\cdot Y_0+p_L^{1/2}\cdot Y_1 \geq r : (\#2)$$

ここで、注意が必要なのは３．３．の場合と異なり、（＃１）の領域は原点Ｏを含むということである。よって、（＊）の最小値は、原点Ｏと（＃２）の等号で表される直線との距離（の２乗）であり、そのときの最適解（Y_0, Y_1）を求めると、$Y_0 = q_L^{1/2} \cdot r$、$Y_1 \equiv p_L^{1/2} \cdot r$

● Appendix4．3．

$Y_0 \equiv q_H^{1/2} \cdot X_0$、$Y_1 \equiv p_H^{1/2} \cdot X_1$と変換すると、問題は次のようになる。

$$\min_{(Y_0,Y_1)}\left(Y_0^2+Y_1^2\right) : (*)$$

$$\left(q_H-q_N\right)\cdot q_H^{-1/2}\cdot Y_0+\left(q_N-q_H\right)\cdot p_H^{-1/2}\cdot Y_1 \geq c_H-c_N : (\#1)$$

$$\left(q_H-q_L\right)\cdot q_H^{-1/2}\cdot Y_0+\left(q_L-q_H\right)\cdot p_H^{-1/2}\cdot Y_1 \geq c_H : (\#2)$$

$$q_H^{1/2}\cdot Y_0+p_H^{1/2}\cdot Y_1 \geq r+c_H : (\#3)$$

これは、「（Y_0, Y_1）平面上（＃１）〜（＃３）で表される半平面（いずれも原点Ｏを含まない）の共通領域と原点Ｏとの距離（の２乗）を最小化する」ということに他ならない。ところで、（＃１）、（＃２）はいずれも平行な直線で仕切られた半平面であるが、実は（＃１）の方が（＃２）より原点Ｏから遠いことを示す。

（＃１）の等号で表される直線のＹ１切片＝$\dfrac{p_H^{1/2}\cdot(c_H-c_N)}{q_N-q_H}$

（＃２）の等号で表される直線のＹ１切片＝$\dfrac{p_H^{1/2}\cdot c_H}{q_L-q_H}$

このとき、

「（＃１）のＹ１切片－（＃２）のＹ１切片」

$$=p_H^{1/2}\left(\frac{c_H-c_N}{q_N-q_H}-\frac{c_H}{q_L-q_H}\right)>0$$ （∵ｃ＝ｃ（ｑ）は下に凸）

よって、（＊）を最小化させる（Ｙ０，Ｙ１）は、（＃１）～（＃３）の等号で表される２直線の交点であり、

$$\mathrm{Y}_0=q_H^{1/2}\cdot\left\{(r+c_H)-\frac{p_H}{q_N-q_H}\cdot(c_H-c_N)\right\}$$

$$\mathrm{Y}_1=p_H^{1/2}\cdot\left\{(r+c_H)+\frac{q_H}{q_N-q_H}\cdot(c_H-c_N)\right\}$$

● Ａｐｐｅｎｄｉｘ４．４．

$\mathrm{Y}_0\equiv q_N^{1/2}\cdot\mathrm{X}_0$、$\mathrm{Y}_1\equiv p_N^{1/2}\cdot\mathrm{X}_1$と変換すると、問題は次のようになる。

$$\min_{(Y_0,Y_1)}\left(Y_0^2+Y_1^2\right)\ :（＊）$$

$$(q_N-q_H)\cdot q_N^{-1/2}\cdot Y_0+(q_H-q_N)\cdot p_N^{-1/2}\cdot Y_1\geq c_N-c_H\ :（＃１）$$

$$(q_N-q_L)\cdot q_N^{-1/2}\cdot Y_0+(q_L-q_N)\cdot p_N^{-1/2}\cdot Y_1\geq c_N\ :（＃２）$$

$$q_N^{1/2}\cdot Y_0+p_N^{1/2}\cdot Y_1\geq r+c_N\ :（＃３）$$

ここで、注意が必要なのは４．３．の場合と異なり、（＃１）の領域は原

点Oを含むということである。このとき、（＃１）、（＃２）で表される領域の共通部分が空でないことは、４．３．でY_1切片の大小関係を示したのと同じ議論で示される。

最適化解（Y_0, Y_1）は、（＃２）、（＃３）の等号で表される２直線の交点であり、

$$Y_0 = q_N^{1/2} \cdot \left(r - \frac{p_L}{q_L - q_N} \cdot c_N \right)$$

$$Y_1 = p_N^{1/2} \cdot \left(r + \frac{p_L}{q_L - q_N} \cdot c_N \right)$$

このとき、$Y_0^2 + Y_1^2 = \left(r + c_N\right)^2 + \dfrac{q_N \cdot p_N \cdot c_N^2}{\left(q_L - q_N\right)^2}$

