

付録D - その他の確率的投資収益率モデルの検証

モデル検証のより一般的な手順は、以下のとおりである。

1. ステップ1：モデルに対する実績値の当てはめ

モデルは、「最尤推定法」(Maximum Likelihood Estimation)や同様の統計的手法を用いて、1956年1月～1999年12月の「トロント証券取引所300種」(TSE300: Toronto Securities Exchange)の収益率データを当てはめるべきである。

(1) 最尤推定法

「最尤推定法」(Maximum Likelihood Estimation)を用いて解決できる問題は、一連の特定観測値がある場合、観測値の最も高い確率が得られるパラメーターの集合は何かということである。対数正規における最尤推定法は、観測対象の対数収益率の平均値と標準偏差で簡単に得られる。

対数正規モデル以外のモデルについて、最尤パラメーターはデータの統計上の積率から簡単に導くことができないのが一般的である。尤度関数を作成し、最大値が得られるパラメーターを見つける必要がある。

モデルとパラメーターの集合を仮定すれば、尤度関数は実際の観測値の確率に比例する。したがって、尤度関数の最大化は、観測値の確率の最大化に等しい。技術的に、尤度関数は、パラメーターの集合に対する観測値の合同確率密度関数である。

モデルには m 個のパラメーターがあると仮定する。パラメーターの集合はベクトル θ に代表される。例えば、初期の「自己回帰モデル」(AR: AutoRegressive Model)には3つのパラメーターである長期平均値 μ 、条件付き標準偏差 σ 、自己回帰パラメーター a がある。この場合、 $\theta = (\mu, a, \sigma)$ である。

尤度関数 $L(\theta)$ は、観測値の合同確率密度関数である。対数収益率がより通常であるが、収益率データの t 番目の数値を x_t で示す。

連続的な期間のそれぞれが独立である仮定する場合、この密度は全ての個々の密度関数の積である。例えば、対数正規モデルや静態分布モデルを用いると、これは真となる。データの標本の大きさが n である場合、尤度関数は次のとおりである。

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta)$$

多くのモデルについて、収益率は独立したものではないと仮定する。例えば、「自己回帰モデル」(AR)、「局面転換モデル」(RSM: Regime Switching Model)、「確率変動モデル」、「ウィルキー・モデル」(Wilkie Model)について、連続的な期間の数値は、一定の方法で手間の数値により決まる。この場合、尤度関数は、次のように反復的に構築される。

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i | x_1, \dots, x_{i-1}, \theta)$$

対数尤度で作業する方がより便利であるのが通常である。

$$l(\theta) = \log L(\theta) = \sum_{r=1}^n \log f(x_r | x_1, x_2, \dots, x_{r-1}, \theta)$$

対数収益率の手前の数値で決まる平均値と変動性により、 t 番目の対数収益率の条件付き密度がわかり、通常は正規分布を仮定するため、「自己回帰モデル」(AR)、「自己回帰型条件付き不等分散モデル」(ARCH: AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity Model)、「一般化自己回帰条件付き不等分散モデル」(GARCH: Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity Model)でこれは簡単に計算できる。例えば、これは、オーダー1の「自己回帰モデル」(AR)について、 x_r に対する各数値は手前の数値である x_{r-1} とパラメーター θ により決まることを意味する。「局面転換モデル」(RSM)について、計算はやや複雑である。「一般化局面転換モデル」

(GRSM: Generalized Regime Switching Model)の詳細は、ハミルトン & サスメル(Hamilton & Susmel, 1994)、ハーディー(Hardy, 1999)にある。

(2) 最大化

一度、対数尤度関数を評価すると、パラメーターに対する最尤推定値はパラメーターであるベクトルを通じた最大化で得られる。これは、 $l(\cdot)$ に対する最大値を導くパラメーターの集合を見つけることを意味する。これは、(Solverのような)表計算ソフトウェアや統計的ソフトウェアを用いて実行される。これらのパラメーターは、次の段落で用いる最尤パラメーターである。尤度関数を最大化する上で、最大化アルゴリズムを用いるように注意すべきである。いくつかの場合、最大化サブ・ルーチンは全体の最大値ではない局所の最大値を導くことがある。

