

解約強度がステップ関数型の資産価格依存性を持つ場合の変額年金保険の最低保証に係る責任準備金評価式

塚本 昌也
第一生命保険株式会社

概要

特別勘定運用資産価格がある閾値を下回るときには解約が発生せず、閾値を上回るときに一定の解約強度で解約が発生するという仮定を置いた場合の、変額年金保険の最低保証に係る責任準備金の評価式を提案する。

この動的解約構造を仮定すると、最低保証に係る給付現価の評価式として、Linetsky (1999) により提案された step option の価格公式を適用できる。最低保証オプションを、Brown 運動がある閾値を上回る時間を意味する occupation time に依存してペイオフが減衰するオプションとみなすことで、その価格(給付現価)を1重の定積分を含む形の数式として表現できる。同様の考え方で、収入現価は2重の定積分を含む形の数式として表現できる。定積分は二重指数関数型数値積分公式等の数値積分法を用いて効率的に計算できる。

本論文では、Linetsky (1999) を参考に給付現価、収入現価を表す数式を導出するとともに、数値計算例を示す。数値計算例では、解約率を考慮しない標準的な評価手法と比べて、最低保証料率を上げなければ責任準備金の積立不足が発生する可能性が示唆された。これは、本論文で仮定する動的解約構造の下では、資産価格が高いとき、すなわち高い最低保証料収入と低い給付発生確率が見込まれる際に解約が発生しやすいことが原因であると考えられる。

キーワード: 変額年金保険, 最低保証, 責任準備金, 動的解約, step option, occupation time

1 はじめに

日本において、変額年金保険の最低保証に係る責任準備金評価の標準的方式は、確率論的フォーミュラー方式のリスク調整済期待値アプローチが取られている。具体的には、最低保証給付を、特別勘定運用資産価格を原資産としたプットオプションとみなし、Black-Scholes モデルに基づくプットオプション価格を給付現価、資産価格に比例して連続的に徴収する最低保証料の現在価値の期待値を収入現価とし、「給付現価－収入現価」を最低保証に係る責任準備金とする [1][2]。これらの給付現価、収入現価の評価式は解析解としての表現が可能で、モンテカルロ・シミュレーション等を要する手法と比べると実務的取り扱いが容易であると言える。

給付現価、収入現価の解析解表現を得るために、全件継続（死亡以外には契約の消滅がないこと）が計算の前提とされてきた。現実的には、最低保証に係る責任準備金相当額は、解約時に正であっても契約者に返還されず、また負であっても契約者から徴収されるものではないため、責任準備金相当額が正であるときの解約による解約益、または負であると

きの解約による解約損が発生し得る¹⁾。しかしながら、全件継続を前提とする責任準備金の解析解表現では、発生し得る解約損益を考慮することができない。これは、通常の（解約返戻金として責任準備金相当額を返戻する）保険商品の責任準備金評価において予定解約率が用いられないこととは事情が異なる。むしろ無解約返戻金型商品であるにも関わらず、予定解約率を常に0と設定してしまっている状態に近い。ただし、通常の変額年金保険でない）保険商品の責任準備金は保険期間中で常に正であることが多いが、変額年金保険の最低保証に係る責任準備金は資産価格に応じて正にも負にもなり得る²⁾ため、事態はより複雑である。予定解約率を常に0としていることが必ずしも保守的であるとは限らないため、計算負荷が許す限り、何らかの形で解約率を取り入れた精緻な責任準備金評価手法が望ましい。

規制上、責任準備金の評価において予定解約率の使用が禁止されているわけではないが、予定解約率を使用するにあたっては、資産価格によって解約率が変わり得る（動的な解約が発生する）ことを考慮する必要がある。資産価格が最低保証額を下回っている（最低保証オプションがインザマネーである）状態であるとき、満期を迎えるか死亡すると最低保証の効果が発動するが、解約するとその最低保証の権利を放棄することになる。従って、契約者が経済的合理性に基づいて行動するならば、資産価格が最低保証価格を下回っているときは解約は発生しにくいと考えられる。金融庁の「保険会社向けの総合的な監督指針」によると、予定解約率を使用する際には以下の要件が要請される。

- 特別勘定の残高が最低保証額を下回る状態にあるときの解約率が、特別勘定の残高が最低保証額を超える状態にあるときの解約率より低い率となっている。
- 解約控除期間における解約率が、解約控除期間終了後の解約率と比べ、低い率となっている。
- 最低年金原資保証が付された保険契約で、年金開始前における特別勘定の残高が最低保証額を下回る状態にある場合において解約率を保守的に設定している。
- 設定された予定解約率について、解約実績との比較などにより、検証を行うこととなっている。

1点目と3点目の要件を満たすためには動的解約モデルを想定することになるが、一般に解析解を得ることは困難とされてきた。結果として、解約率を考慮する際には、解析解による表現を実質的に諦める必要があった。有力な代替手法としてはモンテカルロ・シミュレーション等を用いることになると思われるが、計算負荷が大きくなるという課題がある。

動的解約を前提とした上での責任準備金の解析解表現が得られることが理想的であるが、そのような先行研究として井澤(2014)[3]による責任準備金評価式の提案が挙げられ、これについては後述する。他には、フォーミュラー方式の範疇で動的解約を取り入れようとする

る先行研究や実務は少ないようである。その一因としては、海外ではフォーミュラー方式ではなくシナリオテスト方式が取られることが多いことが考えられる。しかし、解約率が資産価格またはマネーネスに依存するという考え方自体は海外でも広く浸透している。例えばSun (2011) [4] では、マネーネスが解約率に影響を与える主要な変数であることを実績データから明らかにし、一例としてマネーネスの3次多項式を用いた解約率のモデル化を試みている。また米国の Principle Based Reserving 制度 [5] では、決定論的なシナリオテストとも言える Standard Scenario Method によるものと、CTE アプローチである Alternative Methodology によるもの大きい方を責任準備金とするが、Standard Scenario Method ではマネーネスの値によって区分が設けられ、インザマネーの度合いが大きい区分ほど小さい解約率が設定されている ([5] の p.21-28)。Alternative Methodology では、下記の解約率掛け目 λ を用いることで、解約率が資産価格 (Account Value) の増加関数 (解約率の上限・下限付き) になるように設定されている ([5] の p.21-37 および p.21-47)。

$$\lambda = \text{MIN} \left[U, \text{MAX} \left[L, 1 - M \times \left(\frac{GV}{AV} - D \right) \right] \right]$$

AV : 資産価格 (Account Value), GV : 最低保証額,
 U : 下限, L : 上限, M, D : 形状パラメータ

井澤 (2014) では、資産価格がある閾値に一致する瞬間に一定割合の解約が発生するという仮定の下で、閉じた形の解が理論的に導出された。責任準備金評価式の導出にあたって、Brown 運動がある閾値を横切る「回数」³⁾ を意味する、local time と呼ばれる確率過程の性質を用いている。最低保証オプションを、local time に応じてペイオフが指数関数的に減衰するオプションとみなし、Brown 運動と local time の同時分布が知られていることを活用し、給付現価、収入現価の評価式が得られている。

給付現価は、定積分等を含まない、初等関数のみからなる解析解が得られている。収入現価は、1重の定積分を含むため計算にあたっては数値積分が必要になるが、被積分関数は滑らかで性質の良いものであるため、定積分の計算コストと精度のバランスは実務に十分耐え得るものであると思われる。しかしながら、資産価格が特定の値に一致する瞬間にのみ解約が集中的に発生するというモデルはやや直感的解釈が難しいという課題もある。

図1に、この研究で仮定されていた解約構造を示す。左の図は、例としてある1パスの資産価格の推移と、それに応じた継続率の変化を示している。資産価格がある閾値 H に一致する瞬間に、継続率が不連続に減少する。右の図は、任意の時刻における解約強度を、同じ時刻の資産価格の関数として表したものである。厳密にはこの関数はデルタ関数を用いて表されるためグラフ化はできないが、近似的なイメージ図として描いている。右の図もまた、資産価格がある閾値 H に一致する瞬間に継続率が不連続に減少することを意味している。

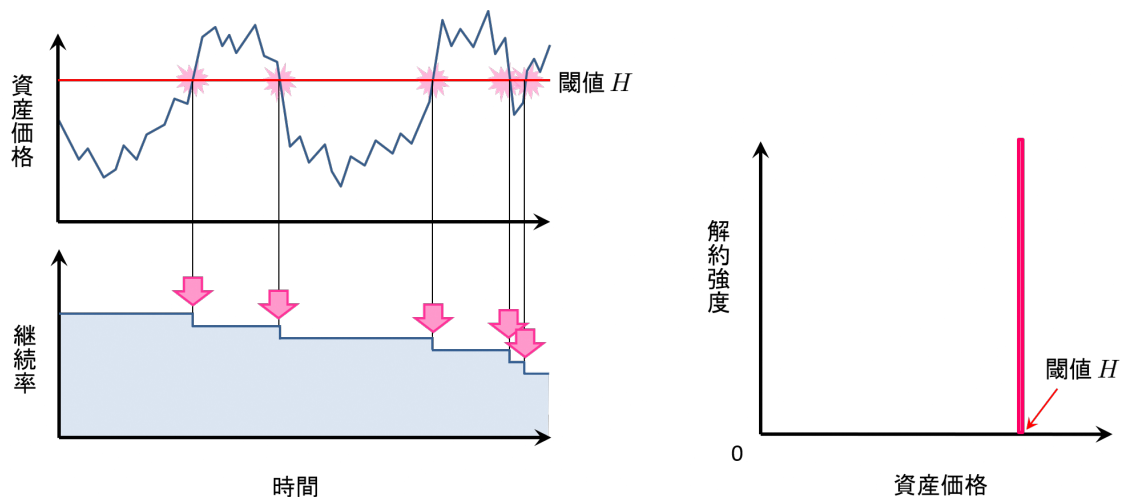


図 1: 井澤 (2014) における解約構造

なお、ここで解約強度とは、時刻 t における継続率を $P(t)$ としたとき、

$$\rho(t) = -\frac{1}{P(t)} \frac{dP(t)}{dt}$$

で定義される量である。もし解約が時刻や資産価格に依らず一様に発生する、すなわち $\rho(t) = \rho$ (定数) であると仮定すると、 $P(t) = e^{-\rho t}$ が成り立つ。さらに 1 年間の解約率を q^w と置くと、

$$q^w = 1 - P(1) = 1 - e^{-\rho} \Leftrightarrow \rho = \log\left(\frac{1}{1 - q^w}\right)$$

という関係が成り立つ。解約率が年間で解約される割合として定義されるのに対し、解約強度とは、連続的な時間の中である 1 点の時刻における瞬間的な解約の多さを表す指標である。死亡率で言うところの死力、利率で言うところの利力に相当する。資産価格は連続時間上で定義された量として変動するので、解約についても年間の解約率を考えるのではなく、連続時間上で定義される解約強度を考えるほうが取り扱いやすい。

直感的により受け入れやすく、かつシンプルな動的解約モデルとして、資産価格が最低保証額を下回るとき (インザマネーのとき) に解約が発生せず、資産価格が最低保証額を上回るとき (アウトオブザマネーのとき) に一定の割合で解約が発生する、という資産価格 (もしくはマネーネス) に応じて 2 つの領域に分けた動的解約構造を考えたい。

そこで本論文では、このようなモデルを包含するように、資産価格がある閾値を下回るときには解約が発生せず、閾値を上回るときには解約強度が一定値となるという動的解約モデルを仮定し、責任準備金の評価式を提案する。本論文で仮定する解約構造を図 2 に示す。このとき、解約強度は資産価格のステップ関数として表されることになる。

このような解約構造の下での変額年金保険の最低保証オプションは、Linetsky(1999)[6] により提案された step option のうち、up-and-out put 型の proportional step option と

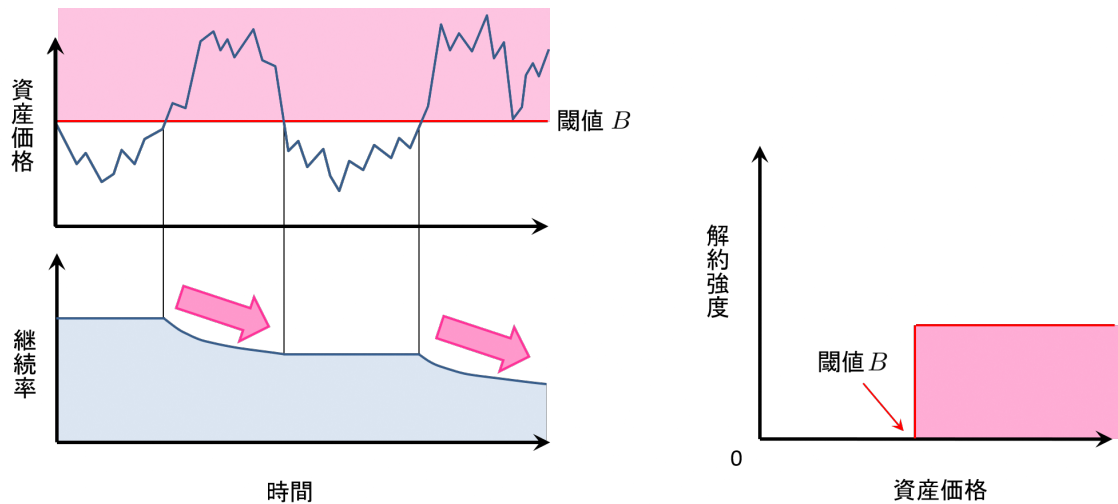


図 2: 本論文における解約構造

数学的な構造が一致する。最低保証に係る責任準備金のうち、給付現価部分については Linetsky(1999) より示された step option の価格公式を適用でき、収入現価部分についてもその延長で評価できるということが、本論文の主たる提案内容である。具体形は後の章で述べるが、最終的に給付現価については 1 重の定積分を含む数式表現、収入現価は 2 重の定積分を含む数式表現が得られる。

Linetsky(1999) は、ノックアウト型バリアオプションの拡張版という位置付けで step option という概念を提案している。バリアを超えるとオプション効果が消滅するという従来のノックアウト型バリアオプションは、原資産価格がバリアを超えるか超えないかの僅かな差によってオプション価値が急激かつ不連続に変化するため、オプションの売り手や買い手が自分に有利になるよう原資産価格を操作するインセンティブが生じるという課題がある。Linetsky(1999) はこの課題を軽減するものとして、原資産価格がバリアを超えている時間に応じて想定元本が連続的に減衰する step option を提案し、その価格公式を導出した。保険・年金分野への応用は元々意図されていなかったと思われるが、結果的に step option は、図 2 の動的解約構造の下での変額年金保険の最低保証オプションと、数学的な構造が同じものとなっている。

以下本論文では、第 2 章で、主たる結論として図 2 の動的解約構造の下での最低保証に係る責任準備金評価式を載せる。第 3 章では Linetsky(1999) に沿って給付現価部分の評価式の証明を行うが、ここでは主な流れのみを示し、長くなる部分は本論文後半の Appendix に記載する。第 4 章では収入現価部分の評価式の証明を行う。第 5 章では数値積分の実装を含め、評価式を用いた数値計算を行い、得られた責任準備金の値について考察する。第 6 章では本論文で提案する評価式の実務上の活用例を簡潔に紹介し、第 7 章でまとめを述べる。

2 最低保証に係る責任準備金評価式

本論文では、簡略化のため死亡率を考慮せず、変額年金保険の契約者は満期まで必ず生存するものとする。最終的な実務においては死亡率も考慮することになるが、生存・死亡は資産価格の変動と独立の事象であると考えられるため、拡張は難しくない。また、最低保証率以外の事業費率も0とする。

2.1 前提となる資産価格モデル

標準的手法および本論文の手法での前提となる、特別勘定資産価格の変動は以下の確率微分方程式で表される。

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - q) dt + \sigma dW_t$$

[記号]

S_t : 時刻 t における資産価格.

r : 無リスク金利.

q : 最低保証料率.

σ : 資産価格のボラティリティ.

W_t : Brown 運動.

2.2 標準的手法による評価式

解約を考慮しない標準的手法では、給付現価は Black-Scholes モデルに基づくプットオプション価格、収入現価は資産価格に比例して連続的に徴収する最低保証料の期待現在価値として表される [1][2].

$$\text{給付現価} = e^{-rT} KN(-d_-) - e^{-qT} SN(-d_+) \quad (2.1)$$

$$\text{収入現価} = \int_0^T q S e^{(r-q)t} e^{-rt} dt = S (1 - e^{-qT}) \quad (2.2)$$

$$\left(\text{ただし, } d_+ = \frac{\log(S/K) + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_- = d_+ - \sigma\sqrt{T} \right)$$

[記号]

S : 評価時点 (時刻 0) における資産価格.

K : オプションの権利行使価格 (変額年金保険の給付の最低保証額).

T : オプション満期 (変額年金保険の満期).

$N(x)$: 標準正規分布の累積分布関数.

2.3 本論文で提案する評価式

本論文では、時刻 t における解約強度 $\rho(t)$ を資産価格 S_t に関するステップ関数 $H(\cdot)$ を用いた形で仮定する。

$$\rho(t) = \rho H(S_t - B) = \begin{cases} \rho & (S_t \geq B) \\ 0 & (S_t < B) \end{cases}$$

この動的解約モデルの下で給付現価、収入現価は以下のように書ける。

$$\text{給付現価} = e^{-\gamma T - \nu x} (K \Psi_\rho(-\nu; -k, -x, T) - B \Psi_\rho(-(\nu + \sigma); -k, -x, T)) \quad (2.3)$$

$$\text{収入現価} = qB \int_0^T e^{-\gamma t - \nu x} \Psi_\rho(-(\nu + \sigma); -\infty, -x, t) dt \quad (2.4)$$

ここで関数 $\Psi_\rho(\nu; k, x, T)$ は、以下のように引数 k, x の値に応じた4つの領域に分けて定義される。

- Region I. $k \geq 0, x \geq 0$:

$$\begin{aligned} \Psi_\rho^I(\nu; k, x, T) &= e^{\nu x + \nu^2 T/2} N(d_1) - e^{-\nu x + \nu^2 T/2} N(d_3) \\ &\quad + e^{-\nu x} \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)}) e^{\nu^2 t/2}}{\sqrt{2\pi\rho(T-t)^{3/2}}} \left[\nu N(d_5) + t^{-1/2} N'(d_5) \right] dt \end{aligned} \quad (2.5)$$

- Region II. $k \geq 0, x \leq 0$:

$$\Psi_\rho^{II}(\nu; k, x, T) = \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)}) e^{\nu^2 t/2}}{\sqrt{2\pi\rho(T-t)^{3/2}}} \left[\nu C_1 N(d_7) + C_2 N'(d_7) \right] e^{-x^2/[2(T-t)]} dt \quad (2.6)$$

- Region III. $k \leq 0, x \geq 0$:

$$\Psi_\rho^{III}(\nu; k, x, T) = \Psi_\rho^I(\nu; 0, x, T) + e^{-\rho T} \left[\Psi_{-\rho}^{II}(-\nu; 0, -x, T) - \Psi_{-\rho}^{II}(-\nu; -k, -x, T) \right] \quad (2.7)$$

- Region IV. $k \leq 0, x \leq 0$:

$$\Psi_\rho^{IV}(\nu; k, x, T) = \Psi_\rho^{II}(\nu; 0, x, T) + e^{-\rho T} \left[\Psi_{-\rho}^I(-\nu; 0, -x, T) - \Psi_{-\rho}^I(-\nu; -k, -x, T) \right] \quad (2.8)$$

[記号]

B : 解約開始バリア。資産価格がこの水準以上のときに解約が発生。

ρ : 資産価格が解約開始バリア以上のときの解約強度。

$N'(x)$: 標準正規分布の確率密度関数。

$x = \frac{1}{\sigma} \log\left(\frac{S}{B}\right)$: 評価時点（時刻 0）における資産価格 S を対数変換したもの。

