

死亡率の将来推計の一方法

— 数学的モデルを用いた死亡率の将来推計 —

荒井 昭

概要

本論文では、生命関数の数学的モデルとして直列 Weibull 分布モデルを選択し、

- ・ 粗死亡率の直列 Weibull 分布モデルによる近似
- ・ 「直列 Weibull 分布モデルの母数を将来推計する方法」による死亡率の将来推計を試行する。

キーワード：国民生命表、直列 Weibull 分布モデル

1 はじめに

死亡率は、われわれアクチュアリー業務である年金や生命保険の基礎の一つであるが、この死亡率は不変ではなく時間経過と共に変化している。アクチュアリーが本来必要とするのは、過去の 1 時点における確定した死亡率ではなく、掛金払い込み、年金支払い等の、将来の各時点における死亡率である。従って、死亡率の将来推計はわれわれアクチュアリーにとって重要な意味を持っている。

ところで、死亡率の将来推計には、現在、国際的にも標準的な方法として Lee-Carter モデルが使われている。この Lee-Carter モデルは、「死亡率の全体水準の変化に比してどの年齢は変化が大きく、どの年齢は変化が小さい」という年齢別影響度合いを時間経過に対して不変とするものである。

一方、日本の死亡率曲線の変化に対し、Lee-Carter モデルが適合するのであろうか、すなわち、「年齢別影響度合いを時間経過に対して不変とする」ことが適合するであろうか、という疑問を持つ。

例えば、及川桂[2006]に次の記載がある。

日本人男性の死亡率の改善は、世代ごとに異なっており、同じ年齢でも時代によって大きく改善する時代とほとんど改善が進まない時代が繰り返されて、現在の死亡率に至って分ることが分かる。

より具体的に述べると、昭和 1 桁生まれ世代が 70 歳～80 歳代である近年における年齢別影響度合いが、現在の 50 歳代の世代が 70 歳～80 歳代となる 20～30 年後においては適合しないであろうと筆者は直感的に推測する。

本論文はこのような問題意識に基づき、日本の死亡率曲線の変化を良く表現できるような数学的モデルを用いた死亡率の将来推計方法に着目する。

ところで、「生命関数の数式近似」研究である荒井昭[2001]では、「直列 Weibull 分布モデルは、乳幼児から高齢者までの広範囲の年齢において生命関数の数学的モデルとして適合する」ことが示されている。なお、この直列 Weibull 分布モデルは古川俊之[1996]の混合ワイブル分布モデルをヒントとしたものである。

本論文では、荒井昭[2001]を踏襲し、数学的モデルとして「直列 Weibull 分布モデル」を選択する。また、小暮厚之[2004]を参考にして分散安定化変換を用いることにより、

- ・ 国民生命表の粗死亡率の直列 Weibull 分布モデルによる近似を行う。

また、その近似結果を受けて、

- ・ 「直列 Weibull 分布モデルの母数を将来推計する方法」による死亡率の将来推計を試行する。

本論文では、特別な記載が無い場合には、「国民生命表」とは男を指すものとする。また、「当てはめ」と「近似」を同一のものとして扱い、厳密には「数学的モデルを表す曲線（あるいは数学的関数）を当てはめる」と表現したほうが良い場合であっても、単に「数学的モデルを当てはめる」、あるいは「数学的モデルで近似する」のように表現する。

2 死亡率

2.1 機械の故障率曲線と人の死亡率曲線

古くから、人の死亡率曲線は、機械の故障率曲線と関連づけて説明されることが多い。例えば、近藤次郎[1970]では、故障率曲線の説明にあわせて男女別死亡率曲線の図を掲げている。本論文でも、この手法を用いることとする。

故障率曲線について近藤次郎[1970]を一部引用して述べると次のようになる。

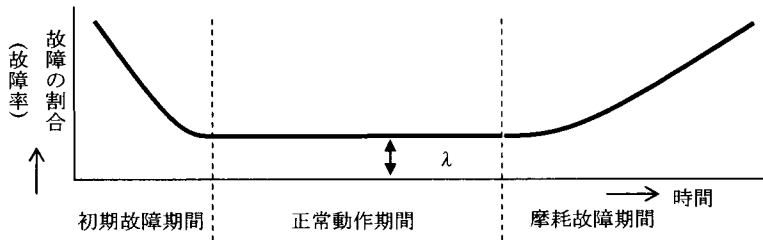
一般に複雑なシステムの寿命特性曲線は図 13.5 のような形になり、浴槽型曲線とも呼ばれている。

曲線の左側の故障率の高い部分を初期故障期間という。これは部品の品質がそろっていないか、寿命の短いものが混じっている場合が多く、初期の運転中に除去される。(中略)

このあと機器は正常動作期間にはいる。この期間は故障率 λ はほぼ一定で、故障は偶然的に発生し管理することのできない性質のものである。(中略)

曲線の右側は摩耗故障期間または疲労故障期間と呼ばれ、部品の寿命がきてだんだんと故障率が增大する期間である。

*近藤次郎[1970]における「図 13.5 一般寿命特性曲線」は概略次のとおりである。



人の死亡率曲線も浴槽型曲線であり、形状が機械の故障率曲線と類似している。誕生直後の短い期間は比較的多くの人が死亡するが、成長と共に死亡の発生は急激に減少する。次の期間が青少年期であり比較的低死亡率が低い。しかし、やがて高齢に向かうと共に徐々に死亡率が上昇する。

2.2 死亡率と死力

本論文では年齢 x 歳の死亡率を q_x 、その推定量および推定値を \hat{q}_x 、死力を μ_x と表記する。

同時出生集団（出生コーホート）の寿命時間を表す確率変数を X とし、 X の確率密度関数、分布関数をそれぞれ $f(x)$ 、 $F(x)$ とする。このとき、

$$\begin{aligned} \text{死亡率 } q_x &= P(x \leq X < x+1 | X \geq x) \\ &= \frac{F(x+1) - F(x)}{1 - F(x)} \\ &= 1 - \frac{1 - F(x+1)}{1 - F(x)} \end{aligned}$$

また、

$$\text{死力 } \mu_x = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

であり、 $q_x = 1 - e^{-\int_0^1 \mu_{x+t} dt}$ となる。

ちなみに、保険数学で死力と呼ばれている $f(x)/(1-F(x))$ は、工学では瞬間故障率、医学ではハザード関数と呼ばれることがある。

2.3 生命表

生命表とは「対象人口集団」の「対象観測期間」における死亡の状況を死亡率、死力等の年齢の関数（生命関数）を用いて表現したものである。

日本で作成されている代表的な生命表には、

- ・ 国勢調査による日本人人口（確定値）、人口動態統計（確定数）を基に厚生労働省が作成している「国民生命表」
- ・ 保険業法第 116 条で規定されている標準責任準備金の計算基礎の一つとして日本アクチュアリー会が作成している「生保標準生命表」

がある。なお、本論文では基資料が公表されている国民生命表を材料として議論を進める。

2.4 粗死亡率

本論文では年齢 x 歳の粗死亡率を q'_x と表記する。節 2.3 で紹介した生命表における死亡率 q_x は、粗死亡率 q'_x すなわち観測値そのものではなく、粗死亡率 q'_x に補整を施した結果である。

粗死亡率 q'_x の算出について小暮厚之[2004]を一部引用して述べると次のとおりとなる。

生命表を作成する場合、年齢は 1 年間隔に離散化されるのが一般的である。 x 歳の年齢の人を e_x 人観測したとき 1 年以内に d_x 人が死亡したとすると、 x 歳の人の粗死亡率は $q'_x = d_x / e_x$ と算出される。

* 本論文で「 q'_x 」と表記する粗死亡率を、小暮厚之[2004]では「 q_x 」と表記している。

年齢 x における粗死亡率 q'_x を表す確率変数を $Y (= q'_x)$ とする。このとき Y は年齢 x の他にも、諸要因に影響される。しかし、その諸要因を、「非常に数が多く、しかも偶発的に発生する」ものと見なすことができるならば、その諸要因から生ずる効果は偶然変動による不規則な乱れと見なすことができる。

粗死亡率 q'_x を表す確率変数 Y と死亡率 q_x の関係を定式化すると次のとおりとなる。

$Y (= q'_x)$ を、年齢 x に基づいて決定される死亡率 q_x と偶然変動による不規則な乱れ Z の和として、

$$Y = q_x + Z$$

と表す。 Y 、 Z の従う分布は一般には未知である。 x は実現値であり、既に確定した値を取っている。（ Y 、 Z を大文字、 x を小文字で表したのは、 Y 、 Z は確率変数であるが、 x は確率変数と考えていないからである。） また、粗死亡率 q'_x の「補整」とは、この偶然変動 Z を除去する過程のことである。

x_1, x_2, \dots, x_n の n 年齢についてそれぞれ考え

$$Y_i = q_{x_i} + Z_i \quad (i=1, \dots, n)$$

と表す。

ここで、確率変数 Y_i の実現値 y_i の、推定値 $\hat{y}_i (= \hat{q}_{x_i})$ からのずれ

$$y_i - \hat{y}_i (= q'_x - \hat{q}_x) \quad (i=1, 2, 3, \dots, n)$$

は実現値 y_i が年齢 x_i で説明されずに残った分であり一般に残差と呼ばれる。

粗死亡率 q'_x を表す確率変数 Y は、年齢 x により、その分散 $\text{Var}(Y)$ の値が大きく異なり、それが粗死亡率 q'_x の取り扱いを困難にしている理由の一つとなっている。

3 国民生命表の死亡率算定方法

3.1 国民生命表

国民生命表は、国勢調査結果による「基準日における人口」と毎年の「人口動態統計」を基礎にして作成される。また、国勢調査は5年に1回であるため、国民生命表も5年に1回作成されている。

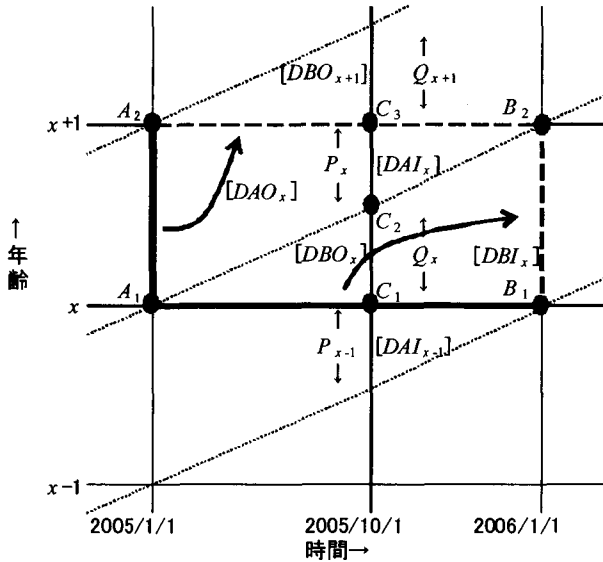
本章では、章8、章10で具体的数値例として用いる国民生命表の1歳以上の死亡率 q_x 算定方法について、厚生労働省大臣官房統計情報部[2007]を基に、現時点における最新の国民生命表である第20回生命表（平成17年）を例として概要を紹介する。なお、第15回生命表（昭和55年）～第19回生命表（平成12年）においても死亡率 q_x 算定方法は同様である。一方、第14回生命表（昭和50年）以前においては若干異なっている。そのため、本論文では章8、章10で具体的数値例として第15回生命表～第20回生命表を用いる。

3.2 1歳以上の粗死亡率の算出方法

図のように横軸に時間、縦軸に年齢を取る。線分 XY を横切る生命線（各個人の出生点と死亡点とを結んだもの）の数を $N(XY)$ で表す。第20回生命表作成においては粗死亡率 q'_x ($x=1, 2, \dots$) を、

$$q'_x = 1 - \frac{N(B_1 B_2)}{N(A_1 B_1)} \cdot \frac{N(A_2 B_2)}{N(A_1 A_2)}$$

により求めている。



$N(C_1C_2)$ 、 $N(C_2C_3)$ は、2005年(平成17年)10月1日現在の日本人の人口であるから、国勢調査の結果得られたものを用い、それぞれ Q_x 、 P_x で表す。また、 $\square A_2A_1C_2C_3$ 内の死亡点の数を DAO_x 、 $\triangle C_3C_2B_2$ 内の死亡点の数を DAI_x 、 $\triangle C_2A_1C_1$ 内の死亡点の数を DBO_x 、 $\square C_2C_1B_1B_2$ 内の死亡点の数を DBI_x と表すと、各線分を通る生命線の数は、

$$\begin{aligned}
 N(A_1B_1) &= P_{x-1} + Q_x + DBO_x \cdot DAI_{x-1} \\
 N(B_1B_2) &= P_{x-1} + Q_x \cdot DAI_{x-1} \cdot DBI_x \\
 N(A_1A_2) &= P_x + Q_{x+1} + DAO_x + DBO_{x+1} \\
 N(A_2B_2) &= P_x + Q_{x+1} \cdot DAI_x + DBO_{x+1}
 \end{aligned}$$

となる。

3.3 1歳以上の死亡率の補整方法

1歳以上の死亡率 q_x の補整方法は

① 1次補整

粗死亡率 q'_x について Greville の3次9項式による補整を行う。

② 2次補整

1次補整を行った後の死亡率を用いて粗死力 μ'_x を求め、男は85歳～102歳、女は90歳～102歳の部分について粗死力 μ'_x に Gompertz-Makeham 関数を当てはめることにより、男は90歳から、女は95歳から更に死亡率 q_x の補整および延長を行う。

この2つの過程から構成されている。

4 日本の死亡率曲線の変化

死亡率曲線は、時間経過と共に改善されているのが一般的である。図 1 に第 15 回生命表（昭和 55 年）から第 20 回生命表（平成 17 年）までの国民生命表の死亡率 q_x をグラフに示した。図 1 から、日本の近年における死亡率曲線も、時間経過と共に改善されていることが見受けられる。

ところで、死亡率曲線の変化に関連して堀内四郎[2010]に次の記載がある。

20 世紀の経済先進諸国における寿命伸長は、二種類の異なる寿命転換の結果であることは、いくつかの論文において論述されている（堀内、2001）。20 世紀前半においては、感染症・寄生虫・栄養不足・妊娠や出産の合併症などに起因する死亡率が、とくに乳幼児や若い成人層で大きく低下したが、20 世紀後半には、心臓病、脳血管疾患、いくつかの種類の癌、肝臓・腎臓・呼吸器の慢性疾患などによる死亡率の、とくに中高年における顕著な減少が始まり、現在も進行中である。（中略）日本では、第一の寿命転換が多くの経済先進諸国よりも遅れていたこともあって、1950 年代および 1960 年代には、両方の転換が、並列して進行した（Horiuchi and Wilmoth, 1998）。

