

SPVA の最低保証とヘッジの効用

1 . SPVA の死亡最低保証、生存最低保証とオプションの類似性

1.1 オプションとは

オプションとは、

ある特定の商品（原資産）を、
ある一定時点（消滅日）またはそれ以前に、
あらかじめ定められた価格（行使価格）で
買う権利（コール）または売る権利（プット）

のことである。消滅日にしか権利を行使できないものをヨーロピアン、それ以前のいつでも権利を行使できるものをアメリカンと呼ぶ。オプションは「売買する権利」が取引されるので、この権利を行使するかどうか、すなわち実際に原資産を売買するかどうかは、オプションの保有者（権利の買い手）の選択による。

例えばヨーロピアン・コールの買い手（買う権利の買い手）の場合、消滅日に原資産価格が行使価格を上回っているときだけ権利を行使することによって、原資産を行使価格で買い、そのまま市場で原資産を売却することによって、差額分の利益を得る一方、原資産が行使価格を下回っているときは権利は放棄され、損益は生じない。

逆にヨーロピアン・コールの売り手（買う権利の売り手）は、消滅日に原資産が行使価格を上回っているときに権利が行使され、差額分の損失を被る。

例えばヨーロピアン・プットの買い手（売る権利の買い手）の場合、消滅日に原資産が行使価格を下回っているときだけ権利を行使し、手元の原資産（または市場価格で原資産を買い、これを）を行使価格で売り、差額分の利益を得る一方、原資産が行使価格を上回っているときは権利は放棄され、損益は生じない。

逆にヨーロピアン・プットの売り手（売る権利の売り手）は、消滅日に原資産が行使価格を下回っているときに権利を行使され、差額分の損失を被る。

1.2 プレミアム

オプションの売り手は買い手の権利行使に応じる義務があり、この代価にあたるのがプレミアムと呼ばれる。買い手はプレミアムを売り手に支払ってオプションすなわち権利を手に入れる。

1.2.1 BS 式による評価

ブラック・ショールズ式 (BS 式) によるオプションのプレミアム評価式は以下のとおり。

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

$$p = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

ここに、

S_0 : 評価時の原資産価格

K : 行使価格

T : 消滅日までの期間 (年)

r : 割引率 (連続複利)

s : 原資産のボラティリティー

$N(*)$: 標準正規分布の累積密度関数

c : コールのプレミアム

p : プットのプレミアム

\ln : 自然対数

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + s^2/2)T}{s\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - s^2/2)T}{s\sqrt{T}} = d_1 - s\sqrt{T}$$

1.2.2 シミュレーションによる評価

オプションのプレミアムは、シミュレーションを用いても求めることができる。BS 式と同様、原資産の増減が対数正規分布に従う (原資産の増減率の自然対数が正規分布に従う) とする。

$$c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (S_T^{(i)} - K)^+ e^{-rT}$$

$$p = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (K - S_T^{(i)})^+ e^{-rT}$$

ここに

$$\ln(S_{t+1}^{(i)}/S_t^{(i)}) = r - 0.5\mathbf{s}^2 + \mathbf{s}Z_t^i, \quad i=1, \dots, M$$

$$S_0^{(i)} = S_0$$

i = シナリオ番号

$Z_t^{(i)}$ = 標準正規分布からの確率変数

$$(X)^+ = \text{Max}(X, 0)$$

である。一般に、時間の経過 (Δt) に対して、原資産の増減は以下のプロセスに従う。

$$\ln(S_{t+\Delta t}^{(i)}/S_t^{(i)}) = (r - 0.5\mathbf{s}^2)\Delta t + \mathbf{s}\sqrt{\Delta t}Z_t^i$$

手順は以下のとおり。

標準正規分布からの確率変数を生成する ($Z_t^{(i)}$ の生成)

原資産の T 年目の価格を求める ($S_{T+1}^{(i)}$ を求める)

T 年目のペイオフ ($(S_T^{(i)} - K)^+, (K - S_T^{(i)})^+$) を計算し、割り引く。

以上を M 回繰り返す、その平均を求める。

1.3 ペイオフ

オプションの売買に伴う損益をペイオフと呼ぶ。買う権利と売る権利それぞれの買い手と売り手のペイオフは以下のとおり。オプションでは売り手に原資産の価格変動に伴うリスクが存在する。コールの売り手にとっては、原資産の価格の上昇に伴い損失が大きくなり、またプットの売り手にとっては、原資産の価格の下降に伴い損失が大きくなる。このような損失リスクを回避するためにヘッジを用いる（後述）。オプションの購入者から見て正のペイオフの状態にあるときイン・ザ・マネー、ちょうどゼロの状態をアット・ザ・マネー、価値のなくなっている状態をアウト・オブ・ザ・マネーと称する。