$k = \frac{1}{\sigma} \log\left(\frac{K}{B}\right)$: 給付の最低保証額 K を対数変換したもの。

$$\nu = \frac{1}{\sigma} \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right),$$

$$\gamma = r + \frac{\nu^2}{2},$$

$$d_1 = \frac{-k + x + \nu T}{\sqrt{T}}, \quad d_3 = \frac{-k - x + \nu T}{\sqrt{T}}, \quad d_5 = \frac{-k - x + \nu t}{\sqrt{t}}, \quad d_7 = \frac{-k + \nu t}{\sqrt{t}},$$

$$C_1 = 1 - \frac{x^2}{T - t} - \nu x, \quad C_2 = t^{-1/2} C_1 - t^{-3/2} x k$$

記号の多くは Linetsky(1999) に従っている。関数 $\Psi_\rho(\nu; k, x, T)$ を式 (2.3), 式 (2.4) で使用するにあたって, 引数の符号にマイナスが付いているものが多いので注意が必要である。また, 一部引数の記載を省略しているが, 式 (2.5), 式 (2.6) の被積分関数に含まれる d_5, d_7, C_1, C_2 が t の関数であることにも注意が必要である。

収入現価の式 (2.4) には関数 $\Psi_\rho(\nu; k, x, T)$ について $k = -\infty$ としたものが含まれている。関数 $\Psi_\rho(\nu; -\infty, x, t)$ は以下のように定義される。

- Region III. $x \geq 0$:

$$\Psi_\rho^{III}(\nu; -\infty, x, T) = \Psi_\rho^I(\nu; 0, x, T) + e^{-\rho T} \Psi_{-\rho}^{II}(-\nu; 0, -x, T) \quad (2.9)$$

- Region IV. $x \leq 0$:

$$\Psi_\rho^{IV}(\nu; -\infty, x, T) = \Psi_\rho^{II}(\nu; 0, x, T) + e^{-\rho T} \Psi_{-\rho}^I(-\nu; 0, -x, T) \quad (2.10)$$

式 (2.7), 式 (2.8), 式 (2.9), 式 (2.10) に含まれる $\Psi_\rho^{II}(\nu; 0, x, T)$ は, 単純に $k = 0$ を代入したものではなく,

$$\Psi_\rho^{II}(\nu; 0, x, T) = \lim_{k \rightarrow 0} \Psi_\rho^{II}(\nu; k, x, T)$$

により定義される。実際の計算にあたっては, 小さい値 ϵ_k (例えば 10^{-4}) を準備し, 関数 $\Psi_\rho^{II}(\nu; k, x, T)$ に $k = \epsilon_k$ を代入して計算を行う。

3 給付現価の評価式の証明

本論文で仮定する動的解約構造の下で、給付現価は Linetsky(1999) により提案された step option のうち、up-and-out put 型の proportional step option と数学的な構造が一致する。本章では、Linetsky(1999) の議論に沿い、給付現価の式 (2.3) の証明を述べる。Linetsky(1999) では数理ファイナンス分野の定理やテクニックが数多く用いられているが、本論文では提案式が実務的にも受け入れられることを目指し、極力行間を補う説明を添える。証明は大きく分けると以下のステップからなる。

- [3.1 節] 給付現価を、動的解約の影響を含む推移確率密度関数 K_ρ を用いた積分の形で書く。
- [3.2 節] K_ρ の Laplace 変換 G_ρ を導入し、 G_ρ が満たす常微分方程式を導出する。
- [3.3 節] 常微分方程式の解 G_ρ を得る。
- [3.4 節] Laplace 逆変換により K_ρ を得る。
- [3.5 節] K_ρ を用いて積分計算を行い、給付現価の数式表現を得る。

3.1 給付現価の積分表現の導出

本論文の動的解約構造の仮定の下で、満期 T における変額年金保険の最低保証オプションのペイオフ (給付) は以下のように書き表せる。

$$e^{-\rho\tau_B^+} \max(K - S_T, 0) \quad (3.1)$$

ここで τ_B^+ は、時刻 0 から T までの間に、資産価格 S_t が閾値 B を上回っている時間を表す。 $e^{-\rho\tau_B^+}$ の部分が継続率を表しており、資産価格 S_t が閾値 B を上回っている時間が長いほどより多くの解約が発生し、ペイオフを指数関数的に減衰させる。

τ_B^+ は以下の数式で表される。

$$\tau_B^+ = \int_0^T \mathbf{1}_{\{S_t \geq B\}} dt \quad (3.2)$$

資産価格 S_t は、2.1 節で述べた資産価格モデルの前提の下で、初期値が $W_0 = 0$ の Brown 運動 W_t を用いて

$$S_t = Se^{(r-q-\frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} = Se^{\sigma(\nu t + W_t)} \quad (3.3)$$

と書き表せることが知られている。しかし本論文ではこれ以降、Linetsky(1999) の記載に従い、初期値が $W_0 = x = \frac{1}{\sigma} \log\left(\frac{S}{B}\right)$ の Brown 運動 W_t を考えることとしたい。このとき

資産価格 S_t は、式 (3.3) の W_t を $W_t - x$ に置き換えることで、初期値が $W_0 = x$ の Brown 運動 W_t を用いて改めて以下のように書ける。

$$S_t = Se^{\sigma(\nu t + W_t - x)} = Be^{\sigma(\nu t + W_t)} \quad (3.4)$$

このとき、

$$S_t \geq B \Leftrightarrow Be^{\sigma(\nu t + W_t)} \geq B \Leftrightarrow \nu t + W_t \geq 0$$

が成り立つことにより、式 (3.2) の τ_B^+ は以下の式に書き換えられる。

$$\tau_B^+ = \int_0^T \mathbf{1}_{\{\nu t + W_t \geq 0\}} dt \quad (3.5)$$

この τ_B^+ のように、ある時刻 (ここでは T) までの間に Brown 運動が特定の領域 (ここでは $W_t \geq -\nu t$) に滞在する時間のことを指して一般に occupation time と呼ばれる。occupation time は Brown 運動より派生する確率過程の一種であり、その性質は Karatzas and Shreve (1991) [7] などで詳しく述べられている。occupation time の特殊な場合として、Brown 運動が正の領域、負の領域に滞在する時間を Γ_T^+ , Γ_T^- という記号で書き表す。

$$\Gamma_T^+ = \int_0^T \mathbf{1}_{\{W_t \geq 0\}} dt, \quad \Gamma_T^- = \int_0^T \mathbf{1}_{\{W_t < 0\}} dt$$

給付現価 (最低保証オプションの価格) は、式 (3.1) の割引現在価値についてリスク中立測度 \mathbb{Q} の下での期待値を取ることで、以下のように書ける。

$$P_\rho^+(S; T, K, B) = e^{-rT} E_x \left[e^{-\rho \tau_B^+} \max(K - S_T, 0) \right]$$

$E_x[\cdot]$ の右下添え字 x は、この期待値が初期値 $W_0 = x$ の Brown 運動 W_t に関して期待値を取っていることを表す。資産価格の動き S_t によって決まる継続率 $e^{-\rho \tau_B^+}$ についてもリスク中立測度 \mathbb{Q} の下で考える。実務家にとって解約・継続は実測度の下で考えるものという印象があるかもしれないが、松山 (2009)[8], 黒田・松山 (2010)[9] でも言及されているように、ここでは継続率も含めてリスク中立測度 \mathbb{Q} の下で期待値を取る必要がある。

ここから、次頁の通り変形を行う。

$P_\rho^+(S; T, K, B)$

$$= e^{-rT} \mathbb{E}_x \left[e^{-\rho \tau_B^+} (K - S_T) \mathbf{1}_{\{S_T \leq K\}} \right]$$

(max関数の代わりに指示関数を使用.)

$$= e^{-rT} \mathbb{E}_x \left[e^{-\rho \int_0^T \mathbf{1}_{\{\nu t + W_t \geq 0\}} dt} \left(K - B e^{\sigma(\nu T + W_T)} \right) \mathbf{1}_{\{\nu T + W_T \leq k\}} \right] \quad (3.6)$$

(式 (3.5) : $\tau_B^+ = \int_0^T \mathbf{1}_{\{\nu t + W_t \geq 0\}} dt$, 式 (3.4) : $S_t = B e^{\nu t + W_t}$, $k = \frac{1}{\sigma} \log \frac{K}{B}$ を用いて書き換え.)

$$= e^{-rT} \tilde{\mathbb{E}}_x \left[\left(e^{\nu(W_T - W_0) + \frac{1}{2}\nu^2 T} \right) e^{-\rho \int_0^T \mathbf{1}_{\{\tilde{W}_t \geq 0\}} dt} \left(K - B e^{\sigma \tilde{W}_T} \right) \mathbf{1}_{\{\tilde{W}_T \leq k\}} \right] \quad (3.7)$$

(Girsanov の定理を用いて, $\tilde{W}_t = \nu t + W_t$ を Brown 運動とする新たな測度 $\tilde{\mathbb{Q}}$ へ変換.

詳細は Appendix A 参照. 初期値は $\tilde{W}_0 = x$ で変わらない.)

$$= e^{-rT} \tilde{\mathbb{E}}_x \left[e^{\nu(\tilde{W}_T - \nu T - x) + \frac{1}{2}\nu^2 T} e^{-\rho \tilde{\Gamma}_T^+} \left(K - B e^{\sigma \tilde{W}_T} \right) \mathbf{1}_{\{\tilde{W}_T \leq k\}} \right]$$

($W_t = \tilde{W}_t - \nu t$, $W_0 = x$, および occupation time $\tilde{\Gamma}_T^+ = \int_0^T \mathbf{1}_{\{\tilde{W}_t \geq 0\}} dt$ を用いて書き換え.)

$$= e^{-\gamma T - \nu x} \tilde{\mathbb{E}}_x \left[\left(K e^{\nu \tilde{W}_T - \rho \tilde{\Gamma}_T^+} - B e^{(\nu + \sigma) \tilde{W}_T - \rho \tilde{\Gamma}_T^+} \right) \mathbf{1}_{\{\tilde{W}_T \leq k\}} \right]$$

($\gamma = r + \frac{\nu^2}{2}$ を用いて書き換え.)

$$= e^{-\gamma T - \nu x} \left(K \tilde{\mathbb{E}}_x \left[e^{\nu \tilde{W}_T - \rho \tilde{\Gamma}_T^+} \mathbf{1}_{\{\tilde{W}_T \leq k\}} \right] - B \tilde{\mathbb{E}}_x \left[e^{(\nu + \sigma) \tilde{W}_T - \rho \tilde{\Gamma}_T^+} \mathbf{1}_{\{\tilde{W}_T \leq k\}} \right] \right)$$

$$= e^{-\gamma T - \nu x} \left(K \tilde{\mathbb{E}}_x \left[e^{-\nu \widehat{W}_T - \rho \widehat{\Gamma}_T^-} \mathbf{1}_{\{\widehat{W}_T \geq -k\}} \right] - B \tilde{\mathbb{E}}_x \left[e^{-(\nu + \sigma) \widehat{W}_T - \rho \widehat{\Gamma}_T^-} \mathbf{1}_{\{\widehat{W}_T \geq -k\}} \right] \right)$$

(符号を反転させた新たな Brown 運動 $\widehat{W}_t = -\tilde{W}_t$ を導入.

付随して新たな occupation time $\widehat{\Gamma}_T^- = \int_0^T \mathbf{1}_{\{\widehat{W}_t \leq 0\}} dt$ を導入. このとき $\widehat{\Gamma}_T^- = \tilde{\Gamma}_T^+$ が成り立つ.)

$$= e^{-\gamma T - \nu x} \left(K \widehat{\mathbb{E}}_{-x} \left[e^{-\nu \widehat{W}_T - \rho \widehat{\Gamma}_T^-} \mathbf{1}_{\{\widehat{W}_T \geq -k\}} \right] - B \widehat{\mathbb{E}}_{-x} \left[e^{-(\nu + \sigma) \widehat{W}_T - \rho \widehat{\Gamma}_T^-} \mathbf{1}_{\{\widehat{W}_T \geq -k\}} \right] \right)$$

(測度 $\tilde{\mathbb{Q}}$ の下で \tilde{W}_t は初期値 $\tilde{W}_0 = x$ の Brown 運動であったが, \widehat{W}_t は初期値 $\widehat{W}_0 = -x$ の

Brown 運動である. 期待値記号の右下添え字と, 期待値を取る際に取り扱う Brown 運動の

初期値の整合性を取るため $\tilde{\mathbb{E}}_x[\cdot]$ を $\widehat{\mathbb{E}}_{-x}[\cdot]$ に書き換える.)

$$= e^{-\gamma T - \nu x} (K \Psi_\rho(-\nu; -k, -x, T) - B \Psi_\rho(-(\nu + \sigma); -k, -x, T))$$

ここで, 関数 $\Psi_\rho(\nu; k, x, T)$ は以下のように定義される.

$$\Psi_\rho(\nu; k, x, T) = \mathbb{E}_x \left[e^{\nu W_T - \rho \Gamma_T^-} \mathbf{1}_{\{W_T \geq k\}} \right]$$

ここから, 給付現価の導出は関数 $\Psi_\rho(\nu; k, x, T)$ をいかにして求めるかという問題に帰着される.

関数 $\Psi_\rho(\nu; k, x, T)$ は、初期値 $W_0 = x$ の Brown 運動の時刻 T での値 W_T と、その Brown 運動から派生する occupation time Γ_T^- の組 (W_T, Γ_T^-) に関する同時分布の下での期待値である。 $\Gamma_T^- = \int_0^T \mathbf{1}_{\{W_t \leq 0\}} dt$ という定義を踏まえると、 W_T と Γ_T^- は独立ではないことは直感的にも明らかであろう。 W_T 方向と Γ_T^- 方向の 2 次元を同時に考えることは難しいため、一旦 $W_T = z$ と固定した条件の下で Γ_T^- 方向の分布を考えるという発想に基づき、関数 $\Psi_\rho(\nu; k, x, T)$ を以下のように書き換える。

$$\begin{aligned}\Psi_\rho(\nu; k, x, T) &= \mathbb{E}_x \left[e^{\nu W_T - \rho \Gamma_T^-} \mathbf{1}_{\{W_T \geq k\}} \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}_x \left[e^{\nu W_T - \rho \Gamma_T^-} \mathbf{1}_{\{W_T \geq k\}} \delta(W_T - z) \right] dz \\ &= \int_k^{\infty} e^{\nu z} \mathbb{E}_x \left[e^{-\rho \Gamma_T^-} \delta(W_T - z) \right] dz \\ &= \int_k^{\infty} e^{\nu z} \mathbb{E}_x \left[e^{-\rho \Gamma_T^-}; W_T \in dz \right]\end{aligned}$$

$\mathbb{E}_x \left[e^{-\rho \Gamma_T^-}; W_T \in dz \right]$ という表記は、デルタ関数 $\delta(\cdot)$ を用いて $\mathbb{E}_x \left[e^{-\rho \Gamma_T^-}; W_T \in dz \right] = \mathbb{E}_x \left[e^{-\rho \Gamma_T^-} \delta(W_T - z) \right] dz$ により定義されるものと考えてよい⁴⁾。関数 $\mathcal{K}_\rho(z, x; T)$ を新たに定義する。

$$\mathcal{K}_\rho(z, x; T) = \frac{\mathbb{E}_x \left[e^{-\rho \Gamma_T^-}; W_T \in dz \right]}{dz} = \mathbb{E}_x \left[e^{-\rho \Gamma_T^-} \delta(W_T - z) \right]$$

この関数 $\mathcal{K}_\rho(z, x; T)$ は、

「初期値 x からスタートする Brown 運動が時間 T 後に z に到達する推移確率密度関数」
× 「初期値 x からスタートする Brown 運動が時間 T 後に z に到達するという条件の下での
“残存割合” $e^{-\rho \Gamma_T^-}$ の条件付き期待値」

と解釈できる。

この解釈は、 (W_T, Γ_T^-) の同時確率密度関数を $f_x(W_T, \Gamma_T^-)$ 、 W_T の周辺確率密度関数を $g_x(W_T)$ 、 $W_T = z$ という条件付きの Γ_T^- の確率密度関数を $h_x(\Gamma_T^- | W_T = z)$ と置いて、以下の式変形でも確認できる。

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x \left[e^{-\rho \Gamma_T^-} \delta(W_T - z) \right] &= \iint e^{-\rho \Gamma_T^-} \delta(W_T - z) f_x(W_T, \Gamma_T^-) dW_T d\Gamma_T^- \\ &= \int e^{-\rho \Gamma_T^-} f_x(z, \Gamma_T^-) d\Gamma_T^- \\ &= \int e^{-\rho \Gamma_T^-} g_x(z) \frac{f_x(z, \Gamma_T^-)}{g_x(z)} d\Gamma_T^- \\ &= g_x(z) \int e^{-\rho \Gamma_T^-} h_x(\Gamma_T^- | W_T = z) d\Gamma_T^- \\ &= g_x(z) \mathbb{E}_x \left[e^{-\rho \Gamma_T^-} | W_T = z \right]\end{aligned}$$

$\mathcal{K}_\rho(z, x; T)$ は Brown 運動の推移確率密度関数と性質が似ているが, Brown 運動が負の領域に滞在しているとき強度 ρ で “減衰” することにより Brown 運動の推移確率密度関数より小さい値を取る. 例えば $\mathcal{K}_\rho(z, x; T)$ を z について全領域で積分しても 1 に満たない値になる.

以上をまとめると, 現段階で給付現価は以下のように書ける.

$$\left\{ \begin{array}{l} P_\rho^+(S; T, K, B) = e^{-\gamma T - \nu x} (K \Psi_\rho(-\nu; -k, -x, T) - B \Psi_\rho(-(\nu + \sigma); -k, -x, T)) \\ \Psi_\rho(\nu; k, x, T) = \int_k^\infty e^{\nu z} \mathcal{K}_\rho(z, x; T) dz \\ \mathcal{K}_\rho(z, x; T) = \mathbf{E}_x \left[e^{-\rho \Gamma_T^-} \delta(W_T - z) \right] \end{array} \right. \quad (3.8)$$

$$(3.9)$$

$$(3.10)$$

3.2 $\mathcal{K}_\rho(z, x; T)$ の Laplace 変換 $G_\rho(z, x; s)$ が満たす常微分方程式の導出

式 (3.10) $\mathcal{K}_\rho(z, x; T) = \mathbb{E}_x \left[e^{-\rho \Gamma_T^-} \delta(W_T - z) \right]$ の Laplace 変換 $G_\rho(z, x; s)$ を導入する.

$$G_\rho(z, x; s) = \int_0^\infty e^{-sT} \mathcal{K}_\rho(z, x; T) dT = \int_0^\infty e^{-sT} \mathbb{E}_x \left[e^{-\rho \Gamma_T^-} \delta(W_T - z) \right] dT$$

Kac の公式より, $G_\rho(z, x; s)$ は以下の常微分方程式の解であり, かつ 2 階微分 $\frac{\partial^2 G_\rho}{\partial x^2}$ は区分的に連続であることが言える. 詳細は Appendix B を参照.

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 G_\rho}{\partial x^2} - [s + \rho H(-x)] G_\rho = -\delta(z - x) \quad (3.11)$$

ここで $H(\cdot)$ はステップ関数であり, 以下のように定義される.

$$H(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

また $G_\rho(z, x; s)$ は以下の境界条件を満たす.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} G_\rho(z, x; s) = 0 \quad (3.12)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} G_\rho(z, x; s) = 0 \quad (3.13)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} (G_\rho(z, \epsilon; s) - G_\rho(z, -\epsilon; s)) = 0 \quad (3.14)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \left(\frac{\partial G_\rho}{\partial x}(z, \epsilon; s) - \frac{\partial G_\rho}{\partial x}(z, -\epsilon; s) \right) = 0 \quad (3.15)$$

前節で解釈を述べた通り, $\mathcal{K}_\rho(z, x; T)$ は Brown 運動の推移確率密度関数より小さい値を取るものであるため, $\mathcal{K}_\rho(z, x; T)$ は $x \rightarrow \pm\infty$ で $e^{-\frac{1}{2}(z-x)^2}$ に比例する形で 0 に収束することより, 式 (3.12) と式 (3.13) が成り立つ. 式 (3.14) と式 (3.15) は, 元の関数と 1 階微分が $x = 0$ で連続であることを意味しており, 2 階微分 $\frac{\partial^2 G_\rho}{\partial x^2}$ が区分的に連続であることから課される.