*堀内四郎[2010]における「堀内、2001」は「死亡パターンの歴史的変遷」、『人口問題研究』57-4 であり、「Horiuchi and Wilmoth, 1998」は「Deceleration in the age pattern of mortality at older ages」, *Demography*35(4)である。ただし、筆者はこれらの論文を見ることができなかったので文献表には含めない。

また、国立社会保障・人口問題研究所[2006b]に次の記載がある。

近年における高齢での死亡率変化は、死亡率曲線が高齢側にシフトしている動き、すなわち死亡が遅延している動きと見ることが可能である。このように、わが国の近年の平均寿命の延びの要因の一つである高齢死亡率改善は、死亡率曲線の年齢シフトによる変化と捉えることができ、こうした傾向は将来の死亡状況を見直す上で重要なポイントとなる。

上で紹介した堀内四郎[2010]および国立社会保障・人口問題研究所[2006b]によれば、日本の近年における死亡率曲線の変化の特徴として、時間経過と共に、

特徴 1：乳幼児や若い成人層で死亡率 q_x が大きく低下している

特徴 2：高齢層で死亡発生が遅延している

を挙げることができる。この特徴 2 は、年齢遅延要素を取り入れることで死亡率 q_x の将来推計方法を改善できる可能性を示唆している。

5 死亡率の将来推計と Lee-Carter モデル

5.1 死亡率の将来推計方法

死亡率 q_x の将来推計方法に関して国立社会保障・人口問題研究所[2006b]を一部引用して述べると次のとおりとなる。

一般的に、将来死亡率の推計には、大きく分けて、経験的方法、数学的方法、そしてリレーショナルモデルの3種類の方法が考えられる。

経験的方法では、既存の人口によって既に経験されている年齢別死亡率を用いる。死亡データの精度の低い発展途上国での平均余命の推定や将来推計のために、精度が比較的高い現実の生命表をパターン毎に分類して作成されたモデル生命表方式が一例である。モデル生命表は、現在でも人口統計の整備が遅れている国や地域での生命表を推定する際になどに用いられる。

(中略)

数学的方法では、既存の死亡率統計の傾向を数学関数によって当てはめ、補外することで将来の死亡率を推計する。関数を当てはめるデータとして何を用いるかによって様々なバリエーションが考えられる。

(中略)

経験的方法と数学的方法に対して、リレーショナルモデル法はそれらを折衷した方式と言える。リレーショナルモデルでは、いくつかの経験的な生命表の関係を少数のパラメータで数理的に記述し、そのパラメータを将来に向けて投影することによって将来の生命表を推計する。

本論文では、この3種類の方法のうち、「数学的方法」と表記されている「数学的モデルを用いた死亡率の将来推計」を試行する。

5.2 Lee-Carter モデル

本節では、リレーショナルモデルの一種であり、現在、国際的にも死亡率 q_x の将来推計の標準的な方法として使われている Lee-Carter モデルを紹介する。

Lee-Carter モデルは死亡率変化を以下の式で説明するものである。

$$Y_{x,t} = a_x + k_t \cdot b_x + Z_{x,t}$$

ここで、

$Y_{x,t}$: 年齢 x 、時点 t の死亡率 q_x の対数値を表す確率変数

a_x : 基準となる年齢別死亡率パターン (基準となる年齢別死亡率 q_x の対数値)

k_t : 時点 t における死亡率の全体的水準。死亡指数と表記される。(a_x からの変化の全

体的な水準)

b_x : k_t が変化するときの年齢別死亡率変化率パターン (k_t の変化に対する年齢別影響度合い)

$Z_{x,t}$: 平均 0 の正規分布に従う残差項を示す。

基準となる年齢別死亡率パターン a_x 、年齢別死亡率変化率パターン b_x は、いずれも時間経過に対して不変であり、確定した値である。一方、死亡指数 k_t は時間経過と共に変化する母数である。 $Z_{x,t}$ が残された不規則変動を説明する確率変数であるが、0 を平均とする正規分布を想定するため、 $Y_{x,t}$ の平均的推移からは消去される。

Lee-Carter モデルの特性は、死亡指数 k_t のみの変化で、時間経過に対して年齢 x 毎に異なる死亡率変化を説明することが可能な点である。

5.3 Lee-Carter モデルの問題点

Lee-Carter モデルは、数少ない母数で時間経過に対する死亡率変化を良く説明できるモデルであるが、日本の死亡率 q_x の将来推計を行うにあたっては問題点もある。

石井太[2010]を一部引用して Lee-Carter モデルの問題点を述べると次のとおりとなる。

リー・カーター・モデルでは、 b_x が固定されているため、基本的には死亡率改善を死亡率の低下と捉えるモデルである。したがって、近年のわが国で見られるような、死亡の遅延、すなわち、死亡率曲線の右方向へのシフトを十分に表現できない。

「死亡率曲線の年齢シフトを表現する」という課題に対して、石井太[2006b]は「年齢シフトモデル」というモデルで死亡率変化を説明している。石井太[2006b]の年齢シフトモデルは、死亡率曲線の年齢シフトを表現できるように、年齢変換を行ってから Lee-Carter モデルを適用するように改善したモデルである。すなわち、Lee-Carter モデルの特性を発揮させつつ、年齢別死亡率変化率パターン b_x を改善したモデルであると言することができる。なお、この年齢シフトモデルは、国立社会保障・人口問題研究所が平成 18 年 12 月に行った将来推計（国立社会保障・人口問題研究所[2006b]）に用いられている。

一方、本論文では、この「死亡率曲線の年齢シフトを表現する」という課題に対し、Lee-Carter モデルを活用するのではなく、数学的モデルを用いた方法を試行する。

6 生命関数の数学的モデル

6.1 数学的モデル

一般に、現実の統計的事象を取り扱うために、各種の数学的モデルが用いられる。例えば、統計的事象に関する各種の変数の間に、「一定の関数関係+誤差」を想定するというこ

とは頻繁に行われているが、このときの関数関係は数学的モデルである。ここで「想定」と表現しているように、数学的モデルは取り扱う統計的事象から必然的に設定されてしまう場合は少ない。むしろ実務者が積極的に数学的モデルを選択しなければならない場合が多い。

ところで、数学的モデルは「統計的事象に関する課題を解決する」という目的のために用いられるものであるが、その課題は一つではない。それゆえ、それぞれの目的に対し実用上十分な近似となる数学的モデルを選択しなければならない。一方、実務者が変数間の関数関係を説明する際は、できるだけ簡単に説明しようと努めるから、「より簡単な曲線」の使用が好まれる。なお、本論文で「簡単」とは、例えば、「回帰母数の個数が小さい」のように、回帰母数の推定が容易であることを指す。より複雑な曲線を定めるためには、より多くの情報が必要となるが、現実の情報量は限られている。そのため、それぞれの目的に対し実用上十分な近似となっている数学的モデルの中で、より簡単な数学的モデルが、より高い価値を持って選択されることになる。

ところで、与えられた標本に当てはまる近似曲線を見つける過程は、一般に、「曲線の当てはめ」と呼ばれる。また、曲線の当てはめの主要な目的は、ある変数（独立変数）から他の変数（従属変数）を推定することである。この推定は、一般に回帰と呼ばれる。

6.2 生命関数の数学的モデル

死亡率 q_x 、死力 μ_x 等の生命関数は、何らかの数学的モデルに適合し、その数学的モデルを表す数学的関数で近似できると一般に考えられている。また、このときの数学的モデルは死亡法則と呼ばれている。例えば、Bowers [1986]では、'Mortality and Survival Functions under Various Laws' という表において 4 つの死亡法則が示されている。

Mortality and Survival Functions under Various Laws			
Originator	μ_x	$s(x)$	Restrictions
de Moivre (1729)	$(\omega - x)^{-1}$	$1 - \frac{x}{\omega}$	$0 \leq x < \omega$
Gompertz (1825)	Bc^x	$\exp[-m(c^x - 1)]$	$B > 0, c > 1, x \geq 0$
Makeham (1860)	$A + Bc^x$	$\exp[-Ax - m(c^x - 1)]$	$B > 0, A \geq -B, c > 1, x \geq 0$
Weibull (1939)	kx^n	$\exp(-ux^{n+1})$	$k > 0, n > 0, x \geq 0$

* $s(x) = {}_x p_0$, $m = B/\log c$, $u = k/(n+1)$ である。

* 本論文で Gompertz-Makeham と記載している死亡法則を Bowers [1986]では

Makeham と記載している。

ところで、乳幼児から高齢者までの広範囲の年齢において、現実の生命関数を数学的モデルで近似したものはあまり見られない。例えば、第 20 回生命表作成において、1 次補後の死亡率を用いて求めた粗死力 μ_x に Gompertz-Makeham 曲線の当てはめを行っているが、これは男 85 歳～102 歳、女 90 歳～102 歳のような超高齢者部分においてのみ当てはめを行ったものである。

広範囲の年齢において現実の生命関数を数学的モデルで近似したものがあまり見られない理由は、広範囲の年齢においては、簡単な数学的モデルに生命関数が良く適合しなかったためであろうと筆者は推測する。

一方、近年の計算機の hardware、software の進歩はすさまじく、従前では簡単でなかった回帰母数の推定が、最近では簡単に変わっている事例もある。もし「実用上十分な近似である」数学的モデルの回帰母数を推定できれば、当該数学的モデルを用いた死亡率 q_x の将来推計は「将来推計の一方法」になると筆者は考える。さて、「生命関数の数式近似」研究である荒井昭[2001]では、「直列 Weibull 分布モデルは、乳幼児から高齢者までの広範囲の年齢において生命関数の数学的モデルとして適合する」ことが示されている。そこで、本論文では、荒井昭[2001]を踏襲し、数学的モデルとして「直列 Weibull 分布モデル」を選択する。

6.3 Weibull 分布

本節では、直列 Weibull 分布モデルの基礎となる Weibull 分布を整理する。節 6.2 で紹介したとおり、Weibull 分布は、死亡率曲線の数学的モデルとして一般に用いられている。また、故障率曲線の数学的モデルとしても一般に用いられている。例えば、節 2.1 で紹介した近藤次郎[1970]でも Weibull 分布に関する解説が示されている。

Weibull 分布の確率密度関数 $f(x; m, \eta, \gamma)$ 、分布関数 $F(x; m, \eta, \gamma)$ 、死力 μ_x の一般形はそれぞれ

$$f(x; m, \eta, \gamma) = \frac{m(x-\gamma)^{m-1}}{\eta} \exp\left\{-\frac{(x-\gamma)^m}{\eta}\right\} \quad (x \geq \gamma)$$

$$F(x; m, \eta, \gamma) = 1 - \exp\left\{-\frac{(x-\gamma)^m}{\eta}\right\} \quad (x \geq \gamma)$$

$$\mu_x = \frac{m}{\eta}(x-\gamma)^{m-1} \quad (x \geq \gamma)$$

である。 ($m > 0$, $\eta > 0$)

ここで

m は形状母数と呼ばれ、故障の型を決定する。すなわち

$m > 1 \rightarrow$ 摩耗故障型 (死力 μ_x は年齢 x の上昇と共に上昇する)

$m = 1 \rightarrow$ 偶発故障型 (死力 μ_x は年齢 x にかかわらず一定)

$m < 1 \rightarrow$ 初期故障型 (死力 μ_x は年齢 x の上昇と共に低下する)

である。 η は尺度母数と呼ばれ、単位と時間軸を調整する数値である。また、 γ は位置母数と呼ばれ、死亡成分の影響が始まる時期を示す数値である。すなわち、機械における無故障期間に相当する。

なお、形状母数 $m=1$ のときの Weibull 分布は、指数分布 $f(x; \eta, \gamma) = \frac{1}{\eta} e^{-\frac{x-\gamma}{\eta}}$ ($x \geq \gamma$)

($\eta > 0$)となる。

6.4 直列 Weibull 分布モデル

「生命関数の数式近似」研究である荒井昭[2001]で用いた直列 Weibull 分布モデルは、荒井昭[1999]において最初に提案されたものであるが、本節では、この直列 Weibull 分布モデルを、あらためて整理・紹介する。

直列 Weibull 分布モデルは、古川俊之[1996]の混合ワイブル分布モデルをヒントとして提案されたものである。古川俊之[1996]では混合ワイブル分布モデルについて次のとおり示されている。

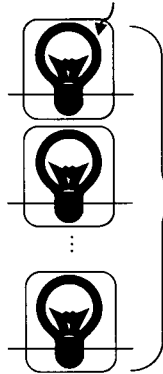
四つの故障モードからなる混合ワイブル分布を用いて累積死亡確率 $F(t)$ を表すと、

$$F(t) = 1 - \sum_{i=1}^4 p_i \exp\left[-\frac{(t-\gamma_i)^{m_i}}{t_{0i}}\right] \quad \text{ただし} \quad \sum_{i=1}^4 p_i = 1$$

となる。

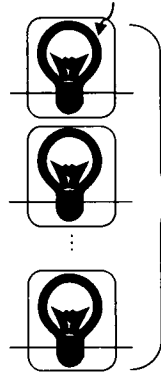
この混合ワイブル分布モデルは、「対象人口集団は、Weibull 分布に従う死亡成分 k の影響を受けている人が、それぞれ p_k の割合で混合されている($k=1,2,3,4$)と仮定した」ものと、筆者は解釈する。