1.4 SPVA の最低保証との類似性

SPVA における最低生存保証または最低死亡保証は、ヨーロピアン・プット・オプションの性格と類似している。契約者は最低生存保証額または最低死亡保障額を受け取る権利を購入し、その対価としてプレミアムである保険契約関連費用を支払うこととなる。上記のオプションと異なる主な点は

生存または死亡の条件のもと権利が行使できる点、
プレミアムは契約の初期に一時に支払われるのではなく、保険契約関連費用として
原資産から継続的に徴収される点、
保険契約関連費用自体が原資産の動向に関与する点、
である。保険会社はプットの売り手であるので、プレミアム（保険契約関連費用）を得る
一方、原資産の価格下落リスクも持つことになる。類似点をまとめると以下のとおり。

1.5 最低生存保証の場合

最低生存保証にあっては、満了日の満期保険金額が保証されている。満了日の特別勘定
残高が当該最低保証金額を下回る場合、差額分を保険会社が填補する。

原資産：特別勘定

消滅日：満了日（満了日まで契約が継続し、かつ、被保険者生存していることが条件）

行使価格：最低生存保証額

お客様：売る権利（プット）の買い手

プレミアム：保険契約関連費用（M&E）（またはその一部）

1.6 最低死亡保証の場合

最低死亡保証にあっては、死亡日の死亡保険金額が保証されている。死亡日の特別勘定
残高が当該最低保証金額を下回る場合、差額分を保険会社が填補する。

原資産：特別勘定

消滅日：死亡日（死亡日まで契約が継続し、かつ、その日に死亡したことが条件）

行使価格：最低死亡保証額

お客様：売る権利（プット）の買い手

プレミアム：保険契約関連費用（M&E）（またはその一部）

2. プット・オプションによる最低保証の評価

SPVA の最低保証給付の支出現価の期待値を、ブラック・ショールズ式を用いて評価す
る。プット・オプション評価式を、原資産の評価時の価格（ S_0 ）、行使価格（ K ）および
消滅日までの期間（ T ）の関数とみなして、以下のとおり表記する。

$$p(S_0, K, T) \equiv p = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1)$$

2.1 満期保証の場合

SPVA の満期生存保証給付の支出現価の期待値 ($A_{x:N}$) をブラック・ショールズ式を用いて評価する際、以下の対応関係がある。

記号	プット・オプション	SPVA
S_0	評価時の原資産価格	一時払い保険料
K	行使価格	満期保証額
T	消滅日までの期間 (年)	満期期間 (= N)
r	割引率 (連続複利)	保険関係費用控除後の割引率 (連続複利)

$$A_{x:N} = p(S_0, K, T) {}_T p_x$$

ここに

x : 加入年齢

N : 保険期間

${}_T p_x$: T 年目までの生存確率 (解約による脱退も含む)

である。

2.2 死亡最低保証の場合

SPVA の死亡保証給付の支出現価の期待値 ($A_{x:N}^1$) をブラック・ショールズ式を用いて評価する際、以下の対応関係がある。

記号	プット・オプション	SPVA
S_0	評価時の原資産価格	一時払い保険料
K	行使価格	死亡保証額
T	消滅日までの期間 (年)	死亡日までの経過年数 (切り上げ)
r	割引率 (連続複利)	保険関係費用控除後の割引率 (連続複利)

$$A_{x:N}^1 = \sum_{T=1}^N p(S_0, K, T - 0.5) {}_{T-0.5} p_x \cdot q_{x+T-0.5}$$

ここに

$q_{x+T-0.5}$: $x+T-0.5$ 歳の死亡率

である。

3. オプションのヘッジ

オプションを売った金融機関は、原資産の価格変動リスクを持っている。これをヘッジすることで回避できる。販売したオプションが金融市場で購入できるものであるならば、販売したオプションと同様のオプションを購入して、リスクを回避することができる。しかし、売ったオプションがそもそも金融市場で入手できるような標準的なものでなかったり、顧客のニーズに合わせてテーラーメイドしたものであった場合、リスクに対するヘッジ手段を市場からまかなうことが困難である。

例えば SPVA の最低保証は、前述の様に、保険会社がプット・オプションを販売したことになる。ところが当該プットの消滅までの期間は一般的に数年であり、同様の満期を持つプット・オプションは、容易には市場から購入できない。