常微分方程式 (3.11) の左辺第 2 項の係数が $x = 0$ で不連続に変化するが, $x > 0$ および $x < 0$ それぞれの領域では定数である. よって, $x > 0$ と $x < 0$ の場合でそれぞれ分けて考えると, 定数係数の 2 階非斉次常微分方程式という, 解法が知られた形になる.

3.3 $G_\rho(z, x; s)$ の常微分方程式の解

この常微分方程式 (3.11) および境界条件 (3.12-3.15) から得られる解は以下の通りになる。解の導出の詳細は Appendix C を参照。

- Region I. $x \geq 0, z \geq 0$:
$$G_\rho^I(z, x; s) = \frac{1}{\sqrt{2s}} \left(e^{-|z-x|\sqrt{2s}} - \mathcal{R}_\rho(s) e^{-(z+x)\sqrt{2s}} \right) \quad (3.16)$$

- Region II. $x \leq 0, z \geq 0$:
$$G_\rho^{II}(z, x; s) = \frac{1}{\sqrt{2s}} \mathcal{T}_\rho(s) e^{x\sqrt{2(s+\rho)} - z\sqrt{2s}} \quad (3.17)$$

- Region III. $x \geq 0, z \leq 0$:
$$G_\rho^{III}(z, x; s) = \frac{1}{\sqrt{2s}} \mathcal{T}_\rho(s) e^{z\sqrt{2(s+\rho)} - x\sqrt{2s}} \quad (3.18)$$

- Region IV. $x \leq 0, z \leq 0$:
$$G_\rho^{IV}(z, x; s) = \frac{1}{\sqrt{2(s+\rho)}} \left(e^{-|z-x|\sqrt{2(s+\rho)}} + \mathcal{R}_\rho(s) e^{(z+x)\sqrt{2(s+\rho)}} \right) \quad (3.19)$$

$$\mathcal{R}_\rho(s) = \frac{\sqrt{s+\rho} - \sqrt{s}}{\sqrt{s+\rho} + \sqrt{s}}, \quad \mathcal{T}_\rho(s) = 1 - \mathcal{R}_\rho(s) = \frac{2\sqrt{s}}{\sqrt{s+\rho} + \sqrt{s}}$$

3.4 Laplace 逆変換による $\mathcal{K}_\rho(z, x; T)$ の導出

前節で得られた $G_\rho(z, x; s)$ から, Laplace 逆変換を用いて $\mathcal{K}_\rho(z, x; T)$ を得る。導出の詳細は Appendix D を参照。

- Region I. $x \geq 0, z \geq 0, x+z > 0$:

$$\mathcal{K}_\rho^I(z, x; T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \left(e^{-(z-x)^2/2T} - e^{-(z+x)^2/2T} \right) + \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)})(z+x)}{2\pi\rho(T-t)^{3/2}t^{3/2}} e^{-(z+x)^2/2t} dt \quad (3.20)$$

- Region II. $x \leq 0, z > 0$:

$$\mathcal{K}_\rho^{II}(z, x; T) = \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)}) [z(1 - x^2/(T-t)) + x(1 - z^2/t)]}{2\pi\rho(T-t)^{3/2}t^{3/2}} e^{-z^2/2t - x^2/[2(T-t)]} dt \quad (3.21)$$

- Region III. $x \geq 0, z < 0$:

$$\mathcal{K}_\rho^{III}(z, x; T) = e^{-\rho T} \mathcal{K}_{-\rho}^{II}(-z, -x; T) \quad (3.22)$$

- Region IV. $x \leq 0, z \leq 0, z+x < 0$:

$$\mathcal{K}_\rho^{IV}(z, x; T) = e^{-\rho T} \mathcal{K}_{-\rho}^I(-z, -x; T) \quad (3.23)$$

- $z = x = 0$:

$$\mathcal{K}_\rho(0, 0; T) = \frac{1 - e^{-\rho T}}{\sqrt{2\pi\rho T^{3/2}}} \quad (3.24)$$

3.5 積分計算による $\Psi_\rho(\nu; k, x, T)$ の導出

式 (3.9) $\Psi_\rho(\nu; k, x, T) = \int_k^\infty e^{\nu z} \mathcal{K}_\rho(z, x; T) dz$ に前節で得た $\mathcal{K}_\rho(z, x; T)$ を代入して積分計算を行い、 $\Psi_\rho(\nu; k, x, T)$ の明示的な関数形を得る。積分計算は初等的であるが複雑であるので、詳細は Appendix E に示す。これらの式 (3.25-3.28) により、先に述べた式 (2.5-2.8) が示された。式 (2.3) の形は式 (3.8) で既に得られていたので、以上で給付現価の評価式が証明された。

- Region I. $k \geq 0, x \geq 0$:

$$\begin{aligned} \Psi_\rho^I(\nu; k, x, T) &= \int_k^\infty e^{\nu z} \mathcal{K}_\rho^I(z, x; T) dz \\ &= e^{\nu x + \nu^2 T/2} N(d_1) - e^{-\nu x + \nu^2 T/2} N(d_3) \\ &\quad + e^{-\nu x} \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)}) e^{\nu^2 t/2}}{\sqrt{2\pi\rho}(T-t)^{3/2}} \left[\nu N(d_5) + t^{-1/2} N'(d_5) \right] dt \end{aligned} \quad (3.25)$$

- Region II. $k \geq 0, x \leq 0$:

$$\begin{aligned} \Psi_\rho^{II}(\nu; k, x, T) &= \int_k^\infty e^{\nu z} \mathcal{K}_\rho^{II}(z, x; T) dz \\ &= \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)}) e^{\nu^2 t/2}}{\sqrt{2\pi\rho}(T-t)^{3/2}} \left[\nu C_1 N(d_7) + C_2 N'(d_7) \right] e^{-x^2/[2(T-t)]} dt \end{aligned} \quad (3.26)$$

- Region III. $k \leq 0, x \geq 0$:

$$\begin{aligned} \Psi_\rho^{III}(\nu; k, x, T) &= \int_0^\infty e^{\nu z} \mathcal{K}_\rho^I(z, x; T) dz + \int_k^0 e^{\nu z} \mathcal{K}_\rho^{III}(z, x; T) dz \\ &= \Psi_\rho^I(\nu; 0, x, T) + e^{-\rho T} \left[\Psi_{-\rho}^{II}(-\nu; 0, -x, T) - \Psi_{-\rho}^{II}(-\nu; -k, -x, T) \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

- Region IV. $k \leq 0, x \leq 0$:

$$\begin{aligned} \Psi_\rho^{IV}(\nu; k, x, T) &= \int_0^\infty e^{\nu z} \mathcal{K}_\rho^{II}(z, x; T) dz + \int_k^0 e^{\nu z} \mathcal{K}_\rho^{IV}(z, x; T) dz \\ &= \Psi_\rho^{II}(\nu; 0, x, T) + e^{-\rho T} \left[\Psi_{-\rho}^I(-\nu; 0, -x, T) - \Psi_{-\rho}^I(-\nu; -k, -x, T) \right] \end{aligned} \quad (3.28)$$

4 収入現価の評価式の証明

本章では，収入現価の評価式 (2.4) を証明する．収入現価の評価式は，基本的考え方は標準的手法と変わらず，資産価格に比例して連続的に徴収する最低保証料の現在価値として表される．将来時刻までの解約を考慮した継続率 ($e^{-\rho\tau_B^+(t)}$) が現れることが標準的手法との違いである．

$$\begin{aligned} \text{収入現価} &= q \int_0^T e^{-rt} \mathbf{E}_x \left[e^{-\rho\tau_B^+(t)} S_t \right] dt \\ \tau_B^+(t) &= \int_0^t \mathbf{1}_{\{\nu u + W_u \geq 0\}} du \end{aligned}$$

この被積分関数は，前章の式 (3.8) に至る変形と同様に，以下のように変形できる．

$$\begin{aligned} & e^{-rt} \mathbf{E}_x \left[e^{-\rho\tau_B^+(t)} S_t \right] \\ &= e^{-rt} \mathbf{E}_x \left[e^{-\rho \int_0^t \mathbf{1}_{\{\nu u + W_u \geq 0\}} du} B e^{\sigma(\nu t + W_t)} \right] \\ & \quad (\tau_B^+(t) = \int_0^t \mathbf{1}_{\{S_u \geq B\}} du, \quad S_t = B e^{\nu t + W_t} \text{を用いて書き換え.}) \\ &= e^{-rt} \tilde{\mathbf{E}}_x \left[\left(e^{\nu(W_t - W_0) + \frac{1}{2}\nu^2 t} \right) e^{-\rho \int_0^t \mathbf{1}_{\{\tilde{W}_u \geq 0\}} du} B e^{\sigma \tilde{W}_t} \right] \\ & \quad (\text{前章と同様に, Girsanov の定理を用いて, } \tilde{W}_t = \nu t + W_t \text{を Brown 運動とする新たな測度 } \tilde{\mathbb{Q}} \text{へ変換.}) \\ &= e^{-rt} \tilde{\mathbf{E}}_x \left[e^{\nu(\tilde{W}_t - \nu t - x) + \frac{1}{2}\nu^2 t} e^{-\rho \tilde{\Gamma}_t^+} B e^{\sigma \tilde{W}_t} \right] \\ & \quad (W_t = \tilde{W}_t - \nu t, \quad x = W_0, \quad \text{および occupation time } \tilde{\Gamma}_t^+ = \int_0^t \mathbf{1}_{\{\tilde{W}_u \geq 0\}} du \text{を用いて書き換え.}) \\ &= e^{-\gamma t - \nu x} \tilde{\mathbf{E}}_x \left[B e^{(\nu + \sigma)\tilde{W}_t - \rho \tilde{\Gamma}_t^+} \right] \\ & \quad (\gamma = r + \frac{\nu^2}{2} \text{を用いて書き換え.}) \\ &= e^{-\gamma t - \nu x} B \tilde{\mathbf{E}}_x \left[e^{-(\nu + \sigma)\tilde{W}_t - \rho \tilde{\Gamma}_t^-} \right] \\ & \quad (\text{符号を反転させた新たな Brown 運動 } \widehat{W}_t = -\tilde{W}_t \text{を導入.}) \\ & \quad \text{付随して新たな occupation time } \widehat{\Gamma}_t^- = \int_0^t \mathbf{1}_{\{\widehat{W}_u \leq 0\}} du \text{を導入. このとき } \widehat{\Gamma}_t^- = \tilde{\Gamma}_t^+ \text{が成り立つ.}) \\ &= e^{-\gamma t - \nu x} B \tilde{\mathbf{E}}_x \left[e^{-(\nu + \sigma)\widehat{W}_t - \rho \widehat{\Gamma}_t^-} \mathbf{1}_{\{\widehat{W}_t \geq -\infty\}} \right] \quad (\mathbf{1}_{\{\widehat{W}_t \geq -\infty\}} = 1) \\ &= B e^{-\gamma t - \nu x} \Psi_\rho(-(\nu + \sigma); -\infty, -x, t) \end{aligned}$$

以上より式 (2.4) が示された．

なお，関数 $\Psi_\rho(-(\nu + \sigma); -\infty, -x, t)$ の評価を行う際に必要な式 (2.9) の証明は Appendix E の E.3 節，式 (2.10) の証明は E.4 節で述べる．

5 数値計算例

本章では給付現価の評価式 (2.3), 収入現価の評価式 (2.4) を用いた数値計算例を載せる. 計算にあたって数値積分が必要になるが, 数値積分に関する技術的な詳細は Appendix F に記載する. 計算に用いたソースコードは https://github.com/masayats/step_lapse_variable_annuity に公開する.

5.1 解約開始バリアに応じた給付現価と収入現価 (最低保証料率 q を固定)

本節では給付現価 (2.3), 収入現価 (2.4) の解約開始バリア B に関する依存性を調べる. まず最低保証料率 q を, 解約を考慮しない場合に給付現価と収入現価が等しくなる (収支相等する) 水準で固定する. この q の水準は, 下記の計算前提の値 (B, q, ρ 以外) を用いて, 標準的手法による給付現価の評価式 (2.1) と収入現価の評価式 (2.2) が等しくなるように逆算する形で求められ, $q \approx 0.0033575088$ となる. このときの, 解約を考慮しない場合の給付現価 = 収入現価の値はおよそ 3.3017700 となる.

この最低保証料率を固定したまま動的解約構造を仮定し, 解約開始バリア B を 70 から 130 まで変化させた場合の給付現価と収入現価を図 3 に示す. 同様に, 責任準備金 (給付現価 - 収入現価) を図 4 に示す.

計算前提は以下の通りである.

$B = 70 \sim 130$: 解約開始バリア. 資産価格がこの水準以上のときに解約が発生.

$S = 100$: 評価時点 (時刻 0) における資産価格.

$T = 10$: オプション満期 (変額年金保険の満期).

$K = 100$: オプションの権利行使価格 (変額年金保険の給付の最低保証額).

$r = 0.01$: 無リスク金利.

$q \approx 0.0033575088$: 最低保証料率.

$\sigma = 0.05$: 資産価格のボラティリティ.

$\rho = -\log(0.9) \approx 0.10536052$: 資産価格が解約開始バリアを上回っているときの解約強度.

まず図 3 より以下の 2 点が簡単に確認でき, これらは直感に合うものと考えられる.

- 解約開始バリアが十分高い水準にあるとき, 解約がほぼ起こらなくなるため, 給付現価と収入現価は解約を考慮しない水準 (3.3017700) に近づく.
- 解約開始バリアが十分低い水準にあるとき, 解約強度 ρ がほぼ常に有効になるため, 給付現価は解約を考慮しない水準の $e^{-\rho T}$ 倍に近づく.

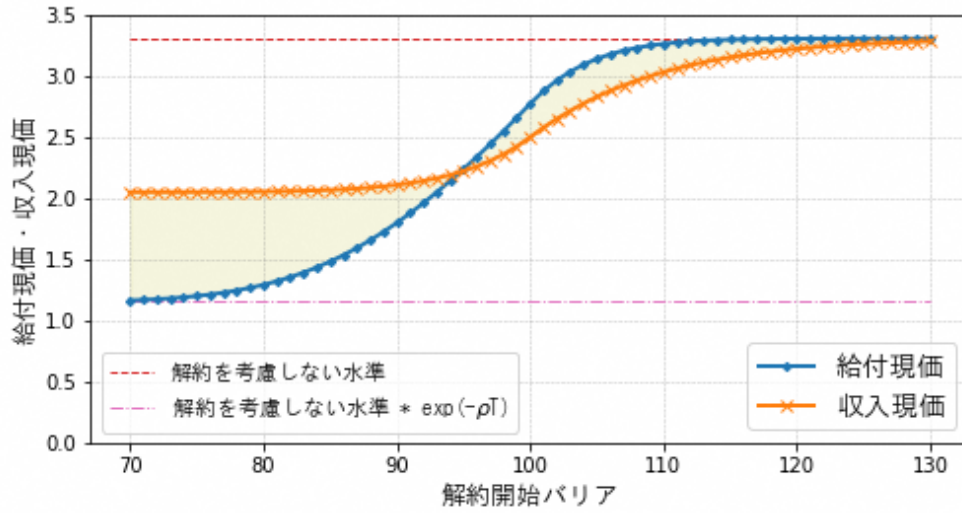


図 3: 解約開始バリアに応じた給付現価と収入現価 (最低保証料率 q を固定)

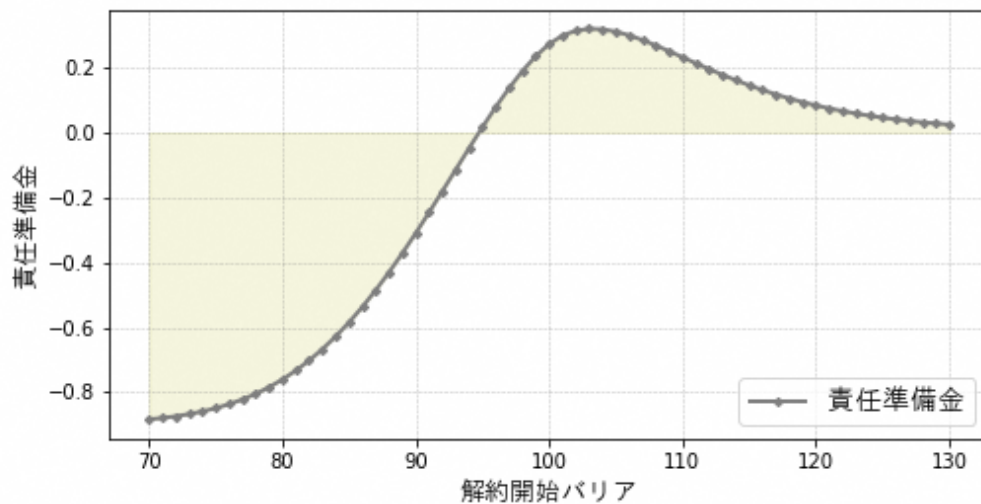


図 4: 解約開始バリアに応じた責任準備金 (最低保証料率 q を固定)

さらに図3によると、給付現価、収入現価ともに解約を考慮しない水準(3.3017700)より常に小さくなるが、解約開始バリアがおよそ95以上のときは収入現価のほうが減少幅が大きく、およそ95未満のときは給付現価のほうが減少幅が大きい。結果として図4の責任準備金は、解約開始バリアがおよそ95以上のときはプラス、およそ95以上のときはマイナスとなる。

つまり解約開始バリアがおよそ95以上の動的解約を考慮すると、解約を考慮しなかった際には認識されなかったプラスの責任準備金が発生する。これは、本論文で用いたステップ関数上の解約強度モデルを真の動的解約構造とみなした場合、解約を考慮しない従来の責任準備金評価手法では積立不足があったことを示唆している。実務的には、解約開始バリアを資産価格初期値と同じ $B = 100$ と設定することが合理的であると思われるが、 $B = 100$ のケースを含め解約開始バリアがある程度以上の動的解約を考慮したときに責任準備金の積立不足が認識されるということは、責任準備金の保守的な評価を目指す立場にとって重要な事実であろう。積立不足が生じることの理由は、定性的には以下のように説明できると考えられる。

- 本論文で仮定する非対称な動的解約構造の下では、資産価格が高い状態のときのみ解約が発生する。
- 資産価格が高い状態とは、その時点から将来にかけて高い最低保証料収入が見込まれ、かつ将来に最低保証給付が発生する可能性が低い状態である。
- このような状態で解約が発生することは、見込まれていた利益を失うことになり、保険会社にとって不利に働く。

逆に、解約開始バリアをおよそ95未満とする動的解約を考慮すると、責任準備金の評価額はより小さくなる。解約を考慮することが保守的に働くのか否かは、想定する解約開始バリア次第で逆転し、今回の計算前提ではおよそ $B = 95$ のところに転換点があることが分かる。解約開始バリアがある程度より小さいときに責任準備金の評価額が小さくて済む理由は、以下のように説明できると考えられる。

- 解約開始バリアがある程度より小さければ、資産価格の状態に関わらずほぼ常に解約が起きやすい。
- 最低保証料の収入は期間中に連続的に受け取るが、給付は満期時に発生するという時間のズレがある。解約が常に起きやすいのであれば「最低保証料の収入をある程度受け取った後、満期が来る前に解約され、給付が発生しない」ケースが増えることになり、これは保険会社にとって有利に働く。

5.2 解約開始バリアに応じた収支相等最低保証料率

前節では最低保証料率を固定して給付現価、収入現価、および責任準備金を算出したが、本節では商品開発上の視点に立ち、動的解約を前提とした上で給付現価と収入現価が等し

くなる (= 責任準備金が 0 になる = 収支相等する) ような最低保証料率を算出する。70 から 130 までのそれぞれの解約開始バリア B について、式 (2.3) と式 (2.4) が等しくなるように最低保証料率 q を逆算したものを図 5 に示す。