故障成分 1 の影響を受けている機械



全体台数 $\times p_1$

故障成分 4 の影響を受けている機械



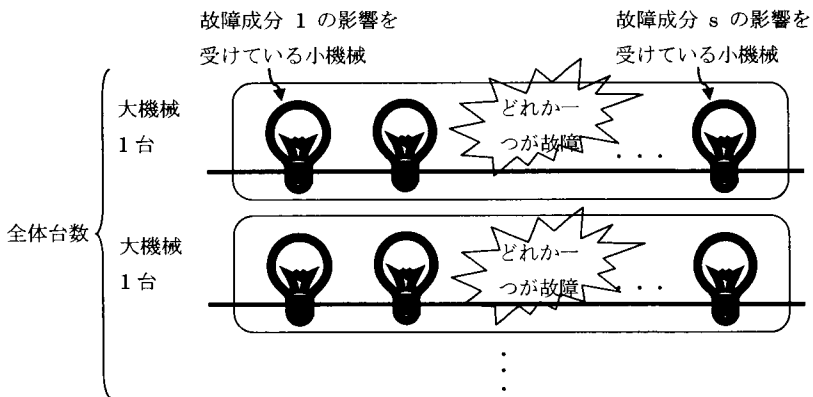
全体台数 $\times p_4$

一方、直列 Weibull 分布モデルでは、

【仮定 1】

対象人口集団の一人ひとりが、 s 個の独立な死亡成分の影響を受けている。

と仮定する。この仮定の下では、人の寿命を s 個の独立な小機械が直列に連結した大機械と見なせる。



各小機械の寿命時間の確率密度関数、分布関数、死力 $(=f^{(k)}(x)/(1 \cdot F^{(k)}(x))$ をそれぞれ $f^{(k)}(x)$ 、 $F^{(k)}(x)$ 、 $\mu^{(k)}_x$ ($k=1, 2, 3, \dots, s$) とする。

年齢 x における残存率 $1 \cdot F(x) (= {}_x p_0)$ は各成分に対する残存率 $1 \cdot F^{(k)}(x)$ ($k=1, 2, 3, \dots, s$) の積であるから

$$1 - F(x) = \prod_{k=1}^s (1 - F^{(k)}(x))$$

である。両辺の対数を取れば

$$\log(1 - F(x)) = \sum_{k=1}^s \log(1 - F^{(k)}(x))$$

となるから、 x で微分すれば次式が成立する。

$$\frac{-f(x)}{1 - F(x)} = \sum_{k=1}^s \frac{-f^{(k)}(x)}{1 - F^{(k)}(x)}$$

従って、

$$\begin{aligned} \text{死力 } \mu_x &= \frac{f(x)}{1 - F(x)} \\ &= \sum_{k=1}^s \frac{f^{(k)}(x)}{1 - F^{(k)}(x)} \\ &= \sum_{k=1}^s \mu^{(k)}_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{死亡率 } q_x &= 1 - \frac{1 - F(x+1)}{1 - F(x)} \\ &= 1 - \frac{\prod_{k=1}^s (1 - F^{(k)}(x+1))}{\prod_{k=1}^s (1 - F^{(k)}(x))} \end{aligned}$$

となる。

ところで、この「一人ひとりが、複数の独立な死亡成分の影響を受けている」という考えを、古くからアクチュアリーは用いていたと筆者は解釈する。例えば、代表的な死亡法則「Gompertz-Makeham の法則」

$$\mu_x = a + bc^x$$

を例に取ると

○第1成分の従う分布;

$$\text{確率密度関数 } f(x; a) = ae^{-ax} \quad (x > 0)$$

$$\text{分布関数 } F(x; a) = 1 - e^{-ax} \quad (x > 0) \quad (a > 0)$$

とする指数分布

○第2成分の従う分布;

$$\text{確率密度関数 } f(x; b, c) = bc^x \cdot \exp\left(\frac{b}{\log c}(1 - c^x)\right) \quad (x > 0)$$

$$\text{分布関数 } F(x; b, c) = 1 - \exp\left(\frac{b}{\log c}(1 - c^x)\right) \quad (x > 0) \quad (b > 0, c > 0)$$

とする分布

にそれぞれ従う 2 つの独立な死亡成分の影響を受けているものと筆者は解釈する。

同様に、例えば死亡法則「Thiele の法則」

$$\mu_x = a_1 e^{-h x} + a_2 e^{-\frac{1}{2} b^2 (x-c)^2} + a_3 e^{b x}$$

のように、死力が複数項の和の形で説明される死亡法則は、「一人ひとりが、複数の独立な死亡成分の影響を受けている」と筆者は解釈する。

ここで、

【仮定 2】

s 個の各死亡成分の従う分布は、それぞれ Weibull 分布である。

と仮定する。

s 個の死亡成分による死力をそれぞれ $\mu^{(k)}$ とし、

$$\mu_x^{(k)} = \frac{m_k}{\eta_k} (x - \gamma_k)^{m_k - 1} I_{(\gamma_k, \infty)}(x) \quad (k=1, 2, 3, \dots, s)$$

ここで I は定義関数を表す。すなわち、

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \text{ のとき} \\ 0 & \omega \notin A \text{ のとき} \end{cases}$$

とすると、生命関数の数学的モデルとして、

【直列 Weibull 分布モデル】

$$\mu_x = \sum_{k=1}^s \frac{m_k}{\eta_k} (x - \gamma_k)^{m_k - 1} I_{(\gamma_k, \infty)}(x)$$

を得る。なお、 s は死亡成分の個数であり、直列 Weibull 分布モデルを規定する因子は死亡成分の個数 s に対し、 $s \times 3$ 個の母数である。

この直列 Weibull 分布モデルの下では

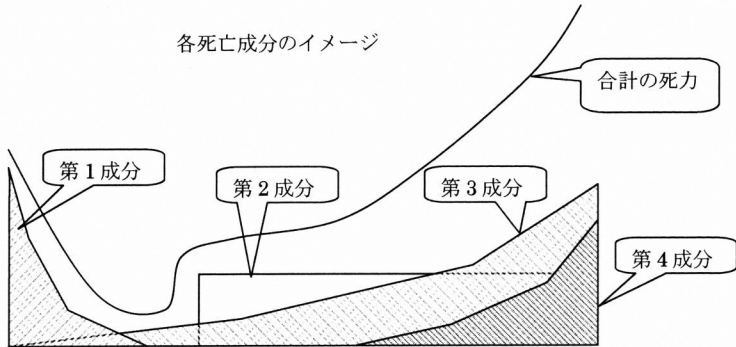
$$q_x = 1 - \exp \left[\sum_{k=1}^s \frac{(x - \gamma_k)^{m_k}}{\eta_k} I_{(\gamma_k, \infty)}(x) - \sum_{k=1}^s \frac{((x+1) - \gamma_k)^{m_k}}{\eta_k} I_{(\gamma_k, \infty)}(x+1) \right]$$

となる。

ところで、未知母数の個数を増加させると、精密性は増すが煩雑性も増す。本論文では、未知母数の個数を削減し数学的モデルをできるだけ簡単にするため、死亡成分の個数 $s=4$ とし、また、第 1～第 4 成分を次のように仮定する。

成分	内容	型	備考
第1成分	誕生直後から成長期の初めに発生するもので、乳幼児期死亡を表す。	形状母数 $m_1 < 1$ 【初期故障型】 死亡成分の死力 $\mu^{(1)}_x$ は年齢 x の上昇と共に低下する。	位置母数 $\gamma_1 = 0$ と仮定
第2成分	青少年期以降に発生するもので、青少年期以降の死亡を表す。	形状母数 $m_2 = 1$ 【偶発故障型】 死亡成分の死力 $\mu^{(2)}_x$ は年齢 x にかかわらず一定である。	形状母数 $m_2 = 1$ と仮定
第3成分	誕生直後から発生するもので、加齢に伴う死亡を表す。	形状母数 $m_3 > 1$ 【摩耗故障型】 死亡成分の死力 $\mu^{(3)}_x$ は年齢 x の上昇と共に上昇する。	位置母数 $\gamma_3 = 0$ と仮定
第4成分	中高年期以降に発生するもので、中高年の加齢に伴う死亡を表す。	形状母数 $m_4 > 1$ 【摩耗故障型】 死亡成分の死力 $\mu^{(4)}_x$ は年齢 x の上昇と共に上昇する。	

第1成分の位置母数 $\gamma_1 = 0$ 、第2成分の形状母数 $m_2 = 0$ 、第3成分の位置母数 $\gamma_3 = 0$ と仮定するため、未知母数の個数は $4 \times 3 - 3 = 9$ 個となる。第1成分および第3成分の位置母数を $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$ と仮定する理由は、第1成分および第3成分は機械の無故障期間に相当する期間=0、すなわち、乳幼児が出生直後から第1成分および第3成分の影響を受けていると仮定するためである。また、第2成分は無故障期間終了後において死力=const、すなわち、「年齢 x にかかわらず同一の死力」と仮定するため、第2成分の形状母数 $m_2 = 0$ と仮定する。

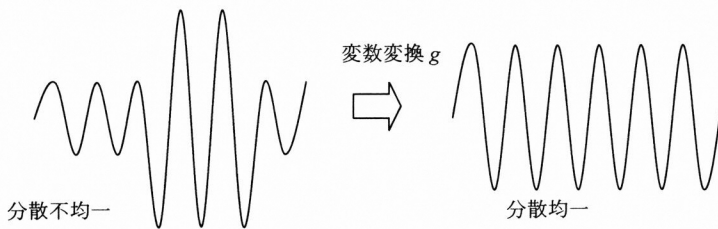


7 粗死亡率近似

7.1 変数変換の導入

本論文では、生命表における死亡率 q_x ではなく粗死亡率 q'_x の近似を試行する。その趣旨は、粗死亡率 q'_x すなわち観測値の持っている、偶然変動も含めた情報を使うことを意図するものである。

一般に統計的事象に関する各種の変数の当てはめには最小 2 乗法が用いられることが多い。一方、粗死亡率 q'_x は年齢 x により分散 $Var(q'_x)$ が大きく異なる。そのため粗死亡率 q'_x に死亡法則を当てはめる方法として粗死亡率 q'_x に直接最小 2 乗法を適用したのでは不具合がある。そこで、本論文では変数変換 g を導入することによって、元の変数間の分散不均一性を調整した上で最小 2 乗法を用いる方法を試行する。



節 2.4 で述べたとおり粗死亡率 q'_x は $q'_x = d_x / e_x$ と定義された。ここで、死亡者数 $d_x \approx B(e_x, q_x)$ と見なせるから

$$Var(q'_x) \approx \frac{q_x(1-q_x)}{e_x}$$

と見なせる。このように、母分散 $Var(q'_x)$ が年齢 x によって異なるため、この分散不均一性を調整することが課題となる。

ところで、小暮厚之[2004]は、類似の課題に対し、次のとおり、分散安定化変換を用いて対応している。

$$\text{Var}(\hat{q}_i) \approx \frac{q(x_i)(1-q(x_i))}{e_i} \quad (10)$$

となる。従って、この分散不均一性を考慮に入れた加重を用いた局所回帰法を用いることが考えられる。ここでは、直接的に(10)の右辺の分散を加重として用いるのではなく、まず被説明変数である死亡率を

$$Y_i \equiv \sin^{-1} \sqrt{\hat{q}_i}$$

と変換してから加重最小2乗法を行う。この返還の結果、

$$\text{Var}(Y_i) \approx \frac{1}{e_i}$$

となり、被説明変数がパラメータの値に依存しなくなる（分散安定化変換）

* 本論文で「 q_x 」、「 q'_x 」と表記する死亡率、粗死亡率を、小暮厚之[2004]ではそれぞれ「 \hat{q}_i 」、「 $q(x_i)$ 」と表記している。

また、マルチメディア統計百科事典によれば、分散安定化変換とは次のとおりである。

分散安定化変換 Variance stabilizing transformation

母数の推定の際に、推定値の分散の中に未知母数が入っていると信頼区間を求める式が複雑になる。そこで、未知母数の推定値の分散にその未知母数を含まなくなる、つまり分散が一定になるような変換を分散安定化変換という。

例えば、大標本による、二項分布の母比率 p の推定の際には、標本比率 \hat{p} の分布が平均 p 、分散 $(1 \cdot p)$ の正規分布で近似できることを用いるが、分散に未知母数 p が含まれている。

そこで、 \hat{p} の代わりに $\sin^{-1} \sqrt{\hat{p}}$ を用いると標本数が大きいときは、その分布は平均が

$\sin^{-1} \sqrt{p}$ 、分散が $\frac{1}{4n}$ の正規分布で近似でき、分散に p を含まない形になる。この変換を逆

正弦変換(arcsine transformation)という。

そこで、本論文では、小暮厚之[2004]を参考にして粗死亡率 $q'_x (=d_x/e_x)$ の分散不均一性を調整するために、

[変数変換]

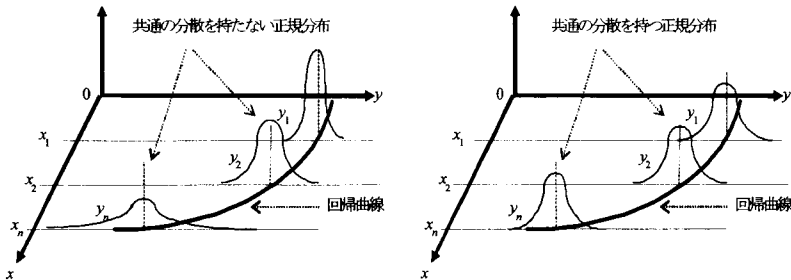
$$g(z; e_x) = \sqrt{e_x} \cdot \sin^{-1} \sqrt{z}$$

を導入する。このとき $\text{Var}(g(q'_x; e_x)) \approx \frac{1}{4}$ と見なせる。

さて、

$$\text{Var}(g(q'_x; e_x)) = \text{共通}$$

の下では、変数変換後死亡率 $g(q'_x; e_x)$ の回帰母数を推定する方法として、最小 2 乗法が大きな価値を持つ。そこで、変数変換後粗死亡率 $g(q'_x; e_x)$ に最小 2 乗法を適用して直列 Weibull 分布モデルの回帰母数推定を行う。



8 粗死亡率近似の例

8.1 具体的数値例

粗死亡率近似の具体的数値例として、第 15 回生命表～第 20 回生命表(男)に関し、年齢 1 歳～98 歳の各歳の粗死亡率 q'_x を直列 Weibull 分布モデルで近似する。

なお、本論文では、節 7.1 で述べた変数変換に用いる観測者数 e_x を、

$$e_x = d_x / q'_x \quad \text{ここで死亡数 } d_x = \text{節 3.2 で紹介した } DAO_x + DAL_x + DBO_x + DBI_x$$

とする。仮に粗死亡率 q'_x を節 2.4 で述べたとおりの d_x / e_x で算出していれば、この e_x をそのまま用いるところであるが、国民生命表作成における粗死亡率 q'_x の算出方法は節 3.2 で述べ