4. デルタ・ヘッジ

このような場合のヘッジ手段の一つにデルタ・ヘッジと呼ばれる手段がある。これは、販売した原資産と同様の原資産を購入または売り立てし、時間の経過と共に変動する販売したオプションの評価額に合わせ、「ある割合」で保有する原資産の売買をすることで、オプションを販売した金融機関の原資産の変動に対するリスクを中和する手段である。販売したオプションの満了時には、デルタ・ヘッジに伴う費用が、販売したオプションのプレミアムと経済的に等しくなり、受け取っていたプレミアムと相殺することで、損益はゼロとなる。この「ある割合」がデルタであり、原資産の価格の変動に対するオプション価格の変動の率である。販売したオプションと、別途保有する原資産を合わせたポートフォリオのデルタがゼロとなる時、このポートフォリオをデルタ・ニュートラルと呼ぶ。デルタは、原資産の価格の変動に伴い変動し、また時間の経過と共に変動するので、デルタ・ニュートラルの状態は極めて短時間しか継続しない。実務的には頻繁にポートフォリオの組換えを必要とする。このようにデルタの変動に合わせて頻繁にポートフォリオの組換えを行うことによるヘッジを動的ヘッジという。

4.1 オプションのデルタ

オプションのデルタは原資産の変動に対するオプション価格の変動の率と定義され次のとおりである。

$$\text{コールのデルタ} \Delta = \partial c / \partial S \approx \Delta c / \Delta S$$

$$\text{プットのデルタ} \Delta = \partial p / \partial S \approx \Delta p / \Delta S$$

$\Delta c, \Delta p, \Delta S$ は各々の評価の微小変動

これらは、ヨーロピアン・コールまたはプットの場合、BS 式から次のとおりとなる。コールのデルタは 0 以上 1 以下の正数であり、プットのデルタは -1 以上 0 以下の負数である。

$$\text{コールのデルタ} \Delta = N(d_1)$$

$$\text{プットのデルタ} \Delta = N(d_1) - 1$$

すなわち、ヨーロピアン・コールの 1 単位の売り立ては、原資産の $N(d_1)$ 単位の買い立てでヘッジし、ヨーロピアン・プットの 1 単位の売り立ては、原資産の $1 - N(d_1)$ 単位の売り立てでヘッジする。

例えばヨーロピアン・コールのデルタが 0.6 である場合、1 単位のヨーロピアン・コールを販売した金融機関は、0.6 単位の原資産を購入すればデルタ・ニュートラルのポートフォリオとなる。ここで原資産が 1 円上昇した場合、購入した原資産からは 0.6 円の益が得られるが、販売したコールの評価も 0.6 円上昇し、この分損となる。逆に原資産が 1 円下降した場合、購入した原資産から 0.6 円の損が出るが、販売したコールの評価も 0.6 円下降し、その分益となる。いずれの場合も 1 単位のコールを販売した金融機関は 0.6 単位の原資産を購入することでデルタ・ニュートラルとなる。

例えばヨーロピアン・プットのデルタがマイナス 0.6 である場合、1 単位のヨーロピアン・プットを販売した金融機関は、0.6 単位の原資産を売り立てすればデルタ・ニュートラルのポートフォリオとなる。ここで原資産が 1 円上昇した場合、売り立てした原資産からは 0.6 円の損が出るが、販売したプットの評価は 0.6 円下降し、この分益となる。逆に原資産が 1 円下降した場合、売り立てした原資産から 0.6 円の益が出るが、販売したプットの評価が 0.6 円上昇し、その分損となる。いずれの場合も 1 単位のプットを販売した金融機関は 0.6 単位の原資産を売り立てすることでデルタ・ニュートラルとなる。

4.2 オプションのデルタ・ヘッジの例

オプションをデルタ・ヘッジした場合のシミュレーション例を示す。オプションの消滅日にイン・ザ・マネーであった場合とアウト・オブ・ザ・マネーであった場合の例である。いずれも週単位のリバランスを仮定している。最終損益が BS 式から計算されるオプションのプレミアムと異なるのは、リバランスの頻度が少ないからである。リバランスの頻度を大きくすれば理論的に BS 式から計算されるオプション・プレミアムと一致する。計算の前提条件は以下のとおり。

S_0	100,000
K	100,000
σ	0.20
r	0.01
T	0.460273973 = 24 週間

BS 式により求まるコールとプットのプレミアムは以下のとおり。また、シミュレーションで試算した各々の値を併記した。さらに、デルタ・ヘッジを利用した場合の最終費用現価も同様にシミュレーションした。これはポートフォリオの組換え頻度を上げれば理論的に BS 式と一致するのであるが、実際には差額が生じる。差額の程度を検証する目的である。

	コール	プット
BS 式	5,629	5,170
シミュレーションの平均	5,699	5,249
シミュレーション数	1000 本	1000 本
対 BS 式	101.2%	101.5%
標準偏差	9,014	7,228

デルタ・ヘッジの場合	コール	プット
シミュレーションの平均	5,630	5,198
シミュレーション数	1000 本	1000 本
対 BS 式	100.0%	100.5%
標準偏差	1,767	1,533