計算前提は以下の通りである。

$B = 70 \sim 130$: 解約開始バリア。資産価格がこの水準以上のときに解約が発生。

$S = 100$: 評価時点 (時刻 0) における資産価格。

$T = 10$: オプション満期 (変額年金保険の満期)。

$K = 100$: オプションの権利行使価格 (変額年金保険の給付の最低保証額)。

$r = 0.01$: 無リスク金利。

$\sigma = 0.05$: 資産価格のボラティリティ。

$\rho = -\log(0.9) \approx 0.10536052$: 資産価格が解約開始バリアを上回っているときの解約強度。

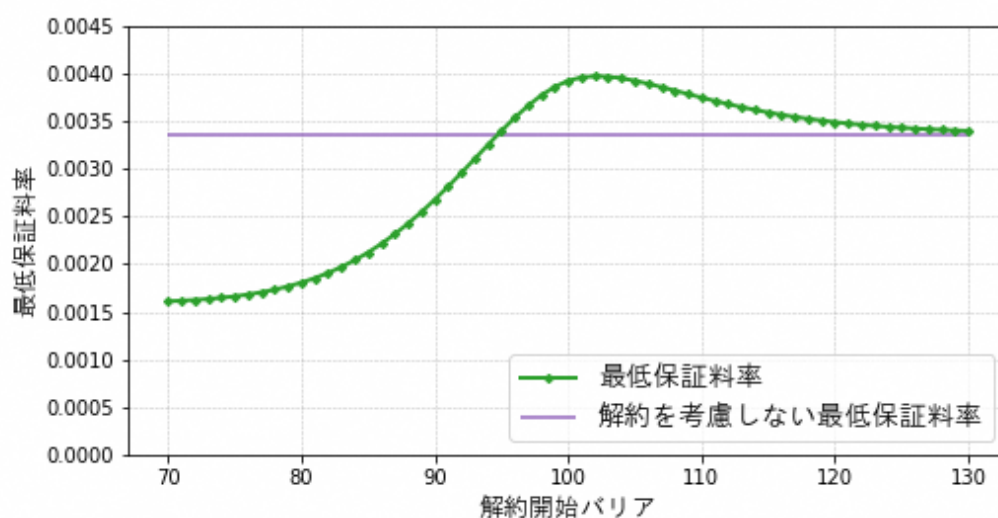


図 5: 解約開始バリアに応じた収支相等最低保証料率

図 4 のように生じた責任準備金の 0 からのズレを、再度 0 に戻すように最低保証料率を調整したものが図 5 であるため、図 5 の形状は図 4 と似たものになる。解約開始バリアがおおよそ 95 以上のとき、前節で示唆された責任準備金の積立不足を解消するため、図 5 の通り最低保証料率を上げる必要がある。逆に解約開始バリアがおおよそ 95 未満の動的解約を想定できるなら、最低保証料率を下げる可以降低。

5.3 解約率の水準に応じた収支相等最低保証料率

前節では、解約開始バリアの値次第で収支相等を達成するための最低保証料率がどのように変わるかを見たが、実務的には、解約開始バリアを資産価格初期値と同じ $B = 100$ と設定することが最も分かりやすく合理的であろう。本節では、 $B = 100$ と固定した上で、解約強度 ρ の水準次第で収支相等最低保証料率がどのように変わるかを調べる。前節の図5で既に見た通り、 $B = 100$ のとき最低保証料率は上昇する方向に動くことは分かっているが、その上昇の大きさが解約強度 ρ にどのように依存しているかを求め、結果を図6に示す。

計算前提は以下の通りである。

$B = 100$: 解約開始バリア。資産価格がこの水準以上のときに解約が発生。

$S = 100$: 評価時点（時刻 0）における資産価格。

$T = 10$: オプション満期（変額年金保険の満期）。

$K = 100$: オプションの権利行使価格（変額年金保険の給付の最低保証額）。

$r = 0.01$: 無リスク金利。

$\sigma = 0.05$: 資産価格のボラティリティ。

$\rho = 0 \sim -\log(0.85) \approx 0 \sim 0.16251893$: 資産価格が解約開始バリアを上回っているときの解約強度。この解約強度の範囲は、資産価格が解約開始バリアを上回っているときの年換算解約率が 0% ~ 15% である範囲に対応する。

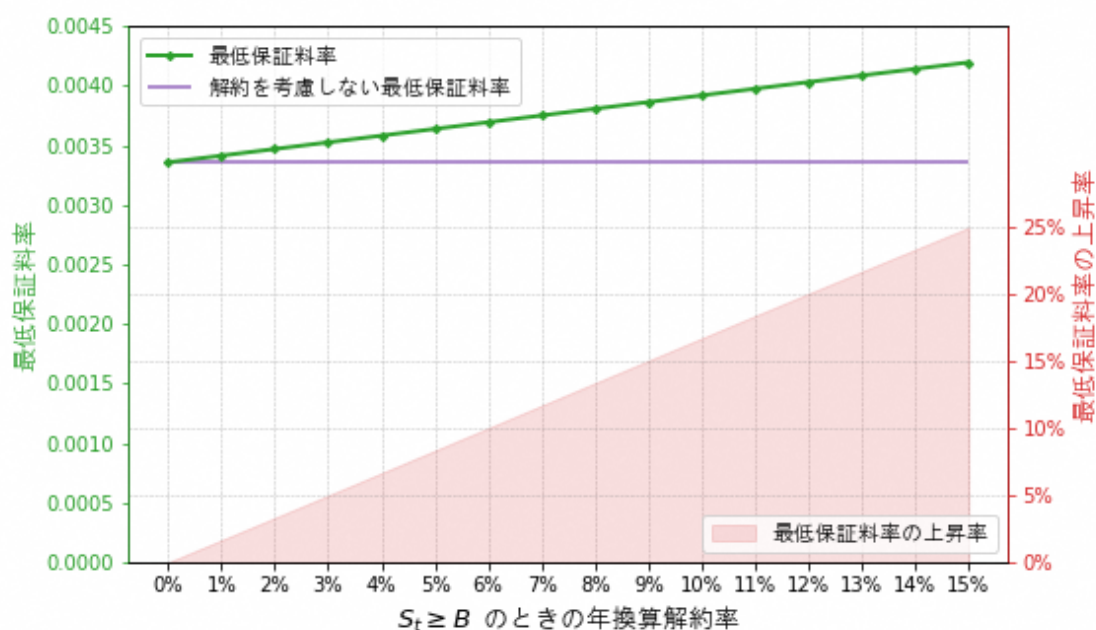


図 6: 解約率の水準に応じた収支相等最低保証料率の上昇 (解約開始バリア $B = 100$)

解約強度を高くするほど収支相等最低保証料率が上がることは直感的にも明らかであるが、図6より、その上がり方はほぼ直線的な形であることが分かった。その直線の傾きは、今回の計算前提では、資産価格が解約開始バリアを上回っているときの年換算解約率3%に対し、最低保証料率の上昇率はおおよそ5%という割合である。

6 実務上の活用例

本論文で提案する評価式の活用例として以下のものが考えられる。

6.1 最低保証料率の算出

本論文で仮定した動的解約構造が実態に近いと判断されるならば、商品開発時において、最低保証料率の算出のために本論文の責任準備金提案式を用いることが考えられる。5.2節、5.3節の計算例で行ったように、収支相等の原理に基づいて逆算する形で最低保証料率を算出することとなる(実際には5.2節、5.3節の考え方に加え、予定事業費率等も考慮する必要がある)。結果として、計算例で見られたように、動的解約を織り込むことで最低保証料率が高くなる方向に変化すると考えられるが、本論文で仮定した動的解約構造が実態に近いならば、そのような最低保証料率こそが収支相等のために必要な適正額ということになる。

6.2 経済価値ベースの責任準備金評価とヘッジ

内部管理等を目的に、経済価値ベースでの責任準備金評価に活用することも考えられる。その場合は、無リスク金利 r 、ボラティリティ σ は金融市場から取得することになる。ボラティリティとしては、特別勘定運用資産に類似する資産を原資産とするオプションのインプライドボラティリティを使用することが望ましいが、それが困難であればヒストリカルボラティリティ等で代用することになるだろう。

特にヘッジの精緻化に効果を発揮する可能性がある。一般に「リスク中立測度の下での割引現在価値の期待値」として表される責任準備金の経済価値は、市場が完備(最低保証ペイオフを複製可能)であるなどの理想的な条件の下で、将来の市場変動に対して動的ヘッジを行う際のヘッジポートフォリオの構築コストと一致する。逆に、現時点の経済価値相当額(および将来の最低保証料収入)を元手として適切に動的ヘッジを行えば、最低保証に係るリスクを理論上は消すことができる。しかし、責任準備金の評価において織り込んでいける解約構造と、実際に発生する解約構造が整合していなければ、ヘッジ誤差が生じる要因となる。

以降、原資産と無リスク資産の組み合わせでヘッジポートフォリオを構築することを前提とする。このとき、保有すべき原資産の単位量は責任準備金のデルタ(資産価格 S による偏微分)に一致し、このようなヘッジ戦略はデルタヘッジと呼ばれる。本論文の提案式を

用いると、責任準備金だけでなくデルタの数式表現も得られ、ヘッジに活用することができる。

もし本論文で仮定する動的解約が将来実現すれば、Black-Scholes 式に基づく従来の責任準備金評価式とデルタを用いていた場合、予期していなかった解約に伴うヘッジ誤差が発生する。一方、本論文で提案する責任準備金評価式に基づいたデルタを計算し、それに基づいてヘッジポートフォリオを構築していれば、ヘッジ誤差を減らすことができる。

このことを確認するため、将来10年間、時間刻み1/50年(1年を50個に分割)で、1000パス分の資産価格のモンテカルロ・シミュレーションを行い、デルタヘッジを行った際の10年後の累積ヘッジ誤差を試算した。責任準備金・デルタの評価および最低保証料率の前提として「A1.解約なし」または「A2.動的解約あり」の2パターン、将来シミュレーションの前提として「B1.解約なし」または「B2.動的解約あり」の2パターンと、合計4パターンの計算を行った。計算前提は基本的に5.1節で用いたものと同じであるが、次の点のみ異なる。解約開始バリアは $B = 100$ で固定、将来シミュレーションにおける資産価格の期待収益率は0.02(無リスク金利 $r = 0.01$ とは異なる)、最低保証料率はそれぞれの解約前提で収支相等する水準(責任準備金・デルタの評価および最低保証料率の前提として「A1.解約なし」の場合は $q \approx 0.0033575088$ 、「A2.動的解約あり」の場合は $q \approx 0.0039191124$)とした。試算の結果を図7に示す。

将来シミュレーションの前提		10年後累積ヘッジ誤差の平均値		10年後累積ヘッジ誤差の標準偏差	
		B1.解約なし	B2.動的解約あり	B1.解約なし	B2.動的解約あり
ヘッジ対象である責任準備金評価式と そのデルタ、および最低保証料率算出の前提	A1.解約なし	-0.044	-0.508	0.217	0.442
	A2.動的解約あり	0.608	-0.037	0.598	0.186

図7: 10年後累積ヘッジ誤差の1000パス中の平均値と標準偏差(初期資産価格100に対し)

将来解約が無ければ(B1.解約なし)、Black-Scholes 式に基づく従来の責任準備金評価式とデルタ、最低保証料率を用いても(A1.解約なし)、ヘッジ誤差の標準偏差は比較的小さくて済む(0.217)。しかし、もし動的解約が実現すれば(B2.動的解約あり)、そのままではヘッジ誤差の標準偏差は大きくなってしま(0.442)。そこで、責任準備金、デルタ、最低保証料率算出において動的解約を織り込んでおけば(A2.動的解約あり)、ヘッジ誤差の標準偏差を小さく抑えることができる(0.186)ことが確認できた。

6.3 会計上の責任準備金評価

本論文で仮定した動的解約構造が過去の実績等から合理的なものと判断され、かつ重要性、計算コスト等の観点も踏まえた上で有用と判断されるなら、会計上の責任準備金評価に用いることも考えられる。しかし、本論文で提案する評価式が認められるかどうかは、最終的には保険計理人の判断および当局の審査を仰ぐことになろう。第5章の計算例で見たとおり、解約開始バリア B の水準にもよるが基本的には責任準備金が増加する方向に動くため、保守性の原則には合致するものと思われる。

本論文で提案する評価式は積分を含む形での数式表現であり、数値積分を行う必要はあるものの、乱数を使用したモンテカルロ・シミュレーションは必要としない。従って、最低保証に係る責任準備金の評価方式の分類としては「代替的方式」ではなく「標準的方式」の範疇に収まるものと思料する。実際、平成16年12月27日に金融庁より公開された「「変額年金保険等の最低保証リスクに係る責任準備金等に関する告示及び事務ガイドライン」(案)に対するパブリックコメントの結果」[10]に付属する別紙2のp.2からp.3によると、数値積分は「標準的方式を前提として計算上工夫したもの」という考え方が示されている。

標準的方式であるか代替的方式であるかに関わらず、最低保証に係る責任準備金評価において予定解約率を使用すること自体は認められている。第1章で述べたように、「保険会社向けの総合的な監督指針」に予定解約率を使用するにあたっての留意点が示されている。本論文で提案する評価式は、解約率の特別勘定残高依存性に関する部分については、要件を満たしているものと考えられる。

責任準備金評価式の中で、予定解約率に直結するパラメータである ρ は過去の実績等から定めることになる。解約開始バリア B は、資産価格がどの水準付近から解約率が増加しているのかを参考に定めることになるが、おおよそ最低保証額 K に近い水準となるのではないと思われる。標準責任準備金制度との整合性を重視するならば、無リスク金利 r は $\log(1 + \text{標準利率})$ 、ボラティリティ σ は平成8年大蔵省告示第48号[11]に定められた値を用いることが素朴には考えられる。しかし一方で、リスク中立測度下の期待値に基づいた本論文の提案式は、動的解約の取り入れ方を含め、背景となる価格評価理論において、銀行預金のような短期の安全資産のリターンを意図して r を用いている。よって、 r として市場の短期無リスク金利を参照して用いることで、より理論の前提に合った保守的な評価ができるとも考えられる。

6.4 収益検証・ストレステスト

厳密な経済価値評価や法定会計上の評価とまでは行かなくとも、やや柔軟な形で、内部管理の一環として収益検証・ストレステスト等に用いることも考えられる。例えば、アウトオブザマネー時の解約率の大きな上振れを想定した場合、たとえ法定会計上の責任準備金には影響しなくとも、内部管理としてはどの程度の責任準備金の増加を認識しておくべきなのか、それによる損益はどれぐらいなのか、等を定量的に把握することに活用できる。

7 まとめ

本論文では、特別勘定運用資産価格がある閾値を下回る時には解約が発生せず、閾値を上回る時には解約強度が一定値となるという非対称な解約構造を仮定した場合の、最低保証に係る責任準備金の評価式を提案した。Linetsky (1999) により提案された step option の価格公式を適用することで、責任準備金の構成要素のうち、給付現価は1重の定積分、収入現価は2重の定積分を含む数式として表現できる。

定積分のうち、給付現価・収入現価の両方の式に現れる関数 $\Psi_\rho(\nu; k, x, T)$ の計算内部で必要な定積分は、通常の台形積分で精度の高い計算を行うことは難しいが、二重指数関数型数値積分公式を用いることで効率的に計算できる。収入現価の式において連続的な最低保証料収入を集約するために行う定積分(外側の定積分)では、被積分関数が滑らかであるため様々な数値積分法で精度の高い計算が可能である。よって、本論文で仮定したステップ関数型の動的解約モデルとそこから導かれる責任準備金評価式は、解約構造の合理性および直感的な分かりやすさがあるだけでなく、計算可能性にも優れたモデルであると考えられる。

一般には、動的解約を含んだ形での最低保証に係る責任準備金の評価は、解析的な取り扱いが困難であることにより、乱数を用いて将来の資産価格を生成するモンテカルロ・シミュレーションを用いた手法が取られることが多い。しかし、このようなシミュレーション法では、乱数シードに依存した数値の振れを極力抑え、高い精度を得るためには、シミュレーションのパス数を多く、またシミュレーションにおける時間刻みを細かく取る必要があり、計算コストが嵩む。

本論文で得た責任準備金の数式表現は、シミュレーション法と比較して計算時間と精度の面で優れていると考えられる。2重の数値積分を含んでいるため純粋な解析解ほど高速ではないが、二重指数関数型数値積分公式の効果により、一部の被積分関数が特異であるにも関わらず、被積分関数の呼び出し回数を極力抑えつつ非常に高い精度を出すことができる。

最低保証料率の算出を行う際には、収支相等の方程式を解くために反復的に責任準備金評価の関数を呼び出すことになるため、計算速度は重要である。更に、6.3節のようなヘッジの精度評価を行うためには、モンテカルロ・シミュレーションを実施した上で各パス・各時点において毎回デルタの評価を行う必要があるため、もし責任準備金およびデルタの評価法としてシミュレーション法を用いると、計算時間は実務的に不可能なほどに膨れ上がる(いわゆる *stochastic on stochastic* の状態)。このように、実務における様々な場面において、数式表現が可能であることに伴って計算が高速・高精度となることの利点は大きい。

第5章の数値計算例によると、ステップ関数型の動的解約モデルを真の解約構造とみなした場合、実務的な解約開始バリアの水準では、解約を考慮しない従来の責任準備金評価手法では積立不足があり、不足解消のためには最低保証料率を上げる必要がある可能性が示唆された。本モデルの下では、高い最低保証料収入が見込まれ、かつ将来の最低保証給付が発生する可能性が低い状態で解約が発生しやすく、保険会社にとって不利な構造であることが原因であると考えられる。

本論文の責任準備金評価式は、最低保証料率の算出、ヘッジや内部管理目的の評価、会計上の評価など様々な実務的活用法が考えられる。活用にあたっては、過去の解約実績等から解約強度と資産価格、最低保証額の関係性を精査し、適正な解約強度パラメータ ρ や解約開始バリア B を設定する必要があると思われる。

Appendices

A Girsanov の定理を用いた測度変換

本章では式 (3.6) から式 (3.7) への変形を示す．下記の Girsanov の定理を用いる．Girsanov の定理の詳細については，Shreve (2004) [12] の 5.2.1 節 Theorem 5.2.3 (p.212) などを参考にされたい．

Theorem A.I (Girsanov の定理) W_t を確率測度 \mathbb{P} の下での Brown 運動， $\Theta(t)$ を適合過程とする．以下の式で Z_t, \tilde{W}_t を定義する．

$$Z_t = \exp \left\{ - \int_0^t \Theta(u) dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \Theta^2(u) du \right\}$$

$$\tilde{W}_t = \int_0^t \Theta(u) du + W_t$$

更に $\mathbb{E} \left[\int_0^T \Theta^2(u) Z_u^2 du \right] < \infty$ を仮定する．ただし $\mathbb{E}[\cdot]$ とは確率測度 \mathbb{P} の下での期待値である．このとき，任意の確率変数 X について

$$\mathbb{E}[X] = \tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{X}{Z_t} \right]$$

($\tilde{\mathbb{E}}[\cdot]$ とは確率測度 $\tilde{\mathbb{P}}$ の下での期待値)

が成り立つような新たな確率測度 $\tilde{\mathbb{P}}$ の下で， \tilde{W}_t は Brown 運動となる．

この Girsanov の定理を

- $X \leftarrow e^{-\rho \int_0^T \mathbf{1}_{\{\nu t + W_t \geq 0\}} dt} (K - B e^{\sigma(\nu T + W_T)}) \mathbf{1}_{\{\nu T + W_T \leq k\}}$
- $\Theta(t) \leftarrow \nu$ (すなわち $Z_t = e^{-\nu(W_t - W_0) - \frac{1}{2}\nu^2 t}$)
- $\mathbb{P} \leftarrow \mathbb{Q}, \tilde{\mathbb{P}} \leftarrow \tilde{\mathbb{Q}}$

と代入して適用することで，下の式変形が正当化される．

$$e^{-rT} \mathbb{E}_x \left[e^{-\rho \int_0^T \mathbf{1}_{\{\nu t + W_t \geq 0\}} dt} (K - B e^{\sigma(\nu T + W_T)}) \mathbf{1}_{\{\nu T + W_T \leq k\}} \right] \quad (3.6)$$

$$= e^{-rT} \tilde{\mathbb{E}}_x \left[\left(e^{\nu(W_T - W_0) + \frac{1}{2}\nu^2 T} \right) e^{-\rho \int_0^T \mathbf{1}_{\{\tilde{W}_t \geq 0\}} dt} (K - B e^{\sigma \tilde{W}_T}) \mathbf{1}_{\{\tilde{W}_T \leq k\}} \right] \quad (3.7)$$

具体的には，式変形にあたって下の 3 つの操作を行っている．

- $\nu T + W_T$ を \tilde{W}_T に置き換える．
- $\mathbb{E}_x[\cdot]$ を $\tilde{\mathbb{E}}_x[\cdot]$ に置き換える．
- 期待値を取る確率変数に $\frac{1}{Z_T} = \left(e^{\nu(W_T - W_0) + \frac{1}{2}\nu^2 T} \right)$ を掛ける．

B Kac の公式を用いた常微分方程式の導出

本章では $G_\rho(z, x; s)$ の常微分方程式 (3.11) の導出と, 2 階微分 $\frac{\partial^2 G_\rho}{\partial x^2}$ は区分的に連続であることの証明を行う. 下記の Kac の公式を用いる. Kac の公式の詳細については, Karatzas and Shreve (1991) [7] の 4.4.B 節 4.9 Theorem (p.271)などを参考にされたい.