たとおり $q'_x = 1 - \frac{N(B_1 B_2)}{N(A_1 B_1)} \cdot \frac{N(A_2 B_2)}{N(A_1 A_2)}$ であるため、死亡数 d_x および粗死亡率 q'_x から逆算し

た観測者数 e_x を用いるものである。

推定した直列 Weibull 分布モデルの回帰母数および変数変換後残差 2 乗の合計

$\sum_i \{g(q'_x) - g(\hat{q}_x)\}^2$ は表 1 のとおりである。本論文では、初期値を適当に与え反復計算に

より収束させる方法で回帰母数を求めた。従って、初期値によって推定値に差が発生してしまう。表 1 の数値は、筆者がひたすら多数の初期値を与え試行錯誤を繰り返し、最良と

思われる回帰母数を求めたものである。

8.2 粗死亡率近似結果の概観

第 15 回生命表～第 20 回生命表(男)粗死亡率 q'_x に対して、本論文近似死亡率 $\hat{q}_x^{(本)}$ および国民生命表補整死亡率 $\hat{q}_x^{(国)}$ をグラフにしたものが図 2 である。また図 3 はそれぞれの残差をグラフにしたものである。図 2 より、直列 Weibull 分布モデルでは死亡率曲線を説明し切れていない部分（近似誤差）があることが見受けられる。例えば約 15 歳～25 歳の死亡率 q_x の凸凹を表現できていない。ただし、この近似誤差の影響も含め、近似結果の良さについては節 8.3 で考察する。

また、図 3 より、本論文は変数変換後粗死亡率 $g(q_x; e_x)$ に最小 2 乗法を適用しているため、元の変数である粗死亡率 q'_x に戻して見てみると、年齢 x によって残差に大きな差異があり、約 60 歳以降では残差が比較的に大きくなっていることが見受けられる。なお、約 60 歳以降で残差が大きいの国民生命表補整死亡率 $\hat{q}_x^{(国)}$ も同様である。

8.3 粗死亡率の近似結果の良さ考察

粗死亡率 q'_x を数学的モデルで近似した場合、近似が十分であったか否かという疑問を当然に持つ。そこで本節では、本論文の近似結果の良さについて考察する。

どのような場合に「実用上十分な近似である」と言うか、という問いについての答えは、「絶対的な基準は見当たらず、一概に決められない。」である。さて、一般に、近似結果の良さの尺度として残差 2 乗が用いられることが多い。また、入手できる資料として国民生命表がある。そこで、目安として本論文近似死亡率 $\hat{q}_x^{(本)}$ と国民生命表補整死亡率 $\hat{q}_x^{(国)}$ の残差 2 乗を比較する。国民生命表は粗死亡率 q'_x を近似するために補整されているものではないが、本論文では、「国民生命表補整死亡率 $\hat{q}_x^{(国)}$ と残差 2 乗が同程度であれば、実用上十分な近似である」と割り切って議論を進めることとする。

ここで、

$$\text{本論文による近似方法における残差 } W_{1,i} = q'_x - \hat{q}_x^{(本)} \quad (i=1,2,3,\dots,98)$$

$$\text{国民生命表の補整方法における残差 } W_{2,i} = q'_x - \hat{q}_x^{(国)} \quad (i=1,2,3,\dots,98)$$

とおく。

それぞれの分散 $Var(W_{1,i}), Var(W_{2,i})$ は年齢 x_i により大きく異なるので、年齢 x_i 毎に、本論文近似死亡率 $\hat{q}_x^{(本)}$ と国民生命表補整死亡率 $\hat{q}_x^{(国)}$ との残差 2 乗比

$$F_0 = \frac{W_{1,i}^2}{W_{2,i}^2} \quad (i=1, 2, 3, \dots, 98)$$

を考察する。

第 15 回生命表～第 20 回生命表について、年齢 x 別に本論文近似死亡率 $\hat{q}_x^{(本)}$ と国民生命表補整死亡率 $\hat{q}_x^{(国)}$ の残差 2 乗比 F_0 をグラフにしたものが図 4 である。残差 2 乗比 F_0 が 1 より小さくなっている年齢 x においては本論文近似死亡率 $\hat{q}_x^{(本)}$ の残差 2 乗が国民生命表補整死亡率 $\hat{q}_x^{(国)}$ よりも小さく、一方、1 より大きくなっている年齢 x においては本論文の残差 2 乗が国民生命表よりも大きいことを意味する。

図 4 によれば、残差 2 乗比 F_0 が 1 より大きい側に偏っているため、「本論文の残差 2 乗は国民生命表よりも大きい」という見方もできる。そこで、両者の残差 2 乗が同程度であるか否か、水準 ε を用いて調べる。

$$W_{1,i} \sim N(0, \sigma_{1,i}^2)$$

$$W_{2,i} \sim N(0, \sigma_{2,i}^2)$$

$W_{1,i}$ と $W_{2,i}$ は互いに独立

$$\sigma_{1,i}^2 = \sigma_{2,i}^2 \quad (i=1, 2, 3, \dots, n)$$

の下では

$$P\{F_1^1(1-\varepsilon/2) < F_0 < F_1^1(\varepsilon/2)\} = 1-\varepsilon$$

ここで $F_1^1(\varepsilon)$ は自由度(1, 1)の F -分布の上側 ε 点

となる。もし、 $\sigma_{1,i}^2 > \sigma_{2,i}^2$ であれば、 F_0 は比較的大きい値となり、 $\sigma_{1,i}^2 < \sigma_{2,i}^2$ であれば、 F_0 は比較的小さい値となるはずである。そこで、本節では一般に検定等で有意水準として用いられる $\varepsilon=0.01$ を使い、目安として $F_1^1(0.995)$ および $F_1^1(0.005)$ と、残差 2 乗比 F_0 の比較を行う。

図 4 より、 $F_1^1(0.995) < F_0 < F_1^1(0.005)$ となっている年齢 x の個数を数えると次表のとおりとなる。

生命表	$F_0 < F_1^1(0.995)$ となっている年齢 x の個数	$F_1^1(0.995) \leq F_0$ $\leq F_1^1(0.005)$ となっている年齢 x の個数	$F_1^1(0.005) < F_0$ となっている年齢 x の個数	合計の年齢 x の個数
第15回生命表	1	96	1	98
第16回生命表	1	96	1	98
第17回生命表	1	92	5	98
第18回生命表	1	96	1	98
第19回生命表	1	93	4	98
第20回生命表	1	97	0	98

各生命表において、概ね、 $F_1^1(0.995) < F_0 < F_1^1(0.005)$ となっているため、「 $\sigma_{1,i}^2 = \sigma_{2,i}^2$ 」であることを否定はできないと筆者は考える。

8.4 直列 Weibull 分布モデル回帰母数の推移の考察







次に「粗死亡率 q_x を直列 Weibull 分布モデル曲線に当てはめた回帰母数」の推移について考察する。

第15回生命表から第20回生命表の6表について、第1成分から第4成分の死力 $\mu^{(h)}_x$ および死亡成分合計の死力 $\mu^{(h)}_x$ の推移をグラフにしたものが図5である。

まず死力 $\mu^{(h)}_x$ の形状を考察する。第1成分～第4成分の死力の $\mu^{(h)}_x$ 曲線は、それぞれ時間経過と共に、概ね、山が小さくなっている。この事象は、時間経過と共に、死亡率曲線の改善が見られる状況と合致している。

次に、死亡成分別の母数の推移について考察を行う。それぞれの回帰母数の推移をグラフにしたものが図6である。図6によれば、それぞれの母数の推移は、第4成分の形状母数 m_4 を除いては、振動が少なく単調な傾向を持って推移している。なお、第4成分の形状母数 m_4 は、振動しているように見えるが、そもそもの変動幅が小さく、変動が無いものと筆者は解釈する。

各死亡成分の回帰母数推移の「形状」をまとめると次の表となる。

成分	形状母数 m	尺度母数 η	位置母数 γ
第1成分			—
第2成分	—		
第3成分			—

成分	形状母数 m	尺度母数 η	位置母数 γ
第4成分	↗	↗	↗

章4で述べた、日本の近年における死亡率曲線の変化の特徴と、母数推移の特徴との対応を整理すると

特徴1：乳幼児や若い成人層で死亡率 q_x が大きく低下している

⇒ 第1成分の尺度母数 η_1 の上昇、第2成分の尺度母数 η_2 の上昇

特徴2：高齢層で死亡発生が遅延している

⇒ 第3成分の形状母数 m_3 の下降

第4成分の尺度母数 η_4 の上昇、位置母数 γ_4 の上昇

となる。

注目すべき特徴は、第4成分の位置母数 γ_4 の高齢への移動である。位置母数 γ_4 が、第15回生命表の45.94から第20回生命表の51.09まで上昇している。この上昇は、今日の高齢者の気力・体力等が、昔の同年代より長く維持されている印象と合致する。つまり最近の高齢者が元気であるのは、第4成分の立ち上がりが遅くなったことと関連ありと推測する。なお、第4成分の位置母数である γ_4 の上昇は、世代の年齢上昇と一致して上昇しているわけではない。例えば、第15回生命表（昭和55年）当時の第4成分の位置母数 γ_4 に該当する約46歳の人、第20回生命表（平成17年）当時では25歳加齢の約71歳となるが、一方で、第4成分の位置母数 γ_4 は5.15上昇の51.09に留まっている。

本節および節8.3における考察により、直列 Weibull 分布モデルは、日本の死亡率曲線の変化を良く表現できるものであり、第4成分の位置母数 γ_4 の上昇が、「日本における近年の高齢死亡率改善が、死亡が遅延している動きとして説明できる」点とも整合的との特性を持っている。そのため、本論文では、直列 Weibull 分布モデルは、「将来推計のための近似として、実用上十分な近似である」と割り切って議論を進めることとする。

9 死亡率の将来推計

直列 Weibull 分布モデルが日本の近年における死亡率の実用上十分な近似モデルであるならば、その母数を将来推計することにより死亡率 q_x を将来推計する方法は、「将来推計の一方方法」になると筆者は考える。

もし、時間経過と共に母数が大きな振動の動きをする場合、過去の推移の傾向から将来への単調な延長が困難となる。しかし、節8.4で述べたとおり、第15回生命表～第20回生命表において、直列 Weibull 分布モデルの母数は、概ね、振動が少なく単調な傾向を持って推移しているため、過去の推移の傾向から将来へ延長することにより将来推計できる。

そこで、「直列 Weibull 分布モデルの母数を将来推計する」方法による死亡率 q_x の将来

推計を試行する。

10 死亡率の将来推計の例

10.1 具体的数値例





死亡率の将来推計の具体的数値例として、国民生命表について

- ① 第 15 回生命表(昭和 55 年)～第 19 回生命表(平成 12 年)の資料を用いた第 20 回生命表(平成 17 年)死亡率 q_x の将来推計
 - ② 第 15 回生命表(昭和 55 年)～第 20 回生命表(平成 17 年)の資料を用いた第 21 回生命表(平成 22 年)～第 24 回生命表(平成 37 年)死亡率 q_x の将来推計
- を行う。

①の趣旨は、既に作成済となっている第 20 回生命表死亡率 q_x を、それ以前の生命表である第 15 回生命表～第 19 回生命表の資料から将来推計し、いわゆるバックテストを行うことにより、将来推計結果の良さを考察するものである。

②の趣旨は、現時点で得られている最新資料より、5 年後、10 年後、15 年後、20 年後の死亡率 q_x を将来推計し、その結果を考察するものである。

10.2 第 19 回生命表までの資料を用いた第 20 回生命表死亡率の将来推計

第 1 成分～第 4 成分について、第 15 回生命表～第 19 回生命表粗死亡率 q'_x の回帰母数の傾向から第 20 回生命表死亡率 q_x における直列 Weibull 分布モデルの母数を延長した数値を表 1 に、またグラフを図 6 に記載した。また、その母数に基づく将来推計死亡率 \hat{q}_x をグラフにしたものが図 7 である。なお、母数の延長方法としては、節 8.4 の表における「形状」が  もしくは  となっている母数は線形近似($y=ax+b$)を用い、一方、 もしくは  となっている母数は対数近似($y=a\log(x+b)+c$)を用いた。

死亡率 q_x の将来推計結果の良さを考察するために、将来推計結果を国立社会保障・人口問題研究所[2002]と比較する。この国立社会保障・人口問題研究所[2002]は、第 19 回生命表以前の資料より第 20 回生命表死亡率 q_x を推計するという意味では本節の趣旨とほぼ同じである。

本論文および国立社会保障・人口問題研究所[2002]それぞれの第 20 回生命表将来推計死亡率 \hat{q}_x の、現実の第 20 回生命表粗死亡率 q'_x に対する残差 2 乗を比較する。残差 2 乗が小さいほうが、ひとつの観点で、将来推計を、よりの中させたと言える。なお、本論文では、国立社会保障・人口問題研究所[2002]における平成 17 年死亡率を「社人研第 20 回将来推計死亡率 $\hat{q}_x^{(社)}$ (平成 14 年 1 月推計)」と表記する。

本論文および社人研(平成 14 年 1 月推計)それぞれの残差をグラフにしたものが図 8

である。また、図 9 は、節 8.3 と同様に、両者の残差 2 乗比 F_0 をグラフにしたものである。図 9 において、残差 2 乗比 F_0 が 1 より小さくなっている年齢 x においては本論文将来推計死亡率 $\hat{q}_x^{(本)}$ の残差 2 乗が社人研将来推計死亡率（平成 14 年 1 月推計） $\hat{q}_x^{(社)}$ よりも小さく、一方、1 より大きくなっている年齢 x においては本論文の残差 2 乗が社人研よりも大きいことを意味する。

節 8.3 と同様に、図 9 より、 $F_1^{-1}(0.995) < F_0 < F_1^{-1}(0.005)$ となっている年齢 x の個数を数えると次表のとおりとなる。

$F_0 < F_1^{-1}(0.995)$ となっている年齢 x の個数	$F_1^{-1}(0.995) \leq F_0 \leq$ $F_1^{-1}(0.005)$ となっている年齢 x の個数	$F_1^{-1}(0.005) < F_0$ となっている年齢 x の個数	合計の年齢 x の個 数
1	97	0	98

概ね、 $F_1^{-1}(0.995) < F_0 < F_1^{-1}(0.005)$ となっているため、節 8.3 と同様に、両者の残差 2 乗が等しいことを否定はできないと筆者は考える。すなわち、残差 2 乗の大小という観点では、本論文将来推計死亡率 $\hat{q}_x^{(本)}$ と社人研将来推計死亡率 $\hat{q}_x^{(社)}$ （平成 14 年 1 月推計）が同程度であることを否定はできないと筆者は考える。