● Appendix４．５．

$Y_0 \equiv q_L{}^{1/2} \cdot X_0$、$Y_1 \equiv p_L{}^{1/2} \cdot X_1$と変換すると、問題は次のようになる。

$$\min_{(Y_0, Y_1)} \left(Y_0^2 + Y_1^2\right) : (*)$$

$$\left(q_L - q_H\right) \cdot q_L^{-1/2} \cdot Y_0 + \left(q_H - q_L\right) \cdot p_L^{-1/2} \cdot Y_1 \geq -c_H : (\#1)$$

$$\left(q_L - q_N\right) \cdot q_L^{-1/2} \cdot Y_0 + \left(q_N - q_L\right) \cdot p_L^{-1/2} \cdot Y_1 \geq -c_N : (\#2)$$

$$q_L^{1/2} \cdot Y_0 + p_L^{1/2} \cdot Y_1 \geq r : (\#3)$$

ここで、注意が必要なのは４．３．の場合と異なり、（＃１）の領域は原点Oを含むということである。このとき、（＃１）、（＃２）で表される領域の共通部分が空でないことは、４．３．でY_1切片の大小関係を示したのと同じ議論で示される。

よって、（＊）を最小化させる（Y_0, Y_1）は、

$Y_0 = q_L{}^{1/2} \cdot r$、$Y_1 = p_L{}^{1/2} \cdot r$。このとき、$Y_0^2 + Y_1^2 = r^2$

● Appendix 5. 3.

Kuhn－Tucker条件による方法とは次のものを指す。

「$x \in D \subset R^n$、$g_i(x) \leqq 0$ ($1 \leqq i \leqq m$) に対して、Lagrange乗数形式を次のように定義する：$f(x, \lambda) = \theta(x) + {}^t\lambda \cdot g(x)$。ここで、$g = (g)_{1 \leqq i \leqq m}$であり、$\lambda = (\lambda)_{1 \leqq i \leqq m}$はLagrange乗数。

また、Dはopenかつ凸、θ、g_iが1回微分可能かつ下に凸とする。このとき、

『$\bar{x} \in C \equiv D \cap \{x \mid g_i(x) \leqq 0\ (1 \leqq i \leqq m)\}$と$\bar{\lambda} \geqq 0$とが存在して、

① $\nabla\theta(\bar{x}) + {}^t\bar{\lambda} \cdot \nabla g(\bar{x}) = 0$

② ${}^t\bar{\lambda} \cdot g(\bar{x}) = 0$ 』

を満たすならば、この$\bar{x}$は$\min_{x \in C} \theta(x) = \theta(\bar{x})$、すなわち最適解である。」

例えば、5．3．では、

$D = \{x \in R^3 \mid x_0 > 0、x_1 > 0、x_2 > 0\}$

$\lambda = (\lambda_1、\lambda_2)$

$$\theta(x) = q_H \cdot x_0^2 + r_H \cdot x_1^2 + p_H \cdot x_2^2$$

$$g_1(x) = (q_L - q_H) \cdot x_0 + (r_L - r_H) \cdot x_1 + (p_L - p_H) \cdot x_2 + c$$

$$g_2(x) = -q_H \cdot x_0 - r_H \cdot x_1 - p_H \cdot x_2 + c + r$$

● Appendix 5. 4.

Kuhn－Tucker条件による方法を用いると、最適解は以下の式を満たす：

『$\lambda_1 \geqq 0$および$\lambda_2 \geqq 0$が存在して、

$$q_L \cdot 2X_0 - \lambda_1 \cdot q_L - \lambda_2 \cdot (q_L - q_H) = 0 \text{：（※1）}$$

$$r_L \cdot 2X_1 - \lambda_1 \cdot r_L - \lambda_2 \cdot (r_L - r_H) = 0 \text{：（※2）}$$

$$p_L \cdot 2X_2 - \lambda_1 \cdot p_L - \lambda_2 \cdot (p_L - p_H) = 0 \text{：（※3）}$$

$$\lambda_2 \cdot \{(q_L - q_H) \cdot X_0 + (r_L - r_H) \cdot X_1 + (p_L - p_H) \cdot X_2 + c\} = 0 \text{：（※4）}$$

$$\lambda_1 \cdot (q_L \cdot X_0 + r_L \cdot X_1 + p_L \cdot X_2 - r) = 0 : (※5)』$$

これを、λ₁、λ₂が0であるか否かで場合分けして考えてみることにする。

① $\lambda_1=0$ かつ $\lambda_2=0$ のとき
　このとき（※1）～（※3）より、$X_0=X_1=X_2=0$。よって①はあり得ない

② $\lambda_1=0$ かつ $\lambda_2\neq 0$ のとき
　このとき（※1）～（※3）より、$q_L \cdot X_0 + r_L \cdot X_1 + p_L \cdot X_2 = 0$、すなわち、$X_0=X_1=X_2=0$。よって②はあり得ない