Theorem B.I (Kac の公式) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, k : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ は区分的に連続な関数であり, 以下の条件を満たすものとする.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+y)|e^{-|y|\sqrt{2\alpha}} dy < \infty; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

α は正の定数である. 以下の式で関数 $z(x)$ を定義する.

$$z(x) = E_x \left[\int_0^\infty f(W_t) e^{-\alpha t - \int_0^t k(W_u) du} dt \right]$$

ここで $E_x[\cdot]$ とは, W_t を初期値 x の Brown 運動とする期待値である. このとき, 関数 $z(x)$ は区分的に C^2 級であり, 以下の常微分方程式を満たす.

$$(\alpha + k(x))z(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2 z}{dx^2} + f(x)$$

occupation time が $\Gamma_T^- = \int_0^T \mathbf{1}_{\{W_u < 0\}} du = \int_0^T H(-W_u) du$ と書けることを踏まえて, この定理を

- $z(x) \leftarrow G_\rho(z, x; s) = \int_0^\infty e^{-sT} E_x \left[e^{-\rho \Gamma_T^-} \delta(W_T - z) \right] dT$
- $k(x) \leftarrow \rho H(-x)$ (すなわち $\int_0^t k(W_u) du \leftarrow \rho \Gamma_T^- = \int_0^T \rho H(-W_u) du$)
- $f(x) \leftarrow \delta(z - x) = \delta(x - z)$
- $\alpha \leftarrow s$

と代入して適用することで, 下の常微分方程式が得られる.

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 G_\rho}{\partial x^2} - [s + \rho H(-x)] G_\rho = -\delta(z - x) \quad (3.11)$$

なお, 数理ファイナンスの分野においては「Feynman-Kac の公式」が比較的良好に知られている. Karatzas and Shreve (1991) (以下, KS と呼ぶ) の 4.4 節冒頭 (p.267) で述べられているように, 上記の Kac の公式は, Feynman-Kac の公式の Laplace 変換版に近いものと考えられる. 参考のために, Feynman-Kac の公式を下記の定理 B.II として記載する (KS の 4.4.A 節 4.2 Theorem (p.268)). この定理 B.II の時間方向を反転させることで, 定理 B.III のように書き換えられる (KS の 4.4.A 節 4.5 Corollary (p.270)).

定理 B.III の偏微分方程式について、 $g = 0$ とし、Laplace 変換 $z(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} u(t, x) dt$ を考えると、部分積分を経て定理 B.I (Kac の公式) の常微分方程式が得られることがわかる。ただし、定理 B.I のほうが関数 f に課される条件が緩く、本論文のケース $f(x) = \delta(z - x)$ では、定理 B.I は適用できるが、定理 B.III を直接適用することはできない。

Theorem B.II (Feynman-Kac の公式) $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, k : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty), g : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ を連続な関数とする。 $v : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ は連続な関数で、 $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ 上で $C^{1,2}$ 級であり、以下の偏微分方程式と終末条件を満たすものとする。

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial t} + kv &= \frac{1}{2} \Delta v + g, & [0, T] \times \mathbb{R}^d \\ v(T, x) &= f(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

更に、ある定数 $K > 0$ と $0 < a < \frac{1}{2Td}$ について、 v は以下の条件を満たすものとする。

$$\max_{0 \leq t \leq T} |v(t, x)| + \max_{0 \leq t \leq T} |g(t, x)| \leq K e^{a\|x\|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

このとき、上記の偏微分方程式と終末条件を満たす唯一解 v を、以下のように Brown 運動を含んだ期待値の形で表現できる。

$$\begin{aligned} v(t, x) = E_x \left[f(W_{T-t}) \exp \left\{ - \int_0^{T-t} k(W_s) ds \right\} \right. \\ \left. + \int_0^{T-t} g(t + \theta, W_\theta) \exp \left\{ - \int_0^\theta k(W_s) ds \right\} d\theta \right], \quad 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

Theorem B.III $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, k : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty), g : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ を連続な関数とする。 $u : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ は連続な関数で、 $(0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ 上で $C^{1,2}$ 級であり、以下の偏微分方程式と初期条件を満たすものとする。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + ku &= \frac{1}{2} \Delta u + g, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0, x) &= f(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

更に、どのような有限の $T > 0$ に対しても、以下の v に関する条件を満たすような定数 $K > 0$ と $0 < a < \frac{1}{2Td}$ が存在するものとする。

$$\max_{0 \leq t \leq T} |u(t, x)| + \max_{0 \leq t \leq T} |g(t, x)| \leq K e^{a\|x\|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

このとき、上記の偏微分方程式と初期条件を満たす唯一解 u を、以下のように Brown 運動を含んだ期待値の形で表現できる。

$$\begin{aligned} u(t, x) = E_x \left[f(W_t) \exp \left\{ - \int_0^t k(W_s) ds \right\} \right. \\ \left. + \int_0^t g(t - \theta, W_\theta) \exp \left\{ - \int_0^\theta k(W_s) ds \right\} d\theta \right], \quad 0 \leq t \leq \infty, x \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

C 常微分方程式の解法

本章では，常微分方程式 (3.11) および境界条件 (3.12-3.15) の解 (3.16-3.19) を導出する．Laplace 変換等を用いて解く方法もあるが，ここでは初等的な積分計算を用いて解く方法を紹介する．なお解そのものは，Borodin and Salminen (1996) [13] の Part II 1.1 節，式 1.5.5 (p.160) に同様のものが記載されている．簡略化のため $z \neq 0$ の場合のみを考えるが，最終的に得られる解は $z = 0$ についても連続に繋がるものになる．

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 G_\rho}{\partial x^2} - [s + \rho H(-x)] G_\rho = -\delta(z - x) \quad (3.11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} G_\rho(z, x; s) = 0 \quad (3.12)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} G_\rho(z, x; s) = 0 \quad (3.13)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} (G_\rho(z, \epsilon; s) - G_\rho(z, -\epsilon; s)) = 0 \quad (3.14)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left(\frac{\partial G_\rho}{\partial x}(z, \epsilon; s) - \frac{\partial G_\rho}{\partial x}(z, -\epsilon; s) \right) = 0 \quad (3.15)$$

$G_\rho(z, x; s)$ の引数 x のみを変数とみなし， x の符号によって分けるために $G_\rho(z, x; s) = \begin{cases} g_A(x) & (x > 0) \\ h_A(x) & (x \leq 0) \end{cases}$ と置く．このとき，元の常微分方程式 (3.11) は以下のように書き直せる．

$$\frac{d^2 g_A(x)}{dx^2} - 2s g_A(x) = -2\delta(z - x), \quad (x > 0) \quad (C.1)$$

$$\frac{d^2 h_A(x)}{dx^2} - 2(s + \rho) h_A(x) = -2\delta(z - x), \quad (x \leq 0) \quad (C.2)$$

C.1 $g_A(x)$ の解法

$$\begin{aligned} \text{式 (C.1)} &\Rightarrow \left(\frac{d}{dx} - \sqrt{2s} \right) \left(\frac{d}{dx} + \sqrt{2s} \right) g_A(x) = -2\delta(z - x) \\ &\Rightarrow \left(\frac{d}{dx} - \sqrt{2s} \right) g_B(x) = -2\delta(z - x) \\ &\quad (g_B(x) = \left(\frac{d}{dx} + \sqrt{2s} \right) g_A(x) \text{ と置く.}) \\ &\Rightarrow \frac{dg_C(x)}{dx} e^{\sqrt{2sx}} = -2\delta(z - x) \\ &\quad (g_C(x) = g_B(x) e^{-\sqrt{2sx}} \text{ と置く. すると } \left(\frac{d}{dx} - \sqrt{2s} \right) g_B(x) = \frac{dg_C(x)}{dx} e^{\sqrt{2sx}} \text{ が成り立つ.}) \\ &\Rightarrow \frac{dg_C(x)}{dx} = -2e^{-\sqrt{2sx}} \delta(z - x), \quad (x > 0) \end{aligned}$$

これを0から x まで積分する．なお，被積分関数の中にある $\delta(z-u)$ は $u=z$ の点でのみ0でない値を取るため， z が積分範囲(0から x までの間)にある場合にのみ，積分値は0でない値を取ることに注意する．

$$\begin{aligned} g_C(x) &= -2 \int_0^x e^{-\sqrt{2s}u} \delta(z-u) du + g_C(0) \\ &= \begin{cases} -2e^{-\sqrt{2s}z} + g_C(0) & (x \geq z \geq 0) \\ g_C(0) & (z > x \text{ または } 0 > z) \end{cases} \\ &= -2e^{-\sqrt{2s}z} \mathbf{1}_{\{x \geq z \geq 0\}} + g_C(0) \end{aligned}$$

$g_B(x) = g_C(x)e^{\sqrt{2s}x}$ を用いて $g_B(x)$ の形に戻す．

$$g_B(x) = -2e^{\sqrt{2s}(x-z)} \mathbf{1}_{\{x \geq z \geq 0\}} + g_C(0)e^{\sqrt{2s}x}$$

$(\frac{d}{dx} + \sqrt{2s}) g_A(x) = g_B(x)$ を用いて $g_A(x)$ の形に戻す．

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} + \sqrt{2s}\right) g_A(x) &= -2e^{\sqrt{2s}(x-z)} \mathbf{1}_{\{x \geq z \geq 0\}} + g_C(0)e^{\sqrt{2s}x} \\ \Rightarrow \frac{dg_D(x)}{dx} e^{-\sqrt{2s}x} &= -2e^{\sqrt{2s}(x-z)} \mathbf{1}_{\{x \geq z \geq 0\}} + g_C(0)e^{\sqrt{2s}x} \\ \left(g_D(x) = g_A(x)e^{\sqrt{2s}x} \text{ と置く．すると } \left(\frac{d}{dx} + \sqrt{2s}\right) g_A(x) = \frac{dg_D(x)}{dx} e^{-\sqrt{2s}x} \text{ が成り立つ．}\right) \\ \Rightarrow \frac{dg_D(x)}{dx} &= -2e^{\sqrt{2s}(2x-z)} \mathbf{1}_{\{x \geq z \geq 0\}} + g_C(0)e^{2\sqrt{2s}x} \end{aligned}$$

これを0から x まで積分する．なお，第1項の実質的な積分範囲は，元の積分範囲 $[0, x]$ と，被積分関数が0でない値を取る範囲 $[z, \infty)$ が重なる範囲となることに注意する．

$$\begin{aligned} g_D(x) &= -2 \int_0^x e^{\sqrt{2s}(2u-z)} \mathbf{1}_{\{u \geq z \geq 0\}} du + g_C(0) \int_0^x e^{2\sqrt{2s}u} du + g_D(0) \\ &= -2e^{-\sqrt{2s}z} \left(\mathbf{1}_{\{x \geq z \geq 0\}} \int_z^x e^{2\sqrt{2s}u} du + \mathbf{1}_{\{0 > z\}} \int_0^x e^{2\sqrt{2s}u} du \right) \\ &\quad + g_C(0) \int_0^x e^{2\sqrt{2s}u} du + g_D(0) \\ &= -2e^{-\sqrt{2s}z} \left(\mathbf{1}_{\{x \geq z \geq 0\}} \frac{e^{2\sqrt{2s}x} - e^{2\sqrt{2s}z}}{2\sqrt{2s}} + \mathbf{1}_{\{0 > z\}} \frac{e^{2\sqrt{2s}x} - 1}{2\sqrt{2s}} \right) \\ &\quad + g_C(0) \frac{e^{2\sqrt{2s}x} - 1}{2\sqrt{2s}} + g_D(0) \end{aligned}$$

$g_A(x) = g_D(x)e^{-\sqrt{2s}x}$ を用いて $g_A(x)$ の形に戻す．

$$\begin{aligned} g_A(x) &= -\mathbf{1}_{\{x \geq z \geq 0\}} \frac{e^{\sqrt{2s}(x-z)} - e^{\sqrt{2s}(z-x)}}{\sqrt{2s}} - \mathbf{1}_{\{0 > z\}} \frac{e^{\sqrt{2s}(x-z)} - e^{-\sqrt{2s}(x+z)}}{\sqrt{2s}} \\ &\quad + g_C(0) \frac{e^{\sqrt{2s}x} - e^{-\sqrt{2s}x}}{2\sqrt{2s}} + g_D(0)e^{-\sqrt{2s}x} \end{aligned} \tag{C.3}$$

$g_C(0), g_D(0)$ は積分定数と見なせる．これら積分定数は境界条件を用いて特定する．

C.2 $h_A(x)$ の解法

$h_A(x)$, $x \leq 0$ についても, 前節と同様に解いていく.

$$\begin{aligned}
 \text{式 (C.2)} &\Rightarrow \left(\frac{d}{dx} - \sqrt{2(s+\rho)} \right) \left(\frac{d}{dx} + \sqrt{2(s+\rho)} \right) h_A(x) = -2\delta(z-x) \\
 &\Rightarrow \left(\frac{d}{dx} - \sqrt{2(s+\rho)} \right) h_B(x) = -2\delta(z-x) \\
 &\quad (h_B(x) = \left(\frac{d}{dx} + \sqrt{2(s+\rho)} \right) h_A(x) \text{ と置く.}) \\
 &\Rightarrow \frac{dh_C(x)}{dx} e^{\sqrt{2(s+\rho)}x} = -2\delta(z-x) \\
 &\quad (h_C(x) = h_B(x)e^{-\sqrt{2(s+\rho)}x} \text{ と置く. すると } \left(\frac{d}{dx} - \sqrt{2(s+\rho)} \right) h_B(x) = \frac{dh_C(x)}{dx} e^{\sqrt{2(s+\rho)}x} \text{ が成り立つ.}) \\
 &\Rightarrow \frac{dh_C(x)}{dx} = -2e^{-\sqrt{2(s+\rho)}x} \delta(z-x), \quad (x \leq 0)
 \end{aligned}$$

これを $-\infty$ から x ($x \leq 0$) まで積分する. なお, 被積分関数の中にある $\delta(z-u)$ は $u=z$ の点でのみ 0 でない値を取るため, z が積分範囲 ($-\infty$ から x までの間) にある場合にのみ, 積分値は 0 でない値を取ることに注意する.

$$\begin{aligned}
 h_C(x) &= -2 \int_{-\infty}^x e^{-\sqrt{2(s+\rho)}u} \delta(z-u) du + h_C(-\infty) \\
 &= \begin{cases} -2e^{-\sqrt{2(s+\rho)}z} + h_C(-\infty) & (x \geq z) \\ h_C(-\infty) & (z > x) \end{cases} \\
 &= -2e^{-\sqrt{2(s+\rho)}z} \mathbf{1}_{\{x \geq z\}} + h_C(-\infty)
 \end{aligned}$$

$h_B(x) = h_C(x)e^{\sqrt{2(s+\rho)}x}$ を用いて $h_B(x)$ の形に戻す.

$$h_B(x) = -2e^{\sqrt{2(s+\rho)}(x-z)} \mathbf{1}_{\{x \geq z\}} + h_C(-\infty)e^{\sqrt{2(s+\rho)}x}$$

$\left(\frac{d}{dx} + \sqrt{2(s+\rho)} \right) h_A(x) = h_B(x)$ を用いて $h_A(x)$ の形に戻す.

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{d}{dx} + \sqrt{2(s+\rho)} \right) h_A(x) = -2e^{\sqrt{2(s+\rho)}(x-z)} \mathbf{1}_{\{x \geq z\}} + h_C(-\infty)e^{\sqrt{2(s+\rho)}x} \\
 &\Rightarrow \frac{dh_D(x)}{dx} e^{-\sqrt{2(s+\rho)}x} = -2e^{\sqrt{2(s+\rho)}(x-z)} \mathbf{1}_{\{x \geq z\}} + h_C(-\infty)e^{\sqrt{2(s+\rho)}x} \\
 &\quad (h_D(x) = h_A(x)e^{\sqrt{2(s+\rho)}x} \text{ と置く. すると } \left(\frac{d}{dx} + \sqrt{2(s+\rho)} \right) h_A(x) = \frac{dh_D(x)}{dx} e^{-\sqrt{2(s+\rho)}x} \text{ が成り立つ.}) \\
 &\Rightarrow \frac{dh_D(x)}{dx} = -2e^{\sqrt{2(s+\rho)}(2x-z)} \mathbf{1}_{\{x \geq z\}} + h_C(-\infty)e^{2\sqrt{2(s+\rho)}x}
 \end{aligned}$$

これを $-\infty$ から x ($x \leq 0$) まで積分する. なお, 第 1 項の実質的な積分範囲は, 元の積分範囲 ($-\infty, x$] と, 被積分関数が 0 でない値を取る範囲 $[z, \infty)$ が重なる範囲となることに注

意する.

$$\begin{aligned}
h_D(x) &= -2 \int_{-\infty}^x e^{\sqrt{2(s+\rho)}(2u-z)} \mathbf{1}_{\{u \geq z\}} du + h_C(-\infty) \int_{-\infty}^x e^{2\sqrt{2(s+\rho)}u} du + h_D(-\infty) \\
&= -2e^{-\sqrt{2(s+\rho)}z} \mathbf{1}_{\{x \geq z\}} \int_z^x e^{2\sqrt{2(s+\rho)}u} du + h_C(-\infty) \int_{-\infty}^x e^{2\sqrt{2(s+\rho)}u} du + h_D(-\infty) \\
&= -2e^{-\sqrt{2(s+\rho)}z} \mathbf{1}_{\{x \geq z\}} \frac{e^{2\sqrt{2(s+\rho)}x} - e^{2\sqrt{2(s+\rho)}z}}{2\sqrt{2(s+\rho)}} + h_C(-\infty) \frac{e^{2\sqrt{2(s+\rho)}x}}{2\sqrt{2(s+\rho)}} + h_D(-\infty)
\end{aligned}$$

$h_A(x) = h_D(x)e^{-\sqrt{2(s+\rho)}x}$ を用いて $h_A(x)$ の形に戻す.

$$h_A(x) = -\mathbf{1}_{\{x \geq z\}} \frac{e^{\sqrt{2(s+\rho)}(x-z)} - e^{\sqrt{2(s+\rho)}(z-x)}}{\sqrt{2(s+\rho)}} + h_C(-\infty) \frac{e^{\sqrt{2(s+\rho)}x}}{2\sqrt{2(s+\rho)}} + h_D(-\infty)e^{-\sqrt{2(s+\rho)}x} \quad (\text{C.4})$$

$h_C(-\infty)$, $h_D(-\infty)$ は積分定数と見なせる. これら積分定数は境界条件を用いて特定する.