また、図 8、図 9 より次の事象がわかる。

- ・ 約 60 歳以前においては、本論文の将来推計死亡率 $\hat{q}_x^{(本)}$ は、概ね社人研将来推計死亡率 $\hat{q}_x^{(社)}$ （平成 14 年 1 月推計）よりも残差 2 乗が大きい。ただし、両者ともに残差の絶対値は比較的小さい。
 - ・ 約 60 歳以降においては、本論文の将来推計死亡率 $\hat{q}_x^{(本)}$ は、概ね社人研将来推計死亡率 $\hat{q}_x^{(社)}$ （平成 14 年 1 月推計）よりも残差 2 乗が小さい。なお、両者ともに残差の絶対値は比較的大きい。
- すなわち、両者ともに残差の絶対値が比較的大きい約 60 歳以降では、本論文将来推計死亡率 $\hat{q}_x^{(本)}$ のほうが、残差 2 乗が小さいという観点で、社人研将来推計死亡率 $\hat{q}_x^{(社)}$ （平成 14 年 1 月推計）よりも第 20 回生命表死亡率 q_x の将来推計を的中させていた。

10.3 第20回生命表までの資料を用いた第21回～第25回生命表死亡率の将来推計

第15回生命表～第20回生命表粗死亡率 q'_x の、第1成分～第4成分の回帰母数の傾向から第21回生命表～第24回生命表死亡率 q_x における直列Weibull分布モデルの母数を延長した数値を表1に、グラフを図6に記載した。また、その母数に基づく将来推計死亡率 \hat{q}_x をグラフにしたものが図10である。なお、母数の延長方法としては、節10.2と同様に、節8.4の表における「形状」に応じ、線形近似($y=ax+b$)もしくは対数近似($y=a\log(x+b)+c$)を用いた。

本論文の将来推計死亡率 $\hat{q}_x^{(*)}$ を考察するために、第20回生命表死亡率からの改善度合いを国立社会保障・人口問題研究所[2006a]と比較する。この国立社会保障・人口問題研究所[2006a]は、第20回生命表以前の資料より第21回生命表以降を将来推計するという意味では本節の趣旨とほぼ同じである。

なお、本論文では、国立社会保障・人口問題研究所[2006a]/将来生命表：中位仮定における

- ・ 平成17年死亡率を「社人研第20回将来推計死亡率 $\hat{q}_x^{(社)}$ 」（平成18年12月推計）
 - ・ 平成22年死亡率を「社人研第21回将来推計死亡率 $\hat{q}_x^{(社)}$ 」（平成18年12月推計）
 - ・ 平成27年死亡率を「社人研第22回将来推計死亡率 $\hat{q}_x^{(社)}$ 」（平成18年12月推計）
 - ・ 平成32年死亡率を「社人研第23回将来推計死亡率 $\hat{q}_x^{(社)}$ 」（平成18年12月推計）
 - ・ 平成37年死亡率を「社人研第24回将来推計死亡率 $\hat{q}_x^{(社)}$ 」（平成18年12月推計）
- と表記する。

第21回生命表(平成22年)から第24回生命表(平成37年)の将来推計死亡率について

- ・ 本論文将来推計死亡率 $\hat{q}_x^{(*)}$ の、第20回生命表近似死亡率 $\hat{q}_x^{(*)}$ からの改善度合い(=将来推計死亡率÷第20回生命表近似死亡率)
- ・ 社人研の将来推計死亡率 $\hat{q}_x^{(社)}$ （平成18年12月推計）の、社人研第20回将来推計死亡率 $\hat{q}_x^{(社)}$ （平成18年12月推計）からの改善度合い

をそれぞれグラフにしたものが、図11である。なお、それぞれの改善度合い算定の分母は、第20回生命表死亡率 q_x そのものではなく、本論文については章8で算定した第20

回生命表近似死亡率 $\hat{q}_x^{(本)}$ 、一方、社人研については社人研第20回将来推計死亡率 $\hat{q}_x^{(社)}$ (平成18年12月推計)とした。その理由は、それぞれの第20回生命表死亡率 q_x における差異(数学的モデルにおける死亡率 q_x の近似誤差)をできるだけ除外し改善度合いを抽出するためである。

図11によれば、

- ・ 社人研将来推計死亡率の改善度合いは、10歳前後→15歳前後→20歳前後→30歳前後→45歳前後と、谷、山を繰り返すが、本論文の将来推計死亡率 $\hat{q}_x^{(本)}$ の改善度合いは緩やかな曲線となっている。

ここで、国立社会保障・人口問題研究所[2006b]によれば、「社人研将来推計死亡率 $\hat{q}_x^{(社)}$ (平成18年12月推計)」は節5.3で紹介したとおり年齢シフトモデルにより

算定したものである。しかし、平成17年死亡率については、年齢シフトモデルにより算定したのではなく、厚生労働省統計情報部にて作成の『簡易生命表』を基に算定したものである。簡易生命表に同様な谷・山がみられるため、この谷および山は、平成17年死亡率における、年齢シフトモデルと簡易生命表との差が要因の一つになっていると筆者は推測する。

- ・ 第20回生命表死亡率からの改善度合いは、第21回生命表では、本論文の将来推計死亡率 $\hat{q}_x^{(本)}$ と社人研将来推計死亡率 $\hat{q}_x^{(社)}$ (平成18年12月推計)で同程度であるが、第22回生命表以降は、本論文のほうが約60歳以上における改善が著しい。
- ・ 第21回生命表(平成22年)～第24回生命表(平成37年)と生命表が将来になると共に両者の差が大きくなっている。

が読み取れる。

11. おわりに

本論文では、

- ・ 粗死亡率の直列 Weibull 分布モデルによる近似
- ・ 「直列 Weibull 分布モデルの母数を将来推計する方法」による死亡率 q_x の将来推計を試行した。

その主な結果をまとめると次のようになる。

- 直列 Weibull 分布モデルは、日本の死亡率曲線の変化を良く表現できるものであり、第4成分の位置母数 γ_4 の上昇が、「日本における近年の高齢死亡率改善が、死亡が遅延している動きとして説明できる」点とも整合的との特性を持っていた。
- 第15回生命表(昭和55年)～第20回生命表(平成17年)の資料を用いて第21回生命

表(平成 22 年)～第 24 回生命表(平成 37 年)の死亡率 q_x を将来推計し、第 20 回生命表死亡率からの改善度合いを、社人研将来推計死亡率 $\hat{q}_x^{(社)}$ (平成 18 年 12 月推計)

と比較したところ、第 21 回生命表では同程度であるが、第 22 回生命表以降は、本論文のほうが約 60 歳以上における改善が著しい。

本論文では、このように興味ある結果が得られた。

今後の研究課題について述べる。節 8.2 で述べたとおり、直列 Weibull 分布モデルでは、粗死亡率曲線を説明し切れていない部分(近似誤差)がある。例えば約 15 歳～25 歳の死亡率 q_x の凸凹を表現できていない。この点は数学的モデル改善の余地がある。例えば、

(i) 本論文では数学的モデルを簡単にするために固定した母数 γ_1 、 m_2 、 γ_3 を固定せず変動させる

(ii) 死亡成分の個数 s を大きくする

等が挙げられる。

また、「直列 Weibull 分布モデルを織り込んだリレーショナルモデルの設定」も試行してみたい。

粗死亡率 q'_x の従う分布はたいへん複雑なので、死亡率 q_x の将来推計については数多くの事例による検証が必要である。実務を行っているアクチュアリー諸氏による様々なご意見を期待したい。

(明治安田生命・総合法人業務部)

文献

荒井 昭[1999] 「死力測定に関する一方法」, 『日本アクチュアリー会 100 周年記念大会 論文集』(第 1 分冊)

荒井 昭[2001], 「生命表に関する一考察 —生命関数の数式近似—」, 『日本アクチュアリー会会報』, 第 54 号(第 2 分冊)

荒井昭[2011], 「生命表作成における補整方法の考察 —Greville 補整係数および Gompertz-Makeham 曲線当てはめ方法の修正—」, 『日本アクチュアリー会会報』, 第 64 号(第 1 分冊)

石井太・高橋重郷[2002], 「人口のコアホート変動要因と人口構造指標の動的変化 —総人口・平均年齢・人口モメンタムの動的変化に与える影響の比較—」, 『人口問題研究』, 第 58 巻, 第 4 号

石井太[2006a], 「確率推計による将来人口推計の不確実性の評価について」, 『人口問題

- 研究』, 第 62 卷, 第 3 号
- 石井太[2006b], 「わが国の平均寿命の動向と死亡率推計モデルの検討」, 『人口問題研究』, 第 62 卷, 第 3 号
- 石井太[2008a], 「近年のわが国の死亡動向に適合した将来生命表推計モデルの研究 一年齡シフトモデルの開発一」, 『人口問題研究』, 第 64 卷, 第 3 号
- 石井太[2009], 「将来人口推計における確率推計の応用に関する研究」, 『人口問題研究』, 第 65 卷, 第 3 号
- 石井太[2010], 「死亡モデルと長寿リスク」, 『平成 22 年度日本アクチュアリー会年次大会資料』,
- 及川桂 [2006], 「将来死亡率推定に関する一考察」, 『日本アクチュアリー会会報』, 第 59 号 (第 2 分冊)
- 金子隆一, 三田房美[2008], 「将来人口推計の基本的性質と手法的枠組みについて」, 『人口問題研究』, 第 64 卷, 第 3 号
- 厚生労働省大臣官房統計情報部[2007], 『第 20 回生命表』, 財団法人 厚生統計協会
- 国立社会保障・人口問題研究所[2002], 「男女年齢別将来生命表」, 『日本の将来推計人口 (平成 14 年 1 月推計)』, (国立社会保障・人口問題研究所ホームページ)
- 国立社会保障・人口問題研究所[2006a] 「男女年齢別将来生命表: 中位仮定」, 『日本の将来推計人口 (平成 18 年 12 月推計)』, (国立社会保障・人口問題研究所ホームページ)
- 国立社会保障・人口問題研究所[2006b], 『日本の将来推計人口 (平成 18 年 12 月推計) 報告書 (WEB 版) /推計の方法と仮定』, (国立社会保障・人口問題研究所ホームページ)
- 小暮厚之[2004], 「ノンパラメトリック回帰分析と生命表 一我が国生保標準生命表における補整の考察一」, 『日本統計学会誌』第 34 卷, 第 1 号
- 近藤次郎[1970], 『応用確率論』, 日科技連出版社
- ジョン・R ウィルモス (石井太訳) [2010], 「人類の寿命伸長: 過去、現在、未来」, 『人口問題研究』, 第 66 卷, 第 3 号
- 古川俊之[1996], 『寿命の数理』, 朝倉書店
- 堀内四郎[2010], 「日本人の寿命伸長: 要因と展望」, 『人口問題研究』, 第 66 卷, 第 3 号
- マルチメディア統計百科事典, 文部科学省大学共同利用機関 メディア教育開発センター, <http://upo-net.ouj.ac.jp/tokei/index.htm>, (2012 年 8 月 25 日確認)
- 守田常直[1973], 『保険数学(上)』, 生命保険文化研究所
- Bowers[1986] (N.L.Bowers, H.U.Gerber, J.C.Hickman, D.A.Jones, C.J.Nesbitt), *Actuarial Mathematics*, Society of Actuaries

表1 直列Weibullモデルの回帰母数の推移

生命表 (回)	第1成分			第2成分			第3成分			第4成分			変数変換 残差ノ乗
	m_1	σ_1	r_1	m_2	σ_2	r_2	m_3	σ_3	r_3	m_4	σ_4	r_4	
15	0.25151261	168.37896	0	1	2094.4345	15.669304	5.5571088	69112495089	0	5.4878932	685096252	45.937805	192.54471
16	0.28536629	254.07513	0	1	2342.7322	15.619651	5.5420034	69112367552	0	5.5162748	695537763	48.027675	431.46629
17	0.24870072	232.71387	0	1	2531.3785	15.663427	5.5189908	69112276257	0	5.5062486	703082125	48.115732	687.33349
18	0.35822256	412.51418	0	1	2957.4116	15.544839	5.5098954	69112229522	0	5.4795793	706922870	47.670557	631.55538
19	0.39028339	514.78671	0	1	2994.6561	15.650841	5.5012273	69112187261	0	5.4704687	710401304	49.237939	378.05365
20	0.32735865	605.44402	0	1	3217.7948	15.571888	5.4875040	69112152470	0	5.5228023	713268229	51.090974	276.62149
20推計*	0.36390067	571.86874	0	1	3214.1032	15.601964	5.4826718	69112152658	0	5.4706709	713258234	49.670888	-
21推計**	0.35219219	679.37785	0	1	3365.4560	15.575314	5.4715062	69112121898	0	5.4977986	715674033	51.241991	-
22推計**	0.36270741	769.29943	0	1	3500.1990	15.564019	5.4578094	69112096342	0	5.4978912	717766109	52.069199	-
23推計**	0.37229481	859.22102	0	1	3623.2768	15.553385	5.4441126	69112073805	0	5.4979729	719611164	52.896408	-
24推計**	0.38110493	949.14260	0	1	3736.5493	15.543338	5.4304158	69112053647	0	5.4980459	721261421	53.723617	-