いずれの場合も次の関係がある。

$$\text{原資産購入単位}(0) = \text{デルタ}(0)$$

$$\text{原資産購入単位}(t) = \text{デルタ}(t+1) - \text{デルタ}(t)$$

$$\text{購入コスト} = \text{原資産}(t) \times \text{原資産購入単位}(t)$$

$$\text{累積購入コスト}(0) = \text{購入コスト}(0)$$

$$\text{累積購入コスト}(t+1) = \text{累積購入コスト}(t) \times \text{Exp}(r \cdot 7/365) + \text{購入コスト}(t)$$

購入単位合計は最終週の各々のデルタと等しく、以下のとおりとなる。

	コール	プット
インザマネー	1	-1
アウトオブザマネー	0	0

5. SPVA の最低保証へのデルタ・ヘッジの応用

5.1 実務の概要

前述のように SPVA の最低保証は、プット・オプションの一種であると考えられるから、プット・オプションに対するデルタ・ヘッジと同様の方法によって、原資産価格の変動に関するリスクをヘッジすることができる。

SPVA の最低保証給付の支出の現在価値の期待値を解析的に求めるのは容易であるとは限らないから、これをシミュレーションによる数値解法で求める。手順は、概ね次の通りである。

- ・ 保障の種類に応じたモデルを構築する。(例：一時払保険料の額を最低保証死亡保障額とする、特別勘定の運用の実績によって最低保証死亡保障額が増額される、など)
- ・ 解約率・死亡率などの保険数理的仮定、ボラティリティなど原資産の収益に関する仮定、リスクフリーレートなどを与え、コンピュータ・シミュレーションにより最低保証給付の支出の現在価値の期待値を求める。
- ・ 評価時点の原資産価格を変化させてシミュレーションを行う。原資産価格を変化させない場合の期待値と、変化させた場合の期待値とを比較することによって、原資産価格の変化に対する最低保証給付の支出の現在価値の期待値の感応度を求める。この感応度を以ってデルタとする。
- ・ デルタにより、ヘッジに必要な資産の数量を決定する。
- ・ 原資産として T O P I X 東証株価指数などの各国の先物を売りだてしている。

5.2 実務上の問題点

SPVA の最低保証の評価に用いる保険数理的仮定は、従来 of 生命保険の評価に用いる保険数理的仮定と比較すると、適切な仮定を設けることに困難がある。もし、適切な仮定が与えられなければ、ヘッジは有効に機能しない。

従来 of 生命保険として保険金額が一定である死亡保険を例にとると、予定死亡率を高くすることによって保険給付の支出原価は大きく評価される。また、保険料の払い込みが定期払い込みであるとすれば、保険料の収入原価は小さく評価される。従って、予定死亡率を高くすることは保守的である。

一方、SPVA の最低保証について予定死亡率を高くすることは、給付の支出の現在価値の期待値を大きくする場合があるため、保守的とは限らない。予定死亡率を高くすることで保険給付が行われるまでの期間は短くなるが、オプションの価値は、行使までの期間が短くなることによって小さくなることがあるためである。

また、オプション評価における一般的な問題として、原資産のボラティリティやリスクフリーレートの決定方法が挙げられる。

原資産である特別勘定のポートフォリオを T O P I X などの先物でヘッジしているが、ヘ

ッジ手段の選択いかんに係わらず、一般的に、ヘッジ手段がヘッジ対象を良く複製しているか、を検証する必要がある。

5.3 実務の課題

実務の課題としては、大きく分けて、シミュレーションに関する課題とヘッジ取引に関する課題とが挙げられる。

5.3.1 シミュレーションに関する課題

SPVA の最低保証の評価に関してコンピュータ・シミュレーションによる数値解法を用いると、計算を繰り返す行うため時間を要する。特に SPVA の契約は長期に渡るものであるため、計算量が大きく、処理時間は長くなる傾向がある。オプションの原資産にあたる特別勘定が複数あることも、処理時間を長くする。このため、コンピュータの性能によっては、計算の精度をコントロールしたり、特別勘定を適当にグループ化したりすることで、計算量を抑制することが課題となる。

5.3.2 ヘッジ取引に関する課題

また、市場の流動性が完全でないこと、取引手数料があること、原資産の価格だけでなく、原資産の収益率のボラティリティや金利が変動することなどにより、デルタの変動に合わせた最適なポートフォリオの組換えが行えないようなリスクの存在が考えられるが、このリスクを回避する手段の構築が、ヘッジ取引に関する課題としては挙げられる。

参考資料

John c. Hull, "Options, Futures, and Other Derivative Securities: 2nd Edition" Prentice Hall

Mary Hardy, "Investment Guarantees" John Wiley & Sons, Inc.

日本証券アナリスト協会編「証券投資論(第3版)」日本経済新聞社