C.3 $x \rightarrow \infty$ での境界条件

境界条件 (3.12) を式 (C.3) に適用する. $x \rightarrow \infty$ で $e^{-\sqrt{2sx}}$ に比例する項は 0 に収束するので, $e^{\sqrt{2sx}}$ に比例する項のみ考えればよい.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} g_A(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\mathbf{1}_{\{x \geq z \geq 0\}} \frac{e^{\sqrt{2s}(x-z)}}{\sqrt{2s}} - \mathbf{1}_{\{0 > z\}} \frac{e^{\sqrt{2s}(x-z)}}{\sqrt{2s}} + g_C(0) \frac{e^{\sqrt{2sx}}}{2\sqrt{2s}} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{e^{-\sqrt{2s}z}}{\sqrt{2s}} + \frac{g_C(0)}{2\sqrt{2s}} \right) e^{\sqrt{2sx}} \\
&= 0 \\
&\Rightarrow g_C(0) = 2e^{-\sqrt{2s}z}
\end{aligned}$$

これを式 (C.3) に代入し, $g_A(x)$ を書き直す.

$$\begin{aligned}
g_A(x) &= -\mathbf{1}_{\{x \geq z \geq 0\}} \frac{e^{\sqrt{2s}(x-z)} - e^{\sqrt{2s}(z-x)}}{\sqrt{2s}} - \mathbf{1}_{\{0 > z\}} \frac{e^{\sqrt{2s}(x-z)} - e^{-\sqrt{2s}(x+z)}}{\sqrt{2s}} \\
&\quad + \frac{e^{\sqrt{2s}(x-z)} - e^{-\sqrt{2s}(x+z)}}{\sqrt{2s}} + g_D(0)e^{-\sqrt{2sx}} \quad (\text{C.5})
\end{aligned}$$

C.4 $x \rightarrow -\infty$ での境界条件

境界条件 (3.13) を式 (C.4) に適用する. $x \rightarrow -\infty$ で $e^{\sqrt{2sx}}$ に比例する項は 0 に収束するので, $e^{-\sqrt{2sx}}$ に比例する項のみ考えればよい.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} h_A(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\mathbf{1}_{\{x \geq z\}} \frac{-e^{\sqrt{2(s+\rho)}(z-x)}}{\sqrt{2(s+\rho)}} + h_D(-\infty)e^{-\sqrt{2(s+\rho)}x} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} h_D(-\infty)e^{-\sqrt{2(s+\rho)}x} \\
&= 0 \\
&\Rightarrow h_D(-\infty) = 0
\end{aligned}$$

これを式 (C.4) に代入し, $h_A(x)$ を書き直す.

$$h_A(x) = -\mathbf{1}_{\{x \geq z\}} \frac{e^{\sqrt{2(s+\rho)}(x-z)} - e^{\sqrt{2(s+\rho)}(z-x)}}{\sqrt{2(s+\rho)}} + h_C(-\infty) \frac{e^{\sqrt{2(s+\rho)}x}}{2\sqrt{2(s+\rho)}} \quad (\text{C.6})$$

C.5 $x = 0$ での境界条件 ($z > 0$ の場合)

$z > 0$ の場合を考える. x が十分 0 に近い領域 (つまり $x \approx +0 < z$) において, 式 (C.5), (C.6) より $g_A(x)$, $h_A(x)$ は以下のように書ける.

$$\begin{cases} g_A(x) = \frac{e^{\sqrt{2s}(x-z)} - e^{-\sqrt{2s}(x+z)}}{\sqrt{2s}} + g_D(0)e^{-\sqrt{2s}x} \\ h_A(x) = h_C(-\infty) \frac{e^{\sqrt{2(s+\rho)}x}}{2\sqrt{2(s+\rho)}} \end{cases}$$

これらの微分は以下のように得られる.

$$\begin{cases} \frac{dg_A(x)}{dx} = e^{\sqrt{2s}(x-z)} + e^{-\sqrt{2s}(x+z)} - g_D(0)\sqrt{2s}e^{-\sqrt{2s}x} \\ \frac{dh_A(x)}{dx} = \frac{h_C(-\infty)}{2} e^{\sqrt{2(s+\rho)}x} \end{cases}$$

境界条件 (3.14) は $\lim_{x \rightarrow +0} g_A(x) = \lim_{x \rightarrow -0} h_A(x)$, 境界条件 (3.15) は $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{dg_A(x)}{dx} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{dh_A(x)}{dx}$ と表せる. これらを上記の式に課すことで, 以下のように積分定数 $g_D(0)$, $h_C(-\infty)$ が得られる.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +0} g_A(x) = \lim_{x \rightarrow -0} h_A(x) \\ \lim_{x \rightarrow +0} \frac{dg_A(x)}{dx} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{dh_A(x)}{dx} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} g_D(0) = \frac{h_C(-\infty)}{2\sqrt{2(s+\rho)}} \\ 2e^{-\sqrt{2s}z} - g_D(0)\sqrt{2s} = \frac{h_C(-\infty)}{2} \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} g_D(0) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s+\rho} + \sqrt{s}} e^{-\sqrt{2s}z} \\ h_C(-\infty) = \frac{4\sqrt{s+\rho}}{\sqrt{s+\rho} + \sqrt{s}} e^{-\sqrt{2s}z} \end{cases} \quad (\text{C.7}) \end{aligned}$$

式 (C.7) の $g(0)$ を式 (C.5) に代入し, 更に $z > 0$ という仮定を用いると, 最終的な $g_A(x)$ ($z > 0$) が得られる.

$$\begin{aligned} g_A(x) &= -\mathbf{1}_{\{x \geq z\}} \frac{e^{\sqrt{2s}(x-z)} - e^{\sqrt{2s}(z-x)}}{\sqrt{2s}} + \frac{e^{\sqrt{2s}(x-z)} - e^{-\sqrt{2s}(x+z)}}{\sqrt{2s}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s+\rho} + \sqrt{s}} e^{-\sqrt{2s}(x+z)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2s}} e^{-\sqrt{2s}|x-z|} + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s+\rho} + \sqrt{s}} - \frac{1}{\sqrt{2s}} \right) e^{-\sqrt{2s}(x+z)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2s}} \left(e^{-\sqrt{2s}|x-z|} - \frac{\sqrt{s+\rho} - \sqrt{s}}{\sqrt{s+\rho} + \sqrt{s}} e^{-\sqrt{2s}(x+z)} \right) \quad (x \geq 0, z > 0) \quad (\text{C.8}) \end{aligned}$$

この式 (C.8) は解 (3.16) に相当する.

式 (C.7) の $h_C(-\infty)$ を式 (C.6) に代入し, 更に $z > 0$ という仮定と, $h_A(x)$ の定義域である $x \leq 0$ を用いると, 最終的な $h_A(x)$ ($z > 0$) が得られる.

$$\begin{aligned} h_A(x) &= \frac{4\sqrt{s+\rho}}{\sqrt{s+\rho}+\sqrt{s}} e^{-\sqrt{2s}z} \frac{e^{\sqrt{2(s+\rho)}x}}{2\sqrt{2(s+\rho)}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s+\rho}+\sqrt{s}} e^{\sqrt{2(s+\rho)}x-\sqrt{2s}z} \quad (x \leq 0, z > 0) \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

この式 (C.9) は解 (3.17) に相当する.

C.6 $x = 0$ での境界条件 ($z < 0$ の場合)

$z < 0$ の場合を考える. x が十分 0 に近い領域 (つまり $x \approx -0 > z$) において, 式 (C.5), (C.6) より $g_A(x)$, $h_A(x)$ は以下のように書ける.

$$\begin{cases} g_A(x) = g_D(0)e^{-\sqrt{2s}x} \\ h_A(x) = -\frac{e^{\sqrt{2(s+\rho)}(x-z)} - e^{\sqrt{2(s+\rho)}(z-x)}}{\sqrt{2(s+\rho)}} + h_C(-\infty) \frac{e^{\sqrt{2(s+\rho)}x}}{2\sqrt{2(s+\rho)}} \end{cases}$$

これらの微分は以下のように得られる.

$$\begin{cases} \frac{dg_A(x)}{dx} = -g_D(0)\sqrt{2s}e^{-\sqrt{2s}x} \\ \frac{dh_A(x)}{dx} = -e^{\sqrt{2(s+\rho)}(x-z)} - e^{\sqrt{2(s+\rho)}(z-x)} + \frac{h_C(-\infty)}{2} e^{\sqrt{2(s+\rho)}x} \end{cases}$$

境界条件 (3.14) は $\lim_{x \rightarrow +0} g_A(x) = \lim_{x \rightarrow -0} h_A(x)$, 境界条件 (3.15) は $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{dg_A(x)}{dx} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{dh_A(x)}{dx}$ と表せる. これらを上記の式に課すことで, 以下のように積分定数 $g_D(0)$, $h_C(-\infty)$ が得られる.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +0} g_A(x) = \lim_{x \rightarrow -0} h_A(x) \\ \lim_{x \rightarrow +0} \frac{dg_A(x)}{dx} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{dh_A(x)}{dx} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} g_D(0) = -\frac{e^{-\sqrt{2(s+\rho)}z} - e^{\sqrt{2(s+\rho)}z}}{\sqrt{2(s+\rho)}} + \frac{h_C(-\infty)}{2\sqrt{2(s+\rho)}} \\ -g_D(0)\sqrt{2s} = -e^{-\sqrt{2(s+\rho)}z} - e^{\sqrt{2(s+\rho)}z} + \frac{h_C(-\infty)}{2} \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} g_D(0) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s+\rho}+\sqrt{s}} e^{\sqrt{2(s+\rho)}z} \\ h_C(-\infty) = 2e^{-\sqrt{2(s+\rho)}z} + \frac{2(\sqrt{s+\rho}-\sqrt{s})}{\sqrt{s+\rho}+\sqrt{s}} e^{\sqrt{2(s+\rho)}z} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

式 (C.10) の $g(0)$ を式 (C.5) に代入し, 更に $z < 0$ という仮定を用いると, 最終的な $g_A(x)$ ($z > 0$) が得られる.

$$\begin{aligned} g_A(x) &= -\frac{e^{\sqrt{2s}(x-z)} - e^{-\sqrt{2s}(x+z)}}{\sqrt{2s}} + \frac{e^{\sqrt{2s}(x-z)} - e^{-\sqrt{2s}(x+z)}}{\sqrt{2s}} + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s+\rho}+\sqrt{s}} e^{\sqrt{2(s+\rho)}z} \right) e^{-\sqrt{2s}x} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s+\rho}+\sqrt{s}} e^{\sqrt{2(s+\rho)}z-\sqrt{2s}x} \quad (x \geq 0, z < 0) \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

この式 (C.11) は解 (3.18) に相当する.

式 (C.10) の $h_C(-\infty)$ を式 (C.6) に代入し, 更に $z > 0$ という仮定と, $h_A(x)$ の定義域である $x \leq 0$ を用いると, 最終的な $h_A(x)$ ($z > 0$) が得られる.

$$\begin{aligned}
h_A(x) &= -\mathbf{1}_{\{x \geq z\}} \frac{e^{\sqrt{2(s+\rho)}(x-z)} - e^{\sqrt{2(s+\rho)}(z-x)}}{\sqrt{2(s+\rho)}} \\
&\quad + \left(2e^{-\sqrt{2(s+\rho)}z} + \frac{2(\sqrt{s+\rho} - \sqrt{s})}{\sqrt{s+\rho} + \sqrt{s}} e^{\sqrt{2(s+\rho)}z} \right) \frac{e^{\sqrt{2(s+\rho)}x}}{2\sqrt{2(s+\rho)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2(s+\rho)}} \left[e^{\sqrt{2(s+\rho)}(x-z)} - \mathbf{1}_{\{x \geq z\}} \left(e^{\sqrt{2(s+\rho)}(x-z)} - e^{\sqrt{2(s+\rho)}(z-x)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sqrt{s+\rho} - \sqrt{s}}{\sqrt{s+\rho} + \sqrt{s}} e^{\sqrt{2(s+\rho)}(x+z)} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2(s+\rho)}} \left(e^{-\sqrt{2(s+\rho)}|x-z|} + \frac{\sqrt{s+\rho} - \sqrt{s}}{\sqrt{s+\rho} + \sqrt{s}} e^{\sqrt{2(s+\rho)}(x+z)} \right) \quad (x \leq 0, z < 0)
\end{aligned} \tag{C.12}$$

この式 (C.12) は解 (3.19) に相当する.

D Laplace 逆変換

本章では，式(3.16-3.19)から Laplace 逆変換を用いて式(3.20-3.24)を得る．以下の Laplace 逆変換の公式を用いる (Abramowitz and Stegun (1964) [14] の第 29 章の式 (29.3.84), (29.3.82), (29.3.87), (29.3.36), (29.2.8), (29.2.12) 参考)．

$$\mathcal{L}_T^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-a\sqrt{s}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi T}} e^{-a^2/4T}, \quad a \geq 0 \quad (\text{D.1})$$

$$\mathcal{L}_T^{-1} \left\{ e^{-a\sqrt{s}} \right\} = \frac{a}{2\sqrt{\pi T^3/2}} e^{-a^2/4T}, \quad a > 0 \quad (\text{D.2})$$

$$\mathcal{L}_T^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{s+a} + \sqrt{s}} \right\} = \frac{1 - e^{-aT}}{2a\sqrt{\pi T^3/2}}, \quad a \geq 0 \quad (\text{D.3})$$

$$\mathcal{L}_T^{-1} \left\{ \sqrt{s} e^{-a\sqrt{s}} \right\} = \frac{(a^2 - 2T)}{4\sqrt{\pi T^5/2}} e^{-a^2/4T}, \quad a \geq 0 \quad (\text{D.4})$$

$$\mathcal{L}_T^{-1} \{F(s)G(s)\} = \int_0^T f(T-t)g(t) dt \quad (\text{畳み込み}) \quad (\text{D.5})$$

$$\mathcal{L}_T^{-1} \{F(s+a)\} = e^{-aT} f(T) \quad (\text{平行移動}) \quad (\text{D.6})$$

D.1 Region I. ($x \geq 0, z \geq 0, x+z > 0$)

$x \geq 0, z \geq 0, x+z > 0$ を仮定する．式(3.16)より

$$\begin{aligned} G_\rho^I(z, x; s) &= \frac{1}{\sqrt{2s}} \left(e^{-|z-x|\sqrt{2s}} - \frac{\sqrt{s+\rho} - \sqrt{s}}{\sqrt{s+\rho} + \sqrt{s}} e^{-(z+x)\sqrt{2s}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2s}} \left(e^{-|z-x|\sqrt{2s}} - e^{-(z+x)\sqrt{2s}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2s}} \left(1 - \frac{\sqrt{s+\rho} - \sqrt{s}}{\sqrt{s+\rho} + \sqrt{s}} \right) e^{-(z+x)\sqrt{2s}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2s}} \left(e^{-|z-x|\sqrt{2s}} - e^{-(z+x)\sqrt{2s}} \right) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s+\rho} + \sqrt{s}} e^{-(z+x)\sqrt{2s}} \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

式(D.1)に $a = |z-x|\sqrt{2}$ および $a = (z+x)\sqrt{2}$ と代入したものを，式(D.7)の第1項に適用する．

$$\mathcal{L}_T^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2s}} \left(e^{-|z-x|\sqrt{2s}} - e^{-(z+x)\sqrt{2s}} \right) \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \left(e^{-(z-x)^2/2T} - e^{-(z+x)^2/2T} \right) \quad (\text{D.8})$$

式(D.5)，式(D.3) ($a = \rho$)，式(D.2) ($a = (z+x)\sqrt{2}$) を式(D.7)の第2項に適用する．

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_T^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s+\rho} + \sqrt{s}} e^{-(z+x)\sqrt{2s}} \right\} &= \int_0^T \mathcal{L}_{T-t}^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s+\rho} + \sqrt{s}} \right\} \mathcal{L}_t^{-1} \left\{ e^{-(z+x)\sqrt{2s}} \right\} dt \\ &= \int_0^T \sqrt{2} \frac{1 - e^{-\rho(T-t)}}{2\rho\sqrt{\pi}(T-t)^{3/2}} \frac{(z+x)\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}} e^{-(z+x)^2/2t} dt \\ &= \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)})(z+x)}{2\rho\pi(T-t)^{3/2}t^{3/2}} e^{-(z+x)^2/2t} dt \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

式(D.7)，式(D.8)，式(D.9)より式(3.20)が示された．

D.2 Region II. ($x \leq 0, z > 0$)

$x \leq 0, z > 0$ を仮定する．式 (3.17) より

$$\begin{aligned} G_\rho^{II}(z, x; s) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s+\rho} + \sqrt{s}} e^{x\sqrt{2(s+\rho)} - z\sqrt{2s}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\rho} (\sqrt{s+\rho} - \sqrt{s}) e^{x\sqrt{2(s+\rho)} - z\sqrt{2s}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\rho} \left[(\sqrt{s+\rho} e^{x\sqrt{2(s+\rho)}}) e^{-z\sqrt{2s}} - e^{x\sqrt{2(s+\rho)}} (\sqrt{s} e^{-z\sqrt{2s}}) \right] \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

式 (D.5), 式 (D.6) ($a = \rho$), 式 (D.4) ($a = -x\sqrt{2}$), 式 (D.2) ($a = z\sqrt{2}$), 式 (D.2) ($a = -x\sqrt{2}$), 式 (D.4) ($a = z\sqrt{2}$) を式 (D.10) に適用する．

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_T^{-1} \{G_\rho^{II}(z, x; s)\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\rho} \int_0^T \left(\mathcal{L}_{T-t}^{-1} \left\{ \sqrt{s+\rho} e^{x\sqrt{2(s+\rho)}} \right\} \mathcal{L}_t^{-1} \left\{ e^{-z\sqrt{2s}} \right\} - \mathcal{L}_{T-t}^{-1} \left\{ e^{x\sqrt{2(s+\rho)}} \right\} \mathcal{L}_t^{-1} \left\{ \sqrt{s} e^{-z\sqrt{2s}} \right\} \right) dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\rho} \int_0^T \left[\left\{ e^{-\rho(T-t)} \frac{(2x^2 - 2(T-t))}{4\sqrt{\pi}(T-t)^{5/2}} e^{-2x^2/4(T-t)} \right\} \left\{ \frac{z\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}} e^{-2z^2/4t} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ e^{-\rho(T-t)} \frac{-x\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}(T-t)^{3/2}} e^{-2x^2/4(T-t)} \right\} \left\{ \frac{(2z^2 - 2t)}{4\sqrt{\pi}t^{5/2}} e^{-2z^2/4t} \right\} \right] dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\rho} \int_0^T \left[e^{-\rho(T-t)} \frac{(x^2 - (T-t))}{2\sqrt{\pi}(T-t)^{5/2}} e^{-x^2/2(T-t)} \frac{z}{\sqrt{2\pi}t^{3/2}} e^{-z^2/2t} \right. \\ &\quad \left. + e^{-\rho(T-t)} \frac{x}{\sqrt{2\pi}(T-t)^{3/2}} e^{-x^2/2(T-t)} \frac{(z^2 - t)}{2\sqrt{\pi}t^{5/2}} e^{-z^2/2t} \right] dt \\ &= \int_0^T e^{-\rho(T-t)} \left[\frac{(x^2 - (T-t))z}{2\pi\rho(T-t)^{5/2}t^{3/2}} + \frac{x(z^2 - t)}{2\rho\pi(T-t)^{3/2}t^{5/2}} \right] e^{-x^2/2(T-t) - z^2/2t} dt \\ &= \int_0^T e^{-\rho(T-t)} \frac{zt(x^2 - T + t) + x(T-t)(z^2 - t)}{2\pi\rho(T-t)^{5/2}t^{5/2}} e^{-x^2/2(T-t) - z^2/2t} dt \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