* 第15回生命表～第19回生命表の資料による推定

** 第15回生命表～第20回生命表までの資料による推定

図1 国民生命表の死亡率

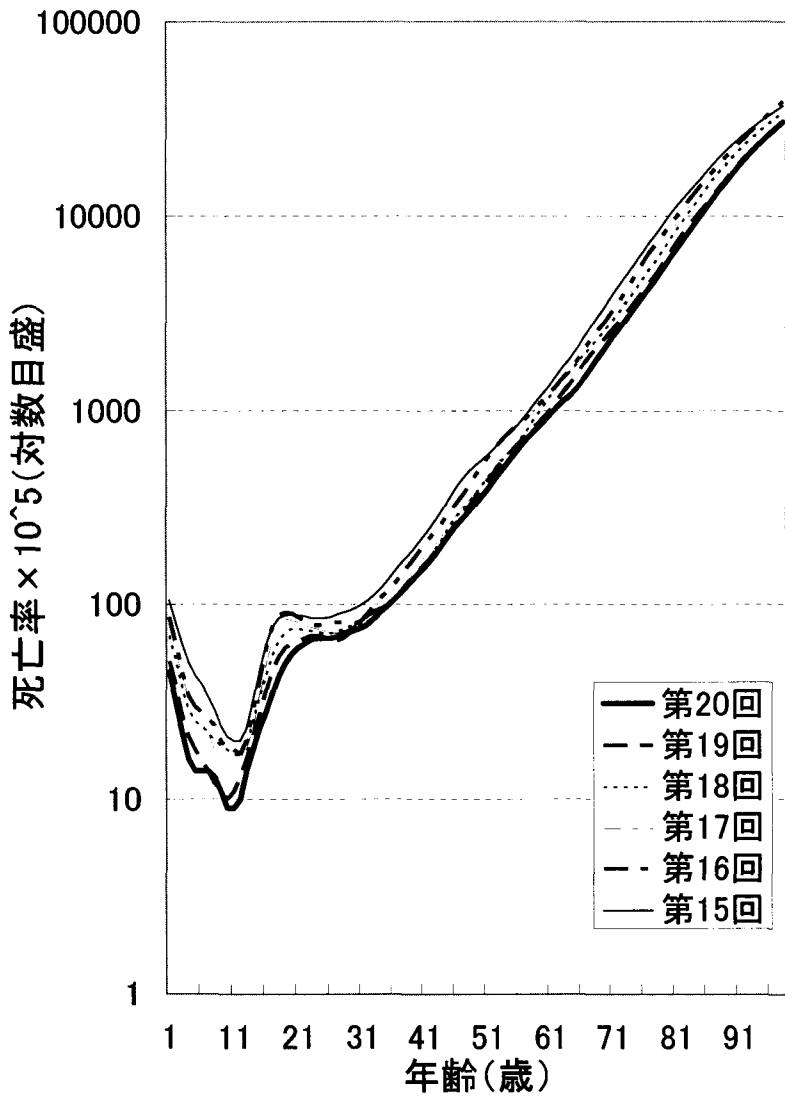


図 2-1 粗死亡率近似①

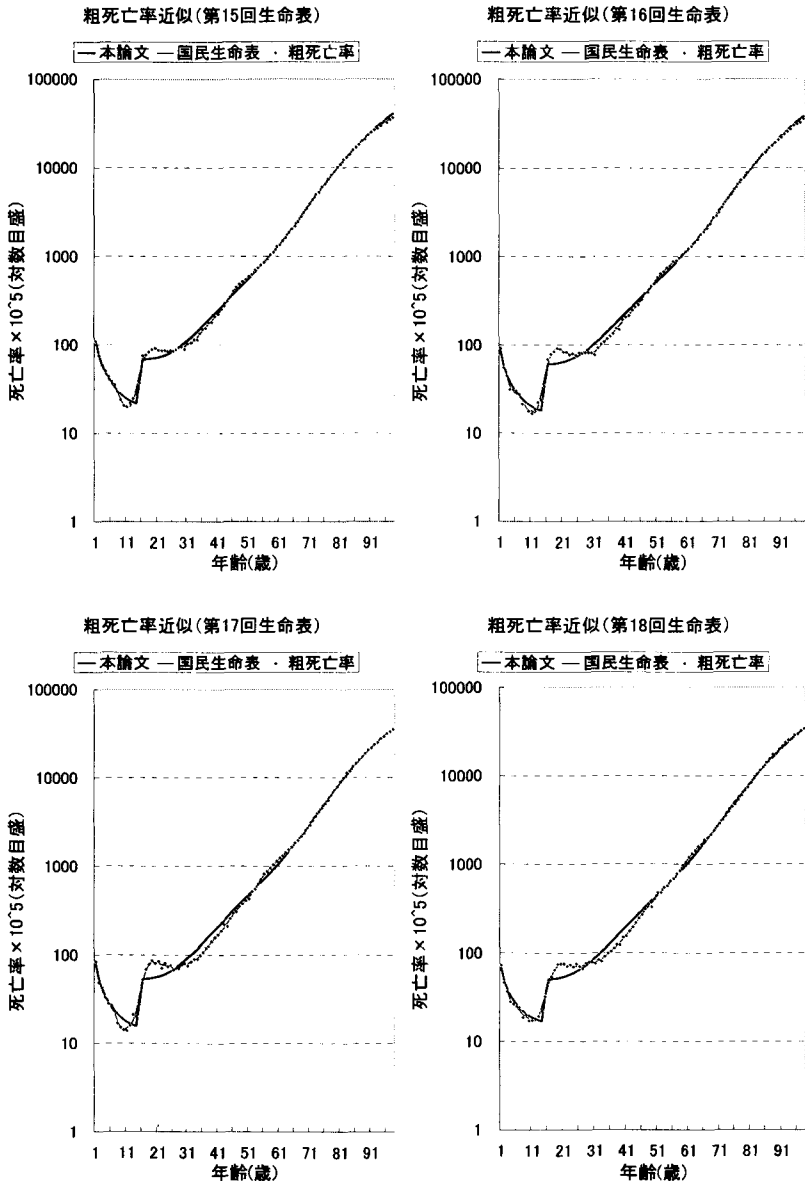


図 2-2 粗死亡率近似②

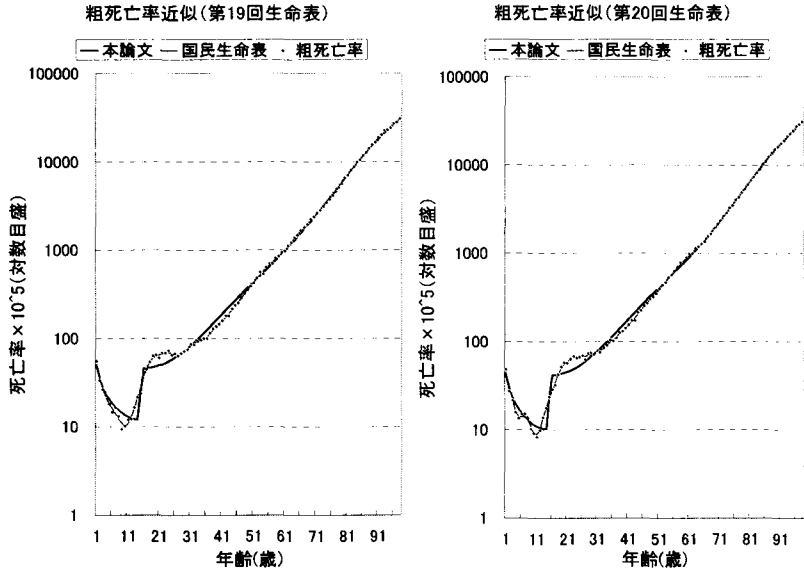


図 3-1 粗死亡率近似 残差①

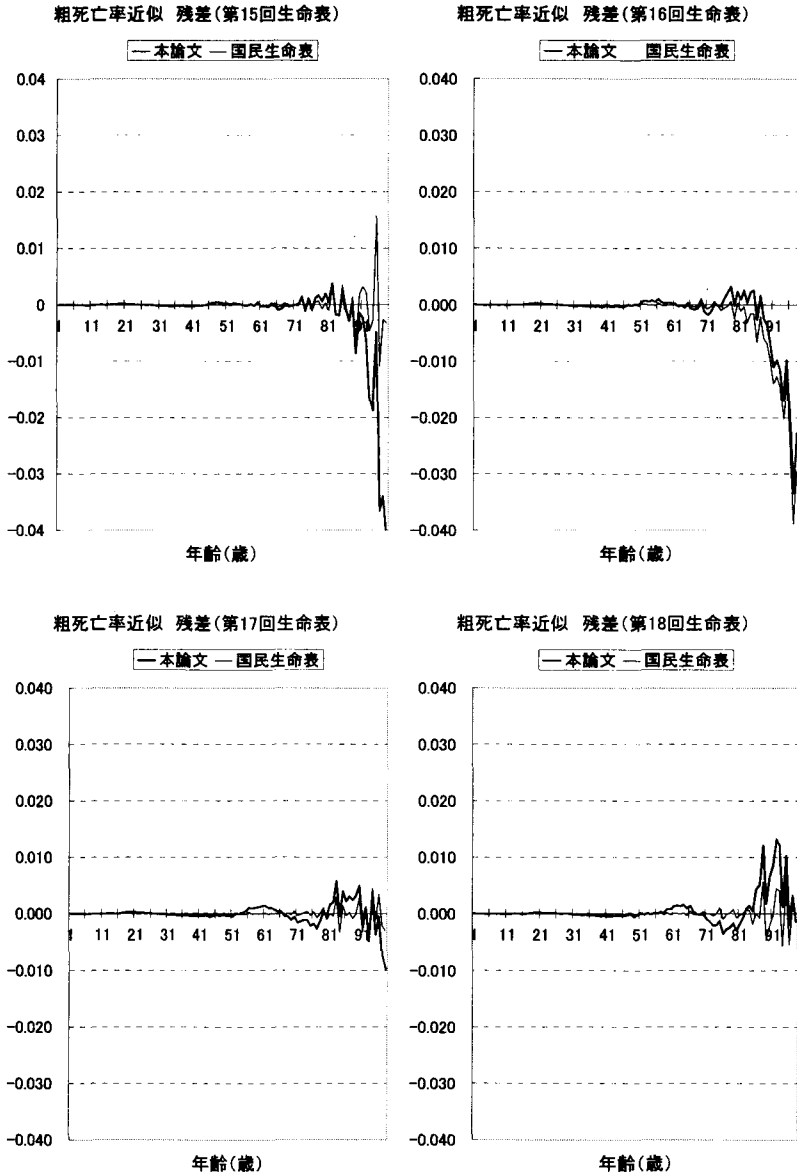


図 3-2 粗死亡率近似 残差②

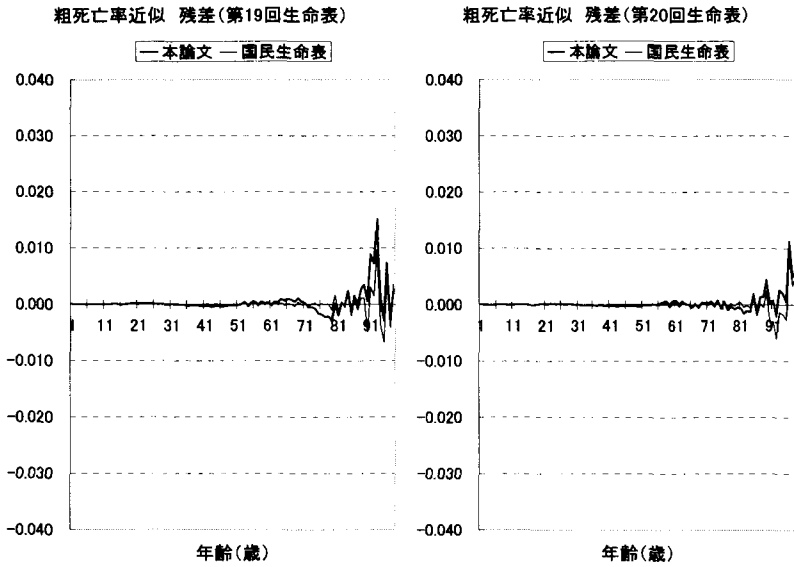


图 4-1 粗死亡率近似 残差 2 乘比①

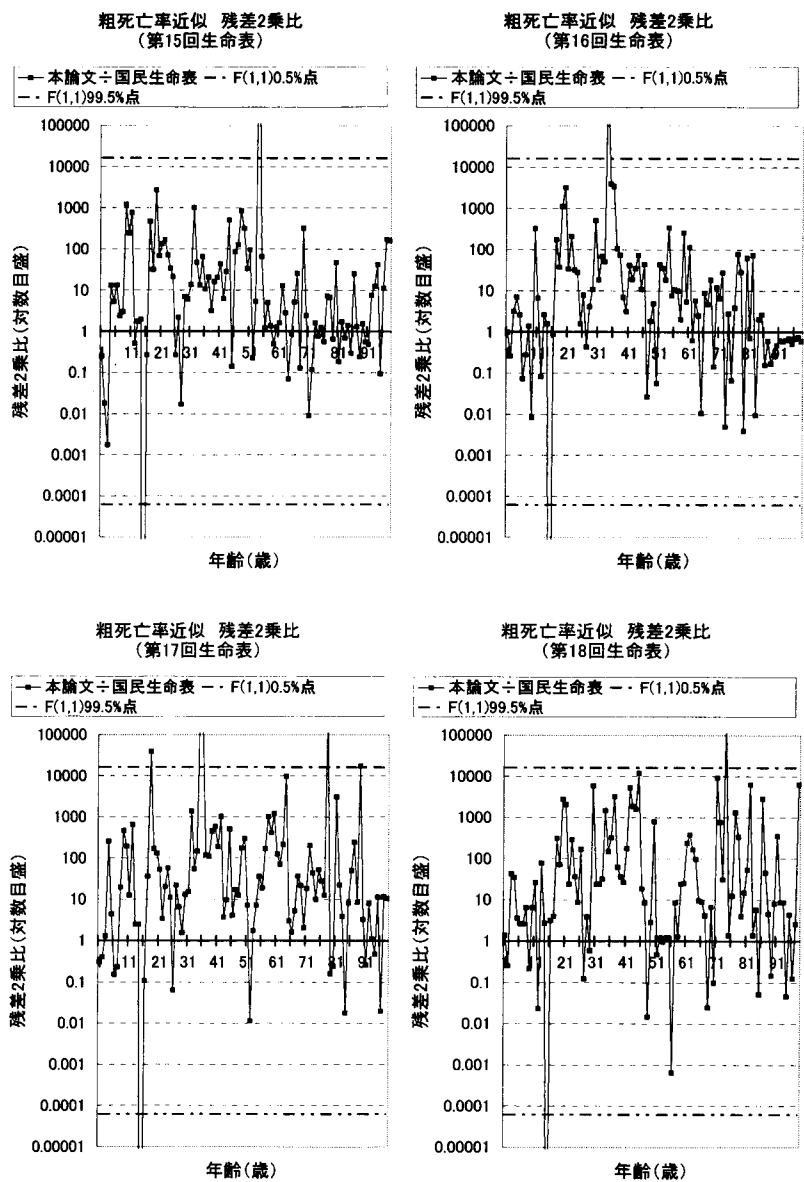


図 4-2 粗死亡率近似 残差 2 乗比②

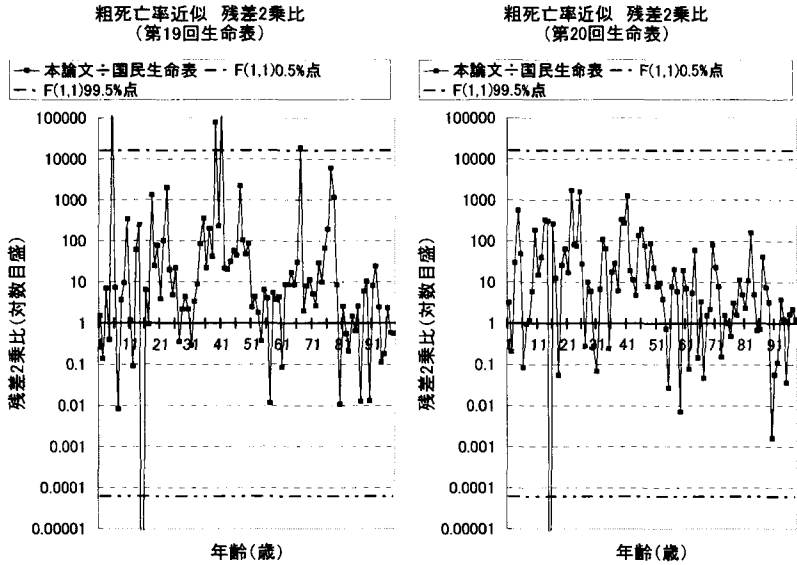
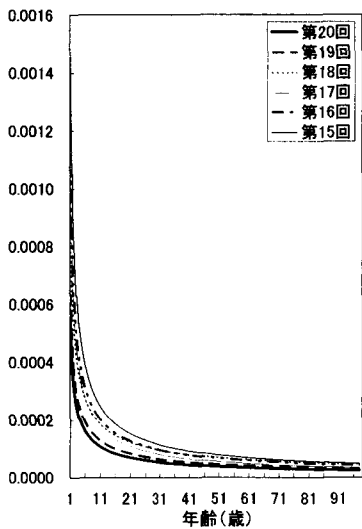
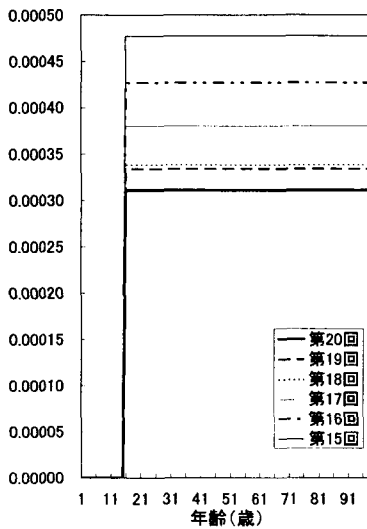


図 5-1 死亡成分別死力の推移①

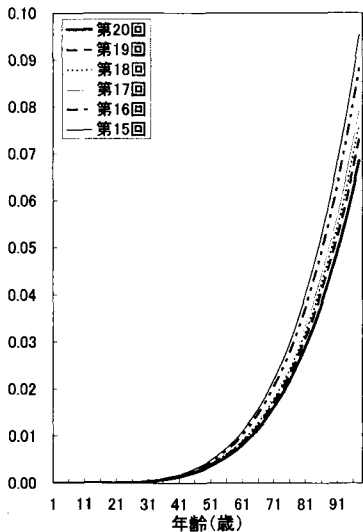
死亡成分別死力の推移(第1成分)