③ $\lambda_1\neq 0$ かつ $\lambda_2=0$ のとき
　このとき（※1）～（※3）より、$X_0=X_1=X_2=\lambda_1/2$。さらに（※5）より、$X_0=X_1=X_2=r$。
　このとき、$q_L \cdot X_0^2 + r_L \cdot X_1^2 + p_L \cdot X_2^2 = r^2$

④ $\lambda_1\neq 0$ かつ $\lambda_2\neq 0$ のとき
このとき、最適解は次を満たすことになる

$$(q_L - q_H) \cdot X_0 + (r_L - r_H) \cdot X_1 + (p_L - p_H) \cdot X_2 + c = 0 : (※4)'$$

$$q_L \cdot X_0 + r_L \cdot X_1 + p_L \cdot X_2 - r = 0 : (※5)'$$

（※4）'、（※5）' を解くと、

$$X_0 = r - \frac{c\left(1 - \dfrac{q_H}{q_L}\right)}{\left\{\dfrac{(q_L - q_H)^2}{q_L} + \dfrac{(r_L - r_H)^2}{r_L} + \dfrac{(p_L - p_H)^2}{p_L}\right\}}、$$

$\lambda_1 \cdot (q_L \cdot X_0 + r_L \cdot X_1 + p_L \cdot X_2 - r) = 0$：(※5)』

これを、λ1、λ2が0であるか否かで場合分けして考えてみることにする。

① λ1＝0かつλ2＝0のとき
このとき（※1）～（※3）より、$X_0 = X_1 = X_2 = 0$。よって①はあり得ない

② λ1＝0かつλ2≠0のとき

このとき（※1）～（※3）より、$q_L \cdot X_0 + r_L \cdot X_1 + p_L \cdot X_2 = 0$、すなわち、$X_0 = X_1 = X_2 = 0$。よって②はあり得ない

③ λ1≠0かつλ2＝0のとき
このとき（※1）～（※3）より、$X_0 = X_1 = X_2 = \lambda_1 / 2$。さらに（※5）より、$X_0 = X_1 = X_2 = r$。

このとき、$q_L \cdot X_0^2 + r_L \cdot X_1^2 + p_L \cdot X_2^2 = r^2$

④ λ1≠0かつλ2≠0のとき
このとき、最適解は次を満たすことになる

$(q_L - q_H) \cdot X_0 + (r_L - r_H) \cdot X_1 + (p_L - p_H) \cdot X_2 + c = 0$：(※4)'

$q_L \cdot X_0 + r_L \cdot X_1 + p_L \cdot X_2 - r = 0$：(※5)'

(※4)'、(※5)' を解くと、

$$X_0 = r - \frac{c\left(1 - \dfrac{q_H}{q_L}\right)}{\left\{\dfrac{(q_L - q_H)^2}{q_L} + \dfrac{(r_L - r_H)^2}{r_L} + \dfrac{(p_L - p_H)^2}{p_L}\right\}}、$$

$$X_1 = r - \frac{c\left(1-\frac{r_H}{r_L}\right)}{\left\{\frac{(q_L-q_H)^2}{q_L}+\frac{(r_L-r_H)^2}{r_L}+\frac{(p_L-p_H)^2}{p_L}\right\}}、$$

$$X_2 = r - \frac{c\left(1-\frac{p_H}{p_L}\right)}{\left\{\frac{(q_L-q_H)^2}{q_L}+\frac{(r_L-r_H)^2}{r_L}+\frac{(p_L-p_H)^2}{p_L}\right\}}$$

このとき、$q_L \cdot X_0^2 + r_L \cdot X_1^2 + p_L \cdot X_2^2$

$$= r^2 + \frac{c^2}{\left\{\frac{(q_L-q_H)^2}{q_L}+\frac{(r_L-r_H)^2}{r_L}+\frac{(p_L-p_H)^2}{p_L}\right\}} > r^2$$

よって、最適解は$X_0=X_1=X_2=r$で、最小値はr^2となる。

● Appendix6．3．

① $\lambda_1=0$ かつ $\lambda_2=0$ のとき

このとき（※1）、（※2）より、$\Psi'(X_0)=\Psi'(X_1)=0$。一方、Ψは下に凸であることから$\Psi'(X_0)>0$、$\Psi'(X_1)>0$。これは矛盾。よって①はあり得ない