この式 (D.11) は, このままでも $\mathcal{K}_\rho^{II}(z, x; T) = \mathcal{L}_T^{-1} \{G_\rho^{II}(z, x; s)\}$ の表現として正しいが, 数値計算上の安定性を高めるため, 若干の変更を加える．式 (D.11) の被積分関数は, x が 0 に十分近いとき, $t \rightarrow T$ で $(T-t)^{-3/2}$ に比例する形で特異となる．そこで, 下記の恒等式 (D.12) が成り立つことを用いて, 式 (D.12) の左辺を, 式 (D.11) から引く．

$$\int_0^T \frac{[zt(x^2 - T + t) + x(T-t)(z^2 - t)]}{2\pi\rho(T-t)^{5/2}t^{5/2}} e^{-z^2/2t - x^2/[2(T-t)]} dt = 0 \quad (\text{D.12})$$

結果として, 式 (D.11) の被積分関数の $e^{-\rho(T-t)}$ が $(e^{-\rho(T-t)} - 1)$ に置き換わる．これにより, 最終的な積分値は不変のまま, 被積分関数の特異点の次数を $-3/2$ から $-1/2$ に軽減することができた．なお式 (D.12) は, 下記の恒等式 (D.13) の両辺を Laplace 逆変換することによって得られる．Laplace 逆変換のやり方は式 (D.10) の $\rho = 0$ の場合と全く同じである．

$$\left(\sqrt{s} e^{x\sqrt{2s}} \right) e^{-z\sqrt{2s}} - e^{x\sqrt{2s}} \left(\sqrt{s} e^{-z\sqrt{2s}} \right) \equiv 0 \quad (\text{D.13})$$

以上のことを踏まえて，式 (D.11) から変形を行うと以下の式が得られる．この積分値は全ての $x \leq 0$ について収束する．

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_\rho^{II}(z, x; T) &= \mathcal{L}_T^{-1} \{G_\rho^{II}(z, x; s)\} \\
&= \int_0^T \left(e^{-\rho(T-t)} - 1 \right) \frac{zt(x^2 - T + t) + x(T-t)(z^2 - t)}{2\pi\rho(T-t)^{5/2}t^{5/2}} e^{-x^2/2(T-t) - z^2/2t} dt \\
&= \int_0^T \left(1 - e^{-\rho(T-t)} \right) \frac{z \left(1 - \frac{x^2}{T-t} \right) + x \left(1 - \frac{z^2}{t} \right)}{2\pi\rho(T-t)^{3/2}t^{3/2}} e^{-x^2/2(T-t) - z^2/2t} dt \quad (x \leq 0, z > 0)
\end{aligned} \tag{D.14}$$

式 (D.14) より式 (3.21) が示された．

D.3 対称性

$\mathcal{K}_\rho(z, x; T)$ の定義 $\mathcal{K}_\rho(z, x; T) = \mathbb{E}_x \left[e^{-\rho\Gamma_T^-} \delta(W_T - z) \right]$ に戻って考えると， x, z の範囲に依らず以下の対称性が成り立つ．

$$\mathcal{K}_\rho(z, x; T) dz = e^{-\rho T} \mathcal{K}_{-\rho}(-z, -x; T) dz$$

この対称性は，元の Brown 運動 W_t を反転させた新しい Brown 運動 $\tilde{W}_t = -W_t$ を導入することで証明できる．

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_\rho(z, x; T) dz &= \mathbb{E}_x \left[e^{-\rho\Gamma_T^-} \delta(W_T - z) \right] \\
&= \tilde{\mathbb{E}}_{-x} \left[e^{-\rho\tilde{\Gamma}_T^+} \delta(\tilde{W}_T + z) \right] \quad (\tilde{\Gamma}_T^+ = \Gamma_T^-, W_T - z = 0 \Leftrightarrow \tilde{W}_T + z = 0) \\
&= e^{-\rho T} \tilde{\mathbb{E}}_{-x} \left[e^{\rho\tilde{\Gamma}_T^-} \delta(\tilde{W}_T - (-z)) \right] \quad (\tilde{\Gamma}_T^+ + \tilde{\Gamma}_T^- = T) \\
&= e^{-\rho T} \mathcal{K}_{-\rho}(-z, -x; T)
\end{aligned}$$

この対称性より，Region III ($x \geq 0, z < 0$) の式 (3.22) と，Region IV ($x \leq 0, z \leq 0, z + x < 0$) の式 (3.23) が成り立つ．なお式 (3.18)，式 (3.19) の Laplace 逆変換を用いても式 (3.22)，式 (3.23) が成り立つことを確認することができる．

D.4 $z = x = 0$ の場合

$z = x = 0$ のとき，式 (3.16-3.19) のいずれを用いても

$$G_\rho(0, 0; s) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s + \rho} + \sqrt{s}}$$

が得られる．これに式 (D.3) ($a = \rho$) を適用すると以下の式が得られる．

$$\mathcal{L}_T^{-1} \{G_\rho(0, 0; s)\} = \mathcal{L}_T^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s + \rho} + \sqrt{s}} \right\} = \sqrt{2} \frac{1 - e^{-\rho T}}{2\rho\sqrt{\pi T^{3/2}}} = \frac{1 - e^{-\rho T}}{\sqrt{2\pi\rho T^{3/2}}}$$

これにより式 (3.24) が示された．

E $\mathcal{K}_\rho(z, x; T)$ から $\Psi_\rho(\nu; k, x, T)$ を得る積分計算

本章では, 式 (3.20-3.23) を用いて式 (3.9) $\Psi_\rho(\nu; k, x, T) = \int_k^\infty e^{\nu z} \mathcal{K}_\rho(z, x; T) dz$ の積分計算を行い, 式 (3.25-3.28) (= 式 (2.5-2.8)) を得る. 部分積分によって得られる, 以下の積分計算の公式を用いる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi c}} \int_{-\infty}^a (\alpha z^2 + \beta z + \gamma) e^{bz - \frac{z^2}{2c}} dz &= e^{\frac{cb^2}{2}} [AN(d) - BN'(d)] \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi c}} \int_a^\infty (\alpha z^2 + \beta z + \gamma) e^{bz - \frac{z^2}{2c}} dz &= e^{\frac{cb^2}{2}} [AN(-d) + BN'(d)] \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

ただし,

$$\begin{aligned} d &= \frac{a - cb}{\sqrt{c}} \\ A &= \alpha c(cb^2 + 1) + \beta cb + \gamma \\ B &= \alpha c(2b\sqrt{c} + d) + \beta\sqrt{c} \end{aligned}$$

E.1 Region I. ($k \geq 0, x \geq 0$)

$\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = x, b = \nu - \frac{x}{t}, c = t$ として式 (E.1) を用いると, 式 (3.25) が得られる.

$$\begin{aligned} \Psi_\rho^I(\nu; k, x, T) &= \int_k^\infty e^{\nu z} \mathcal{K}_\rho^I(z, x; T) dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^\infty e^{[-(z-x)^2/2T] + \nu z} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^\infty e^{-(z+x)^2/2T + \nu z} dz \\ &\quad + \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)})}{\sqrt{2\pi\rho(T-t)^{3/2}}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t^{3/2}}} \int_k^\infty (z+x) e^{[-(z+x)^2/2t] + \nu z} dz \right) dt \\ &= e^{\nu x + \nu^2 T/2} N(d_1) - e^{-\nu x + \nu^2 T/2} N(d_3) \\ &\quad + e^{-\nu x} \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)}) e^{\nu^2 t/2}}{\sqrt{2\pi\rho(T-t)^{3/2}}} \left[\nu N(d_5) + t^{-1/2} N'(d_5) \right] dt \end{aligned}$$

E.2 Region II. ($k > 0, x \leq 0$)

$\alpha = -\frac{x}{t}, \beta = 1 - \frac{x^2}{T-t}, \gamma = x, b = \nu, c = t$ として式 (E.1) を用いると, 式 (3.26) が得られる.

$$\begin{aligned} \Psi_\rho^{II}(\nu; k, x, T) &= \int_k^\infty e^{\nu z} \mathcal{K}_\rho^{II}(z, x; T) dz \\ &= \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)})}{\sqrt{2\pi\rho(T-t)^{3/2}}} e^{-x^2/2(T-t)} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t^{3/2}}} \int_k^\infty [z(1 - x^2/(T-t)) + x(1 - z^2/t)] e^{-z^2/2t + \nu z} dz \right) dt \\ &= \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)}) e^{\nu^2 t/2}}{\sqrt{2\pi\rho(T-t)^{3/2}}} \left[\nu C_1 N(d_7) + C_2 N'(d_7) \right] e^{-x^2/[2(T-t)]} dt \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

E.3 Region III. ($k < 0, x \geq 0$)

式 (3.22) $\mathcal{K}_\rho^{III}(z, x; T) = e^{-\rho T} \mathcal{K}_{-\rho}^{II}(-z, -x; T)$ と変数変換 $z' = -z$ を用いると、以下のように式 (3.27) が得られる。

$$\begin{aligned} & \Psi_\rho^{III}(\nu; k, x, T) \\ &= \int_0^\infty e^{\nu z} \mathcal{K}_\rho^I(z, x; T) dz + \int_k^0 e^{\nu z} \mathcal{K}_\rho^{III}(z, x; T) dz \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

$$= \int_0^\infty e^{\nu z} \mathcal{K}_\rho^I(z, x; T) dz + \int_{-\infty}^0 e^{\nu z} \mathcal{K}_\rho^{III}(z, x; T) dz - \int_{-\infty}^k e^{\nu z} \mathcal{K}_\rho^{III}(z, x; T) dz \quad (\text{E.4})$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty e^{\nu z} \mathcal{K}_\rho^I(z, x; T) dz + e^{-\rho T} \int_{-\infty}^0 e^{\nu z} \mathcal{K}_{-\rho}^{II}(-z, -x; T) dz - e^{-\rho T} \int_{-\infty}^k e^{\nu z} \mathcal{K}_{-\rho}^{II}(-z, -x; T) dz \\ &= \int_0^\infty e^{\nu z} \mathcal{K}_\rho^I(z, x; T) dz + e^{-\rho T} \int_0^\infty e^{-\nu z'} \mathcal{K}_{-\rho}^{II}(z', -x; T) dz' - e^{-\rho T} \int_{-k}^\infty e^{-\nu z'} \mathcal{K}_{-\rho}^{II}(z', -x; T) dz' \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

$$= \Psi_\rho^I(\nu; 0, x, T) + e^{-\rho T} [\Psi_{-\rho}^{II}(-\nu; 0, -x, T) - \Psi_{-\rho}^{II}(-\nu; -k, -x, T)] \quad (\text{E.6})$$

ここで $\mathcal{K}_\rho(z, x; T)$ は、 $x \geq 0, z \geq 0, x+z > 0$ で $\mathcal{K}_\rho(z, x; T) = \mathcal{K}_\rho^I(z, x; T)$, $x \geq 0, z < 0$ で $\mathcal{K}_\rho(z, x; T) = \mathcal{K}_\rho^{III}(z, x; T)$ に分岐するものであるが、 $\mathcal{K}_\rho^{III}(z, x; T)$ は $z = 0$ で定義されていないことに注意が必要である。実際、 $\mathcal{K}_\rho^{III}(z, x; T)$ の計算にあたっては式 (3.22) を経由して式 (3.21) を参照することになるが、式 (3.21) の右辺の積分は任意の $z > 0$ について収束するものの、 $z = 0$ のときには収束しない。式 (E.3-E.5) の第 1 項の積分範囲は $z = 0$ を含む一方、第 2 項の積分範囲は $z = 0$ を含まないと考える必要がある。

そこで、式 (E.6) の第 2 項である $\Psi_{-\rho}^{II}(-\nu; 0, -x, T)$ は、

$$\Psi_{-\rho}^{II}(-\nu; 0, -x, T) = \lim_{k \rightarrow 0} \Psi_{-\rho}^{II}(-\nu; k, -x, T) = \lim_{k \rightarrow 0} \int_k^\infty e^{-\nu z'} \mathcal{K}_{-\rho}^{II}(z', -x; T) dz'$$

と定義する必要がある。

実際に $\Psi_{-\rho}^{II}(-\nu; 0, -x, T)$ の数値計算を行う際には、前節の関数 (E.2) を用いて t に関する数値積分を行うが、その被積分関数の計算において引数 k を $k = 0$ とはせずに、小さい値 ϵ_k (例えば 10^{-4}) を準備し、 $k = \epsilon_k$ と代入して計算を行う。

なお、式 (E.3-E.6) の変形を見ると、 $k \rightarrow -\infty$ のとき、式 (E.4-E.6) における最後の項が無くなる形となり、以下の式が成り立つことがわかる。

$$\Psi_\rho^{III}(\nu; -\infty, x, T) = \Psi_\rho^I(\nu; 0, x, T) + e^{-\rho T} \Psi_{-\rho}^{II}(-\nu; 0, -x, T)$$

これにより式 (2.9) が示された。

E.4 Region IV. ($k \leq 0, x \leq 0$)

式 (3.23) $\mathcal{K}_\rho^{IV}(z, x; T) = e^{-\rho T} \mathcal{K}_{-\rho}^I(-z, -x; T)$ と変数変換 $z' = -z$ を用いると、以下のよ
うに式 (3.28) が得られる。

$$\begin{aligned} & \Psi_\rho^{IV}(\nu; k, x, T) \\ &= \int_0^\infty e^{\nu z} \mathcal{K}_\rho^{II}(z, x; T) dz + \int_k^0 e^{\nu z} \mathcal{K}_\rho^{IV}(z, x; T) dz \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

$$= \int_0^\infty e^{\nu z} \mathcal{K}_\rho^{II}(z, x; T) dz + \int_{-\infty}^0 e^{\nu z} \mathcal{K}_\rho^{IV}(z, x; T) dz - \int_{-\infty}^k e^{\nu z} \mathcal{K}_\rho^{IV}(z, x; T) dz \quad (\text{E.8})$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty e^{\nu z} \mathcal{K}_\rho^{II}(z, x; T) dz + e^{-\rho T} \int_{-\infty}^0 e^{\nu z} \mathcal{K}_{-\rho}^I(-z, -x; T) dz - e^{-\rho T} \int_{-\infty}^k e^{\nu z} \mathcal{K}_{-\rho}^I(-z, -x; T) dz \\ &= \int_0^\infty e^{\nu z} \mathcal{K}_\rho^{II}(z, x; T) dz + e^{-\rho T} \int_0^\infty e^{-\nu z'} \mathcal{K}_{-\rho}^I(z', -x; T) dz' - e^{-\rho T} \int_{-k}^\infty e^{-\nu z'} \mathcal{K}_{-\rho}^I(z', -x; T) dz' \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

$$= \Psi_\rho^{II}(\nu; 0, x, T) + e^{-\rho T} [\Psi_{-\rho}^I(-\nu; 0, -x, T) - \Psi_{-\rho}^I(-\nu; -k, -x, T)] \quad (\text{E.10})$$

ここで $\mathcal{K}_\rho(z, x; T)$ は、 $x \leq 0, z > 0$ で $\mathcal{K}_\rho(z, x; T) = \mathcal{K}_\rho^{II}(z, x; T)$ 、 $x \leq 0, z \leq 0, z+x < 0$
で $\mathcal{K}_\rho(z, x; T) = \mathcal{K}_\rho^{IV}(z, x; T)$ に分岐するものであるが、 $\mathcal{K}_\rho^{II}(z, x; T)$ は $z = 0$ で定義され
ていないことに注意が必要である。実際、 $\mathcal{K}_\rho^{II}(z, x; T)$ の計算で用いる式 (3.21) の右辺の積
分は任意の $z > 0$ について収束するものの、 $z = 0$ のときには収束しない。式 (E.7-E.9) の
第 2 項の積分範囲は $z = 0$ を含む一方、第 1 項の積分範囲は $z = 0$ を含まないと考える必
要がある。

そこで、式 (E.10) の第 1 項である $\Psi_\rho^{II}(\nu; 0, x, T)$ は、

$$\Psi_\rho^{II}(\nu; 0, x, T) = \lim_{k \rightarrow 0} \Psi_\rho^{II}(\nu; k, x, T) = \lim_{k \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{\nu z} \mathcal{K}_\rho^{II}(z, x; T) dz$$

と定義する必要がある (前節と同じ)。

前節と同様、実際に $\Psi_\rho^{II}(\nu; 0, x, T)$ の数値計算を行う際には、関数 (E.2) を用いて t に関
する数値積分を行うが、その被積分関数の計算において引数 k を $k = 0$ とはせず、小さ
い値 ϵ_k (例えば 10^{-4}) を準備し、 $k = \epsilon_k$ と代入して計算を行う。

なお、式 (E.7-E.10) の変形を見ると、 $k \rightarrow -\infty$ のとき、式 (E.8-E.10) における最後の項
が無くなる形となり、以下の式が成り立つことがわかる。

$$\Psi_\rho^{IV}(\nu; -\infty, x, T) = \Psi_\rho^{II}(\nu; 0, x, T) + e^{-\rho T} \Psi_{-\rho}^I(-\nu; 0, -x, T)$$

これにより式 (2.10) が示された。

F 数値積分

式 (2.4), 式 (2.5), 式 (2.6) には積分が含まれており, 実際に計算結果を得るためには数値積分を行う必要がある. 本章では, 第 5 章の数値計算で用いた数値積分の手法や設定について述べる.

$$\text{収入現価} = qB \int_0^T e^{-\gamma t - \nu x} \Psi_\rho(-(\nu + \sigma); -\infty, -x, t) dt \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \Psi_\rho^I(\nu; k, x, T) &= e^{\nu x + \nu^2 T/2} N(d_1) - e^{-\nu x + \nu^2 T/2} N(d_3) \\ &+ e^{-\nu x} \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)}) e^{\nu^2 t/2}}{\sqrt{2\pi\rho}(T-t)^{3/2}} \left[\nu N(d_5) + t^{-1/2} N'(d_5) \right] dt \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\Psi_\rho^{II}(\nu; k, x, T) = \int_0^T \frac{(1 - e^{-\rho(T-t)}) e^{\nu^2 t/2}}{\sqrt{2\pi\rho}(T-t)^{3/2}} \left[\nu C_1 N(d_7) + C_2 N'(d_7) \right] e^{-x^2/[2(T-t)]} dt \quad (2.6)$$

F.1 収入現価に関する数値積分

収入現価の式 (2.4) の被積分関数は t に関して指数関数的に減衰する形に近く, 滑らかで性質の良い関数であるため, 単純な台形積分でさほど細かい刻み幅を取らなくても良い近似値が得られる. 効率化を目指すなら, 台形積分以外にも Simpson 公式や Gauss-Legendre 公式など, 様々な数値積分の手法が有効であると思われる. 第 5 章の数値計算例では, シンプルに刻み幅 $\Delta t = 0.5$ の台形積分を用いた.

式 (2.4) の被積分関数の値を $0 \leq t \leq T$ のそれぞれの t について計算し, 得られた関数形の例を図 8 に示す. 前述の通り滑らかな形状であることが確認できる.

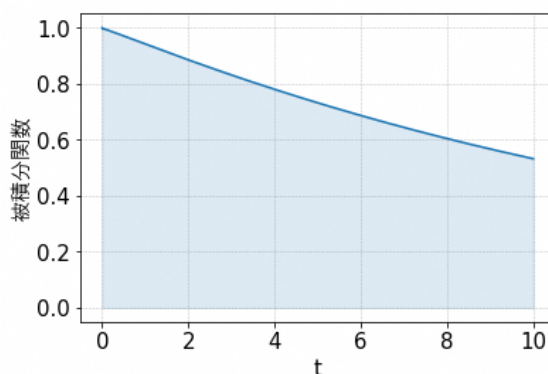


図 8: 式 (2.4) の被積分関数の形状

図 8 の計算前提は $B = 100$, $S = 100$, $T = 10$, $r = 0.01$, $q \approx 0.0033575088$, $\sigma = 0.05$, $\rho = -\log(0.9) \approx 0.10536052$ であり, これらは $B = 100$ と固定したこと以外は 5.1 節の収入現価の数値計算例に用いたものと同じである. この計算前提の下で, 式 (2.4) の被積分関数で直接的に用いられる引数は, 2.3 節の記号の定義より $x = 0$, $T = 10$, $\rho \approx 0.10536052$, $\nu \approx 0.10784983$, $\sigma = 0.05$, $\gamma \approx 0.015815793$ である.