死亡成分別死力の推移(第2成分)



死亡成分別死力の推移(第3成分)



死亡成分別死力の推移(第4成分)

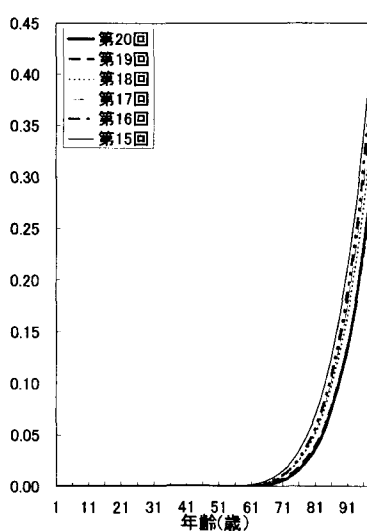


図 5-2 死亡成分別死力の推移②

死亡成分別死力の推移 (死力第1～第4成分合計)

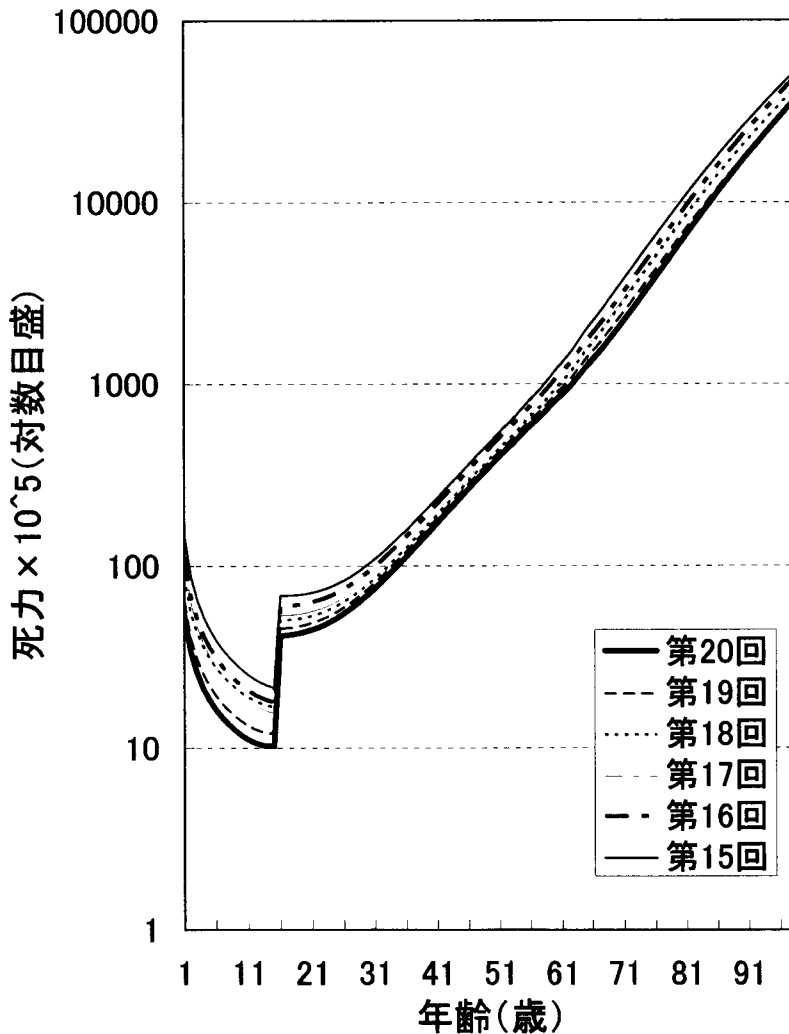


図 6-1 直列 Weibull 分布モデルの回帰母数推移①

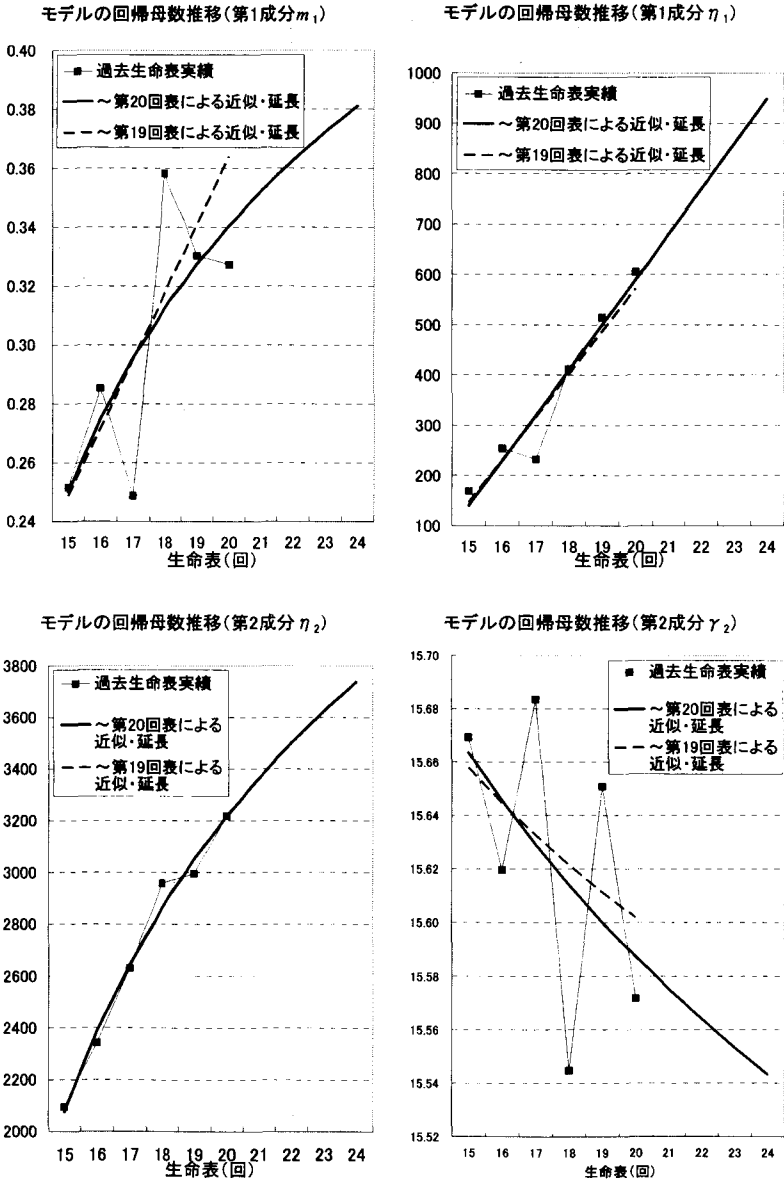
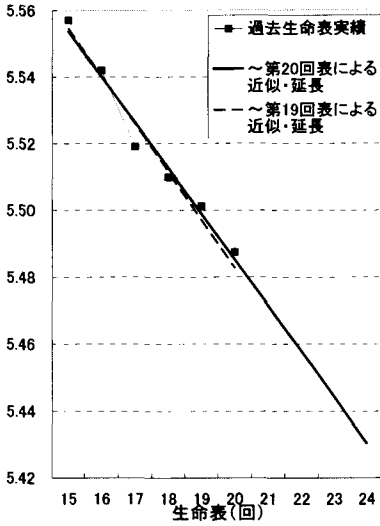
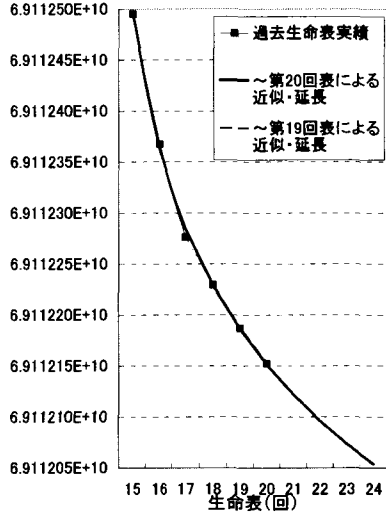


図 6-2 直列 Weibull 分布モデルの回帰母数推移②

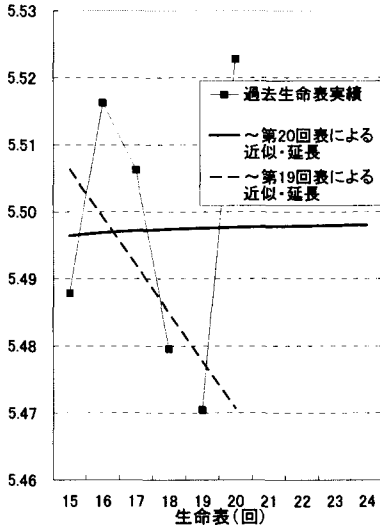
モデルの回帰母数推移(第3成分 m_3)



モデルの回帰母数推移(第3成分 η_3)



モデルの回帰母数推移(第4成分 m_4)



モデルの回帰母数推移(第4成分 η_4)

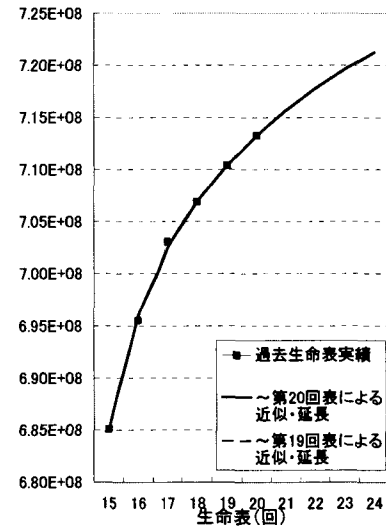


図 6-3 直列 Weibull 分布モデルの回帰母数推移③

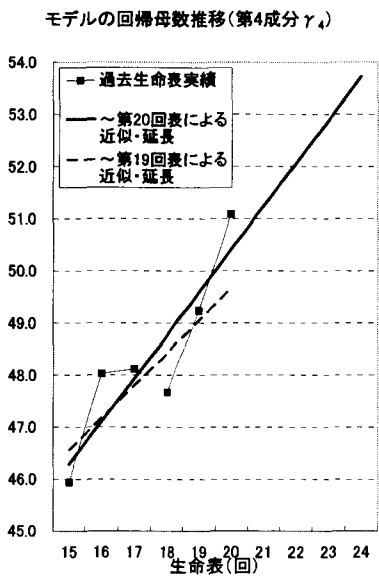


図7 将来推計死亡率

将来推計死亡率(第20回生命表)