② $\lambda_1=0$ かつ $\lambda_2\neq 0$ のとき

このとき（※1）、（※2）より、$q_H \cdot \Psi'(X_0)+p_H \cdot \Psi'(X_1)=0$。また$\Psi'(X_0)>0$、$\Psi'(X_1)>0$。これは矛盾。よって②はあり得ない

③ $\lambda_1\neq 0$ かつ $\lambda_2=0$ のとき

このとき（※1）、（※2）より、$\Psi'(X_0)=\Psi'(X_1)=\lambda_1$。よって、$X_0=X_1$。このとき（※4）から$X_0=X_1=r+c$。これは、（＃1）に反する。よって③はあり得ない

● Appendix6．4．

再び、Kuhn－Tucker 条件により、最適解は以下の式を満たす：
『$\lambda_1 \geqq 0$ および $\lambda_2 \geqq 0$ が存在して、

$$q_L \cdot \Psi'(X_0) - \lambda_1 \cdot q_L - \lambda_2 \cdot (q_L - q_H) = 0 : (※1)$$

$$p_L \cdot \Psi'(X_1) - \lambda_1 \cdot p_L - \lambda_2 \cdot (p_L - p_H) = 0 : (※2)$$

$$\lambda_2 \cdot \{(q_L - q_H) \cdot X_0 + (p_L - p_H) \cdot X_1 + c\} = 0 : (※3)$$

$$\lambda_1 \cdot (q_L \cdot X_0 + p_L \cdot X_1 - r) = 0 : (※4)$$』

これを、λ_1、λ_2 が 0 であるか否かで場合分けしてみると、6．3．と同じく「$\lambda_1=0$ かつ $\lambda_2=0$」および「$\lambda_1=0$ かつ $\lambda_2 \neq 0$」はあり得ないことが分かる。

① $\lambda_1 \neq 0$ かつ $\lambda_2 = 0$ のとき

このとき（※1）、（※2）より、$\Psi'(X_0) = \Psi'(X_1) = \lambda_1$。よって、$X_0 = X_1$。（※4）より $X_0 = X_1 = r$。

このとき、$q_L \cdot \Psi(X_0) + p_L \cdot \Psi(X_1) = \Psi(r)$

② $\lambda_1 \neq 0$ かつ $\lambda_2 \neq 0$ のとき

$$(q_L - q_H) \cdot X_0 + (p_L - p_H) \cdot X_1 + c = 0 : (※3)'$$

$$q_L \cdot X_0 + p_L \cdot X_1 - r = 0 : (※4)'$$

（※3）'、（※4）' を解くと、

$$X_0 = r - \frac{p_L}{q_L - q_H} \cdot c \quad 、 X_1 = r + \frac{q_L}{q_L - q_H} \cdot c$$

$$X_1 - X_0 = \frac{c}{q_L - q_H}$$

このとき、

$$q_L \cdot \Psi(X_0) + p_L \cdot \Psi(X_1)$$

$$= q_L \cdot \Psi\left(r - \frac{p_L}{q_L - q_H} \cdot c\right) + p_L \cdot \Psi\left(r + \frac{q_L}{q_L - q_H} \cdot c\right)$$

ところで、①で得られた「$\Psi(r)$」と、②で得られた

「$q_L \cdot \Psi\left(r - \frac{p_L}{q_L - q_H} \cdot c\right) + p_L \cdot \Psi\left(r + \frac{q_L}{q_L - q_H} \cdot c\right)$」はどちらが最適解、すなわち最小値を実現しているのか比較すると、

$$q_L \cdot \Psi\left(r - \frac{p_L}{q_L - q_H} \cdot c\right) + p_L \cdot \Psi\left(r + \frac{q_L}{q_L - q_H} \cdot c\right)$$

$$\geqq \Psi\left(q_L \cdot \left(r - \frac{p_L}{q_L - q_H} \cdot c\right) + p_L \cdot \left(r + \frac{q_L}{q_L - q_H} \cdot c\right)\right) \quad (\because \Psi \text{は下に凸})$$

$$= \Psi\left((q_L + p_L) \cdot r + \left(-\frac{q_L \cdot p_L}{q_L - q_H} \cdot c + \frac{q_L \cdot p_L}{q_L - q_H} \cdot c\right)\right) = \Psi(r)$$

よって、最適解は$X_0 = X_1 = r$で、このとき最小値は$\Psi(r)$

A study of the method in macropricing in considering the morale hazard

Makoto Yasunaka

In this paper, I formularize the problem maximizing the expected utility of life insurance company avoiding a morale hazard as the optimizing problem with some conditions.

When I assume the expected utility functions of life insurance company and contractors, I demonstrate that the expected utility of life insurance company is bigger in the premium adjustment system in which the amount of the premium adjustment is graduated depending on their payment of insurance money and benefit than in that system in which the amount of the premium adjustment is decided independently of their experience.