F.2 二重指数関数型数値積分公式

式 (2.5), 式 (2.6) は以下の理由により, 精度の高い数値積分は容易ではない⁵⁾.

- (i) [端点特異性 1] 式 (2.5) の被積分関数は, $x = k = 0$ のとき $t = 0, T$ の両点において特異で, 特異点からの距離の $\frac{1}{2}$ 乗に反比例して ∞ に発散する. $x > 0$ または $k > 0$ のときは $t = T$ においてのみ特異で, 特異点からの距離の $\frac{1}{2}$ 乗に反比例して ∞ に発散する.
- (ii) [端点特異性 2] 式 (2.6) の被積分関数は, $k = 0$ のとき $t = 0$ において特異で, 特異点からの距離の $\frac{1}{2}$ 乗に反比例して ∞ に発散する. 他にも, (k, x) の定義域が式 (2.5) と重複する領域で, 同様に特異点からの距離の $\frac{1}{2}$ 乗に反比例する発散が起こり得るが, 上記 (i) の問題に帰着される.
- (iii) [端点付近の極値性] 式 (2.6) の被積分関数は, k が 0 ではないが 0 に近く, かつ $x < 0$ であるとき, $t = 0$ の近くにおいて局所的に非常に大きな値を取る (特異に近い). しかし 2.3 節で述べたように, 式 (2.7), 式 (2.8), 式 (2.9), 式 (2.10) に含まれる $\Psi_{\rho}^{II}(\nu; 0, x, T)$ の計算にあたっては, k を 0 に近い値として式 (2.6) に代入する必要があるため, このような計算は頻繁に起こり得る.

通常の台形積分を用いるならば, 特異点または局所的に大きな値を取る点の近くで数値積分の刻み幅を非常に小さくしなければならないが, 同時に被積分関数の呼び出し回数が多くなり, 計算コストが大きくなってしまう. これらの関数に対して効率的な数値積分を行うためには, 二重指数関数型数値積分公式が有効である [15].

二重指数関数型数値積分公式は Takahasi and Mori (1974) [16] によって提案され, Sugihara (1997) [17] によりある種の最適性を持つことが示された. 被積分関数の変数変換を行うことで, 少ない関数呼び出し回数で極めて精度の高い数値積分を行うことができる公式である.

以下, 式 (2.5), 式 (2.6) に二重指数関数型数値積分公式を適用した形を導出する. 式 (2.5), 式 (2.6) の被積分関数を $f(t)$ ($0 \leq t \leq T$) と置く. この積分は, 変数変換

$$t = \frac{T}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(s)\right) + \frac{T}{2}, \quad (0 \leq t \leq T, \quad -\infty < s < \infty) \quad (\text{F.1})$$

$$dt = \frac{T}{2} \frac{\frac{\pi}{2} \cosh(s)}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh(s)\right)} ds$$

を用いて以下のように書き換えられる.

$$\int_0^T f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{T}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(s)\right) + \frac{T}{2}\right) \frac{\frac{\pi}{2} \cosh(s)}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh(s)\right)} ds \quad (\text{F.2})$$

変数変換された新たな被積分関数に対し, 刻み幅 h の台形積分を行う.

$$\int_0^T f(t) dt \approx h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{T}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(kh)\right) + \frac{T}{2}\right) \frac{\frac{\pi}{2} \cosh(kh)}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh(kh)\right)} \quad (\text{F.3})$$

実際の計算機では無限和を取ることはできないので、級数を有限個 ($k = -N_-, \dots, 0, \dots, N_+$) で打ち切る。

$$\int_0^T f(t) dt \approx h \sum_{k=-N_-}^{N_+} f\left(\frac{T}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(kh)\right) + \frac{T}{2}\right) \frac{\frac{\pi}{2} \cosh(kh)}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh(kh)\right)} \quad (\text{F.4})$$

この式 (F.4) が、二重指数関数型数値積分公式を適用した結果である。

新たな被積分関数 $f\left(\frac{T}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(s)\right) + \frac{T}{2}\right) \frac{\frac{\pi}{2} \cosh(s)}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh(s)\right)}$ は、 s が 0 から離れると非常に速く 0 に減衰するため、 hN_- と hN_+ がある程度以上大きい値であれば、打ち切りによる誤差は十分小さくなる。

第 5 章の数値計算例では、簡易的に $h = 0.04$, $N_- = N_+ = 100$ ($hN_- = hN_+ = 4.0$) と設定した。なお、実務上ほとんどの場合は $hN_+ = hN_- = 3.0$ 程度で被積分関数はほぼ 0 となり、打ち切りによる誤差は実務上無視できるほど小さくなる。また刻み幅も、 $h = 0.1$ 程度で離散化による誤差 (式 (F.3) の左辺と右辺の差) は十分小さくなる。

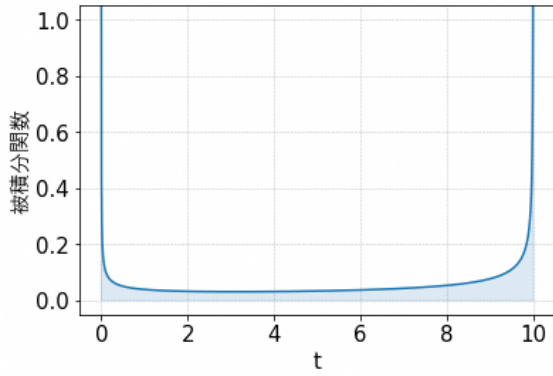
本来、 N_- と N_+ の設定は、打ち切りによる誤差が離散化による誤差と同程度になるように決めるのが最も効率的である。要求される精度を所与として計算コストを最小化する h , N_+ , N_- の選び方にはまだ議論の余地があるが、いったん本研究では踏み込まない。

F.3 二重指数関数型数値積分公式における変数変換前後の関数形

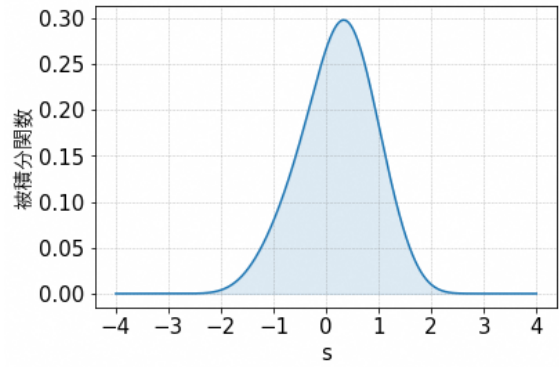
式 (2.5) に含まれる被積分関数と、これを式 (F.2) のように変数変換した新たな被積分関数の形状の例を図 9 に示す。図 9 は前節 (i) [端点特異性 1] の $x = k = 0$ の場合に対応している。変数変換前の被積分関数は両端 $t = 0, T$ で ∞ に発散しているが、変数変換後は s が 0 から離れると急速に減衰する形となっており、 $|s|$ が 3 を超える領域で関数の値はほぼ 0 である。積分値 (網掛け部分の面積) は変数変換の前後で変わらない。変数変換後の関数について台形積分を行うことで、効率的かつ高精度に積分値を求めることができる。

なお、(i) [端点特異性 1] の $x > 0$ または $k > 0$ の場合や (ii) [端点特異性 2] の場合は、特異点が片側の端点のみになる等の違いはあるが、同様に変数変換により特異性が解消される。図 9 の計算前提は $B = 100$, $S = 100$, $T = 10$, $K = 100$, $r = 0.01$, $q \approx 0.0033575088$, $\sigma = 0.05$, $\rho = -\log(0.9) \approx 0.10536052$ であり、これらは $B = 100$ と固定したこと以外は 5.1 節の給付現価の数値計算例に用いたものと同じである。この計算前提の下で、式 (2.6) の被積分関数で直接的に用いられる引数は、2.3 節の記号の定義より $x = 0$, $k = 0$, $T = 10$, $\rho \approx 0.10536052$, $\nu \approx 0.10784983$ である。

同様に、式 (2.6) に含まれる被積分関数と、これを式 (F.2) のように変数変換した新たな被積分関数の形状の例を図 10 に示す。これは前節 (iii) [端点付近の極値性] の場合に対応している。図 10a は一見 $t = 0$ で ∞ に発散しているように見えるが、実はそうではない。図 10b は変数変換前の関数を $t = 0$ 付近で拡大したものである。 $t = 0$ 付近の局所的な領域で関数は非常に大きい値を取っているが、あくまで有限の大きな値であり、 $t \rightarrow 0$ で 0 に戻って

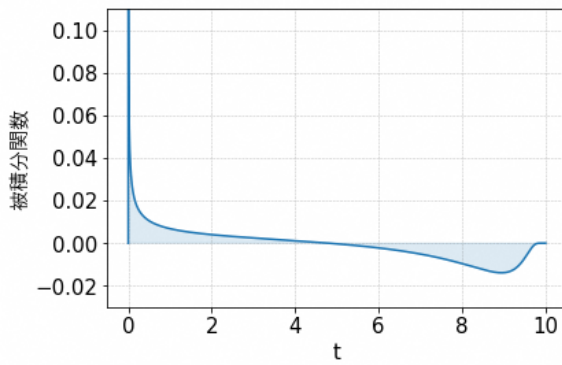


(a) 変数変換前

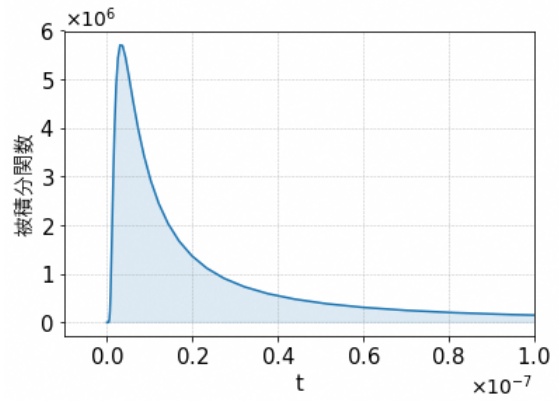


(b) 変数変換後

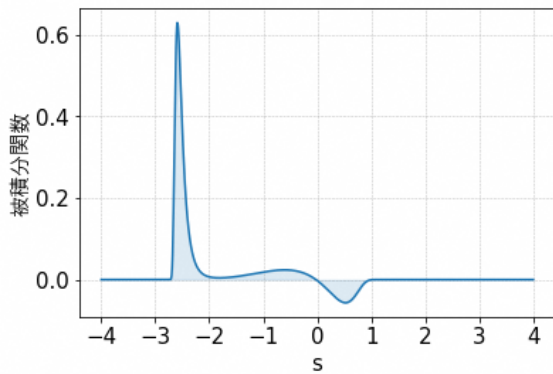
図 9: 式 (2.5) ($x = k = 0$) の被積分関数の形状



(a) 変数変換前



(b) 変数変換前 ($t = 0$ 付近を拡大)



(c) 変数変換後

図 10: 式 (2.6) ($x < 0, k = 0.0001$) の被積分関数の形状

いる。この鋭いピーク形状は、このままでは数値積分を行うことが困難であるが、図 10c のように変数変換を行うことでピークを緩やかにし、容易に台形積分ができるようになる。なお k が 0 に近づくほど、このピークは細く長く、またピークの位置は $t = 0$ に近くなる。

図 10 の計算前提として、式 (2.6) の被積分関数で直接的に代入した引数は、 $\rho \approx 0.10536052$ 、 $\nu \approx -0.15784983$ 、 $k = 0.0001$ 、 $x = -\frac{1}{0.05} \log\left(\frac{110}{100}\right) \approx -1.9062036$ 、 $T = 10$ 、である。このような計算 (式 (2.6) の関数呼び出し) は、例えば $B = 100$ 、 $S = 110$ 、 $T = 10$ 、 $K = 100$ 、 $r = 0.01$ 、 $q \approx 0.0033575088$ 、 $\sigma = 0.05$ 、 $\rho = -\log(0.9) \approx 0.10536052$ という計算前提の下で収入現価の式 (2.4) の計算を行う際、その被積分関数 $\Psi_\rho(-(\nu + \sigma); -\infty, -x, t)$ の $t = T = 10$ での評価を行い、呼び出される式 (2.10) の右辺第 1 項 $\Psi_\rho^{II}(\nu; 0, x, T)$ を計算する際に起こり得る。

F.4 桁落ちに関する注意点

二重指数関数型数値積分公式を実装するにあたっては、桁落ちに関する注意点がある。浮動小数点数として値を管理する計算機において、非常に近い値同士の引き算 (答えがほぼ 0 になるような加減算) を行うと、差として得られる数値の有効桁数が落ちることがあり、この現象は桁落ちと呼ばれる。

式 (2.5)、式 (2.6) は t および $T - t$ をいくつか含む形になっているが、式 (F.1) より t および $T - t$ は以下の形で書ける。

$$t = \frac{T}{2} \left(1 + \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(s)\right) \right) \quad (\text{F.5})$$

$$T - t = \frac{T}{2} \left(1 - \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(s)\right) \right) \quad (\text{F.6})$$

これらの式に基づいて実装を行うと、 s が -3 程度より小さいとき (t が 0 に近いとき)、 $\tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(s)\right)$ はほぼ -1 となり、式 (F.5) の右辺の計算で桁落ちが起きやすくなる。また s が 3 程度より大きいとき (t が T に近いとき)、 $\tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(s)\right)$ はほぼ 1 となり、式 (F.6) の右辺の計算で桁落ちが起きやすくなる。つまり、式 (2.5)、式 (2.6) に含まれる t および $T - t$ の値を計算するだけで桁落ちが起きやすい形になっている。さらに式 (2.5)、式 (2.6) では t および $T - t$ が分数の分母としても用いられているため、桁落ちによる誤差が拡大する可能性や、0 除算によるエラーが生じる可能性がある。

対策として、 t および $T - t$ を、双曲線関数の公式を用いて引き算が生じない形に書き換え、実装するにあたっては書き換え後の数式に基づいてコードを書けばよい [18] [19]。これにより、近い値同士の引き算を行うことなく t と $T - t$ の正確な値を得ることができる。

$$t = \frac{T}{2} \left(1 + \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(s)\right) \right) = \frac{T}{2} \frac{\exp\left(\frac{\pi}{2} \sinh(s)\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(s)\right)}$$

$$T - t = \frac{T}{2} \left(1 - \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(s)\right) \right) = \frac{T}{2} \frac{\exp\left(-\frac{\pi}{2} \sinh(s)\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(s)\right)}$$

参考文献

- [1] 日本アクチュアリー会. 変額年金保険等の最低保証リスクに係る責任準備金の積立等について. 日本アクチュアリー会 会報別冊, 第 213 号, 2003.
- [2] 日本アクチュアリー会. テキスト『保険 1 (生命保険)』第 5 章 変額年金保険. 2009.
- [3] 井澤佑介. 変額年金の最低保証オプションに関する一考察. 日本アクチュアリー会 会報, 第 67 号, pp. 122–149, 2014.
- [4] Peter H. Sun. Variable annuity dynamic lapse study: A data mining approach. *Milliman Research Report*, 2011.
- [5] National Association of Insurance Commissioners. *Valuation Manual*. Jan. 1, 2019 edition, 2019.
- [6] Vadim Linetsky. Step options. *Mathematical Finance*, Vol. 9, No. 1, pp. 55–96, 1999.
- [7] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, second edition, 1991.
- [8] 松山直樹. 変額年金の数理と ALM. JARIP 平成 21 年度第 2 回研修会, 2009.
- [9] 黒田耕嗣, 松山直樹. 生命保険数理への確率論的アプローチ. 培風館, 2010.
- [10] 金融庁. 「変額年金保険等の最低保証リスクに係る責任準備金等に関する告示及び事務ガイドライン」(案) に対するパブリックコメントの結果について, 2004.
<https://www.fsa.go.jp/news/newsj/16/hoken/f-20041227-3.html>.
- [11] 金融庁. 責任準備金の積立方式及び計算基礎率を定める件 (平成八年二月二十九日大蔵省告示第四八号).
<https://www.fsa.go.jp/common/law/kokuji/19960229zai48.pdf>.
- [12] Steven E. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance II : Continuous-Time Models*. Springer, 2004.
- [13] Andrei N Borodin and Paavo Salminen. *Handbook of Brownian Motion: Facts and Formulae*. Springer, 2002.
- [14] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, 1964.
- [15] 杉原正顕, 室田一雄. 数値計算法の数理. 岩波書店, 2012.

- [16] Hidetosi Takahasi and Masatake Mori. Double exponential formulas for numerical integration. *Publ.RIMS Kyoto Univ.*, Vol. 9, pp. 721–741, 1974.
- [17] Masaaki Sugihara. Optimality of the double exponential formula-functional analysis approach. *Numerische Mathematik*, Vol. 75, pp. 379–395, 1997.
- [18] 森正武. FORTRAN77 数値計算プログラミング. 岩波書店, 1988.
- [19] 戸田英雄, 小野令美. 数値解析における一つの話: DE 変換数値積分公式の有効性を発揮させるための注意. *日本物理学会誌*, Vol. 37, No. 8, pp. 655–663, 1982.

注

- ¹⁾ 厳密には, 会計上のテクニカルな操作として, 群団の責任準備金が負であるときは 0 として置き換えられることにより, 責任準備金相当額が負である契約の解約が発生しても会計上の損失には繋がらない可能性があるが, 少なくとも経済価値的な立場からは損失が発生していると言える.
- ²⁾ 群団の責任準備金が負であるときは 0 として置き換えるという, 会計上の操作を無視して考える.
- ³⁾ 厳密には Brown 運動は瞬間的に閾値を無限回横切っているため「回数」という表現は正しくないが, イメージのしやすさを優先してこの表現を用いた.
- ⁴⁾ Linetsky (1999) では $E_x \left[e^{-\rho \bar{T}}; W_T \in dz \right]$ という表記を初めから用いており, デルタ関数を用いた表記 $E_x \left[e^{-\rho \bar{T}} \delta(W_T - z) \right] dz$ は現れないが, 本稿では補足のために導入した.
- ⁵⁾ Python の `scipy.integrate.quad` 関数では, (i)(ii) の端点特異性については問題なく積分を行えるが, (iii) の端点付近の極値性については対応が難しいようである. Mathematica および Wolfram 言語では, 数値積分を行う関数の中で二重指数関数型数値積分公式が使用可能で, (i)(ii)(iii) の全てに対応できる. 現状, Mathematica・Wolfram 言語以外を使用する際には, 明示的に二重指数関数型数値積分公式を実装する必要があると思われる.

Reserve Valuation for the Guaranteed Minimum Benefit in Variable Annuities under the Assumption for the Lapse Intensity to be a Step Function of the Account Value

Masaya Tsukamoto
The Dai-ichi Life Insurance Company, Limited

Abstract

This paper proposes a formula to evaluate the reserve for the guaranteed minimum benefit (GMB) in variable annuities under the assumption that the lapse intensity is a positive constant when the account value is above a threshold, and there is no lapse when the account value is below the threshold.

Assuming this dynamic lapse structure, the pricing formula of the step option proposed by Linetsky (1999) can be applied to calculate the present value (PV) of the GMB. The option guaranteeing the minimum benefit is regarded as an option whose payoff decays depending on the occupation time, which is defined as a time during which the Brownian motion stays above a threshold. Then, the PV of the GMB can be represented as a mathematical formula which contains a single definite integral. Similarly, the PV of the premium income associated with the GMB can be represented as a mathematical formula which contains double definite integrals. These definite integrals can be efficiently calculated by numerical integration methods such as the double exponential formula.

This paper, referring to Linetsky (1999), derives formulae for the PV of the GMB and the PV of the premium income associated with the GMB. Numerical examples using these formulae are also provided. The results imply that the assumed dynamic lapse structure may cause insufficiency of the reserve, which was not expected by the standard valuation method with no lapse assumed. It may be due to the tendency of the policyholders to withdraw their funds only when the account value is higher. At that time more premium revenue is expected and the guaranteed benefit is less likely to be paid.

Key words: variable annuity, guaranteed minimum benefit, reserve, dynamic lapse, step option, occupation time