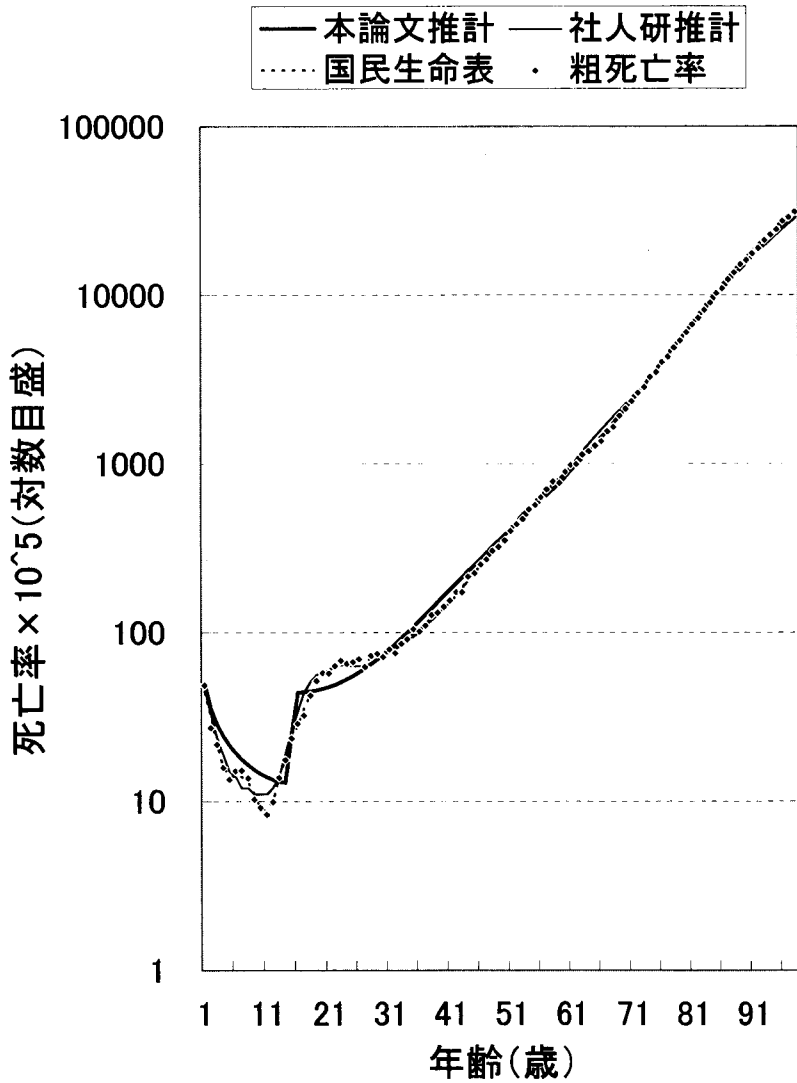


図8 将来推計死亡率 残差

将来推計死亡率 残差(第20回生命表)

— 本論文 — 社人研

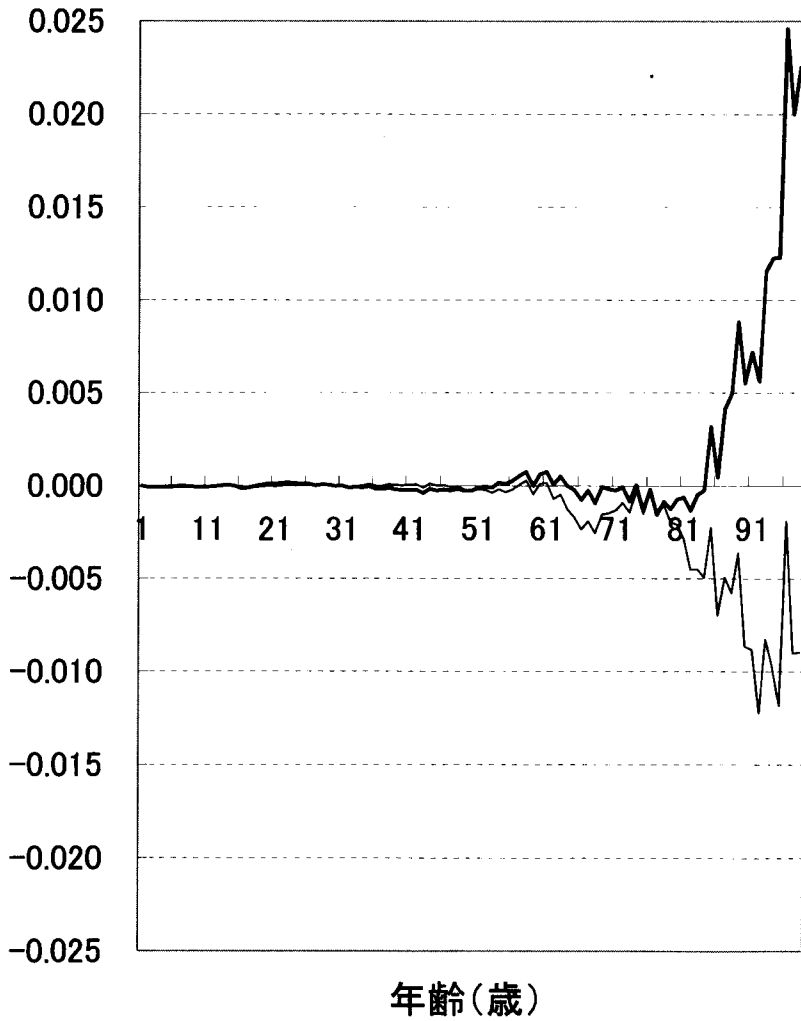


図9 将来推計死亡率 残差2乗比

将来推計死亡率 残差2乗比
(第20回生命表)

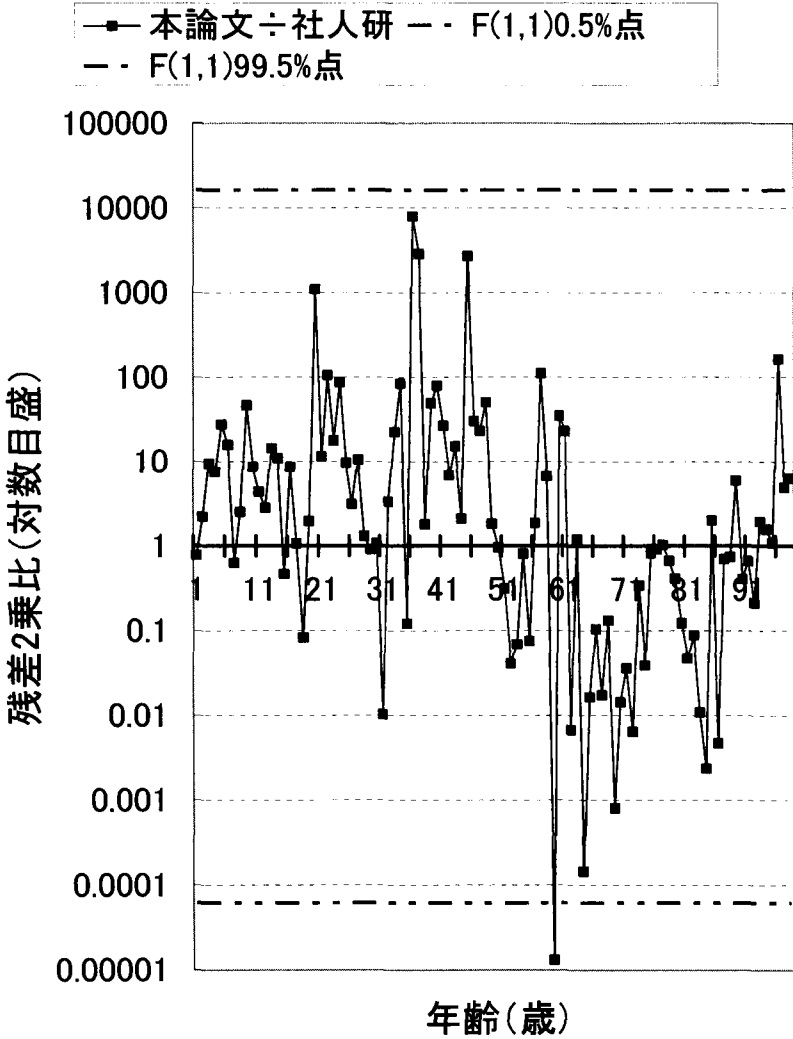


図 10 将来推計死亡率

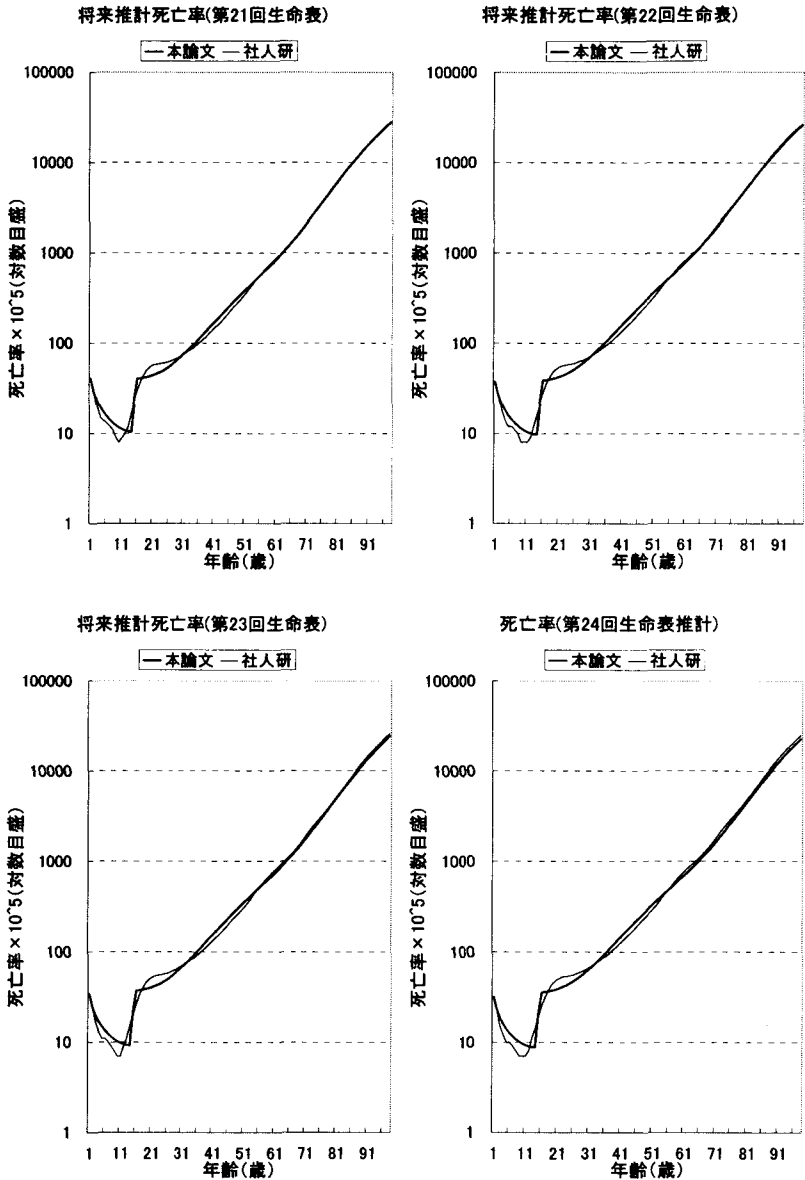
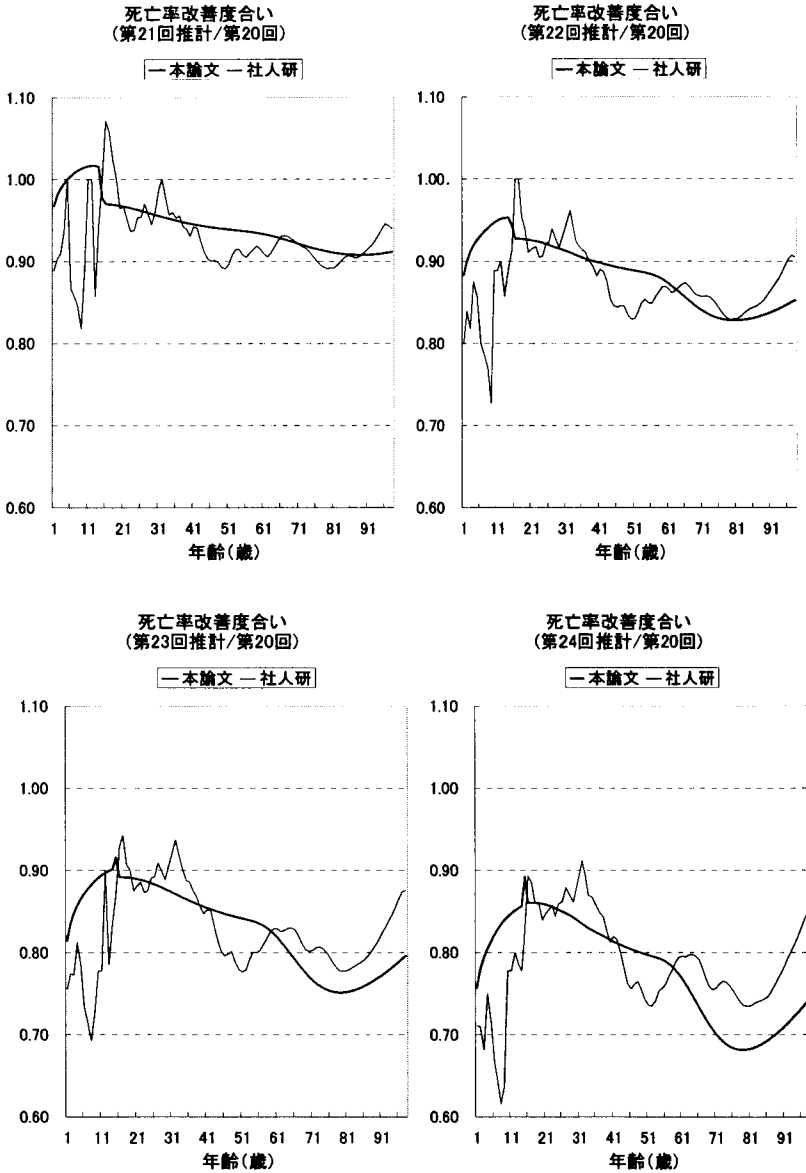


図 11 死亡率改善度合い（対第 20 回生命表）



A method of future mortality rates estimation
- Estimation using the mathematical assumption model -

ARAI, Akira

In this paper, I adopt 'the series-Weibull-distribution model' as a mathematical assumption model of mortality rates, and try fitting 'the series-Weibull-distribution model' to crude mortality rates, and estimating the future mortality rates using the method of estimating the parameters of this model.