「ウィルキー・モデル」(Wilkie Model)を用いる場合、この段落に記載する手順は、各級数毎に別個に行われ、カスケードに落とし込む。「インフレーション・モデル」(Inflation Model)で最尤パラメーターを計算し始める。それから、株主配当指標と金利モデルから導く株主配当利回りであるカスケードの次の級数に対するパラメーターを見つける。

2. ステップ2: モデルで発生する累積収益率リスク・ファクターの検証

期間1年、期間5年、期間10年の「累積収益率係数」の2.5、5、10パーセント点の計算にモデルを用いる。いくつかのモデルについて、パーセント点を分析的に計算できるだろう。計算できない場合、シミュレーションによりパーセント点を発生させて、『ステップ2A』に進む。計算できる場合、標本誤差の影響を排除できるため、分析的な計算が好ましい。

偏りのない初期値を用いる。例えば、これは将来値の発生に必要な、実績観測値の長期の条件付き平均値で達成できる。計算したパーセント点が『テーブル1』の数値よりも小さい場合、パラメーターを調整する必要があるだろう。

いくつかの場合で、期間1年、期間5年、期間10年の「累積収益率係数」の分布関数を計算する方がより簡単である。すなわち、無作為抽出の期間1年の「累積収益率係数」が A_1 である場合、分布関数は次のとおりである。

$$F_{A_1}(y) = \Pr[A_1 \leq y]$$

『テーブル1』の各数値に対する適切な分布関数を評価する。分布関数の数値が検証するパーセント点よりも大きい場合、モデルは検証に合格する。分布関数の数値が検証済のパーセント点よりも小さい場合、パラメーターを調整する必要があるだろう。

例えば、期間1年の「累積収益率係数」の2.5パーセント点は、「ファクター・テーブル」上の数値である0.76よりも小さくしなければならぬ。 $F_{A_1}(0.76)$ を計算する。これが0.025よりも大きい場合、モデルが仮定する確率分布の2.5パーセント点は、求められる0.76よりも小さくしなければならぬ。 $F_{A_1}(0.76)$ が0.025よりも小さい場合、確率分布のテイルが薄すぎ、検証項目に合致するようにパラメーターを調整することが必要になる。

3. ステップ2A: シミュレーションで用いる累積収益率リスク・ファクターの検証

シミュレーションを用いる上で、検証は標本抽出のばらつきに感度があまり高くないこと確保することは重要である。以下の指示は、検証基準に95%の確率で合致することを確保するであろう。

『テーブル1』にある3つの「累積収益率リスク・ファクター」のそれぞれに対する n 個の数値をシミュレーションする(期間1年、期間5年、期間10年)。

『テーブル1』の各項目について、検証数値を選択し、適切な「ファクター・テーブル」の数値を下回る「累積収益率リスク・ファクター」に対するシミュレーション上の数値の個数を数える。この数値を N とする。例えば、期間1年の「累積収益率係数」の検証基準は0.76であり、 N は0.76より小さい期間1年の「累積収益率係数」に対するシミュレーション上の数値の個数を代表する。

$\hat{p} = \frac{N}{n}$ は、 p の推定値であり、「累積収益率係数」が検証数値よりも小さい真の確率である。それは、モデルに従い、0.76 は「累積収益率係数」の確率分布のおよそ 100 \hat{p} パーセント点にある。二項分布に対する正規近似計算を用いると、95%の信頼性で次の不等式が成立する。

$$p > \hat{p} - 1.645 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

したがって、例えば、期間 1 年の「累積収益率係数」が $A_1 \leq 0.76$ となる確率を検証するため、10,000 個のシミュレーション上の数値 A_1 を発生させる。0.76 を下回るシミュレーションの個数は $N=280$ と仮定する。 $\hat{p} = 0.0280$ であり、95%の信頼性で $p > 0.0253$ である。したがって、確率分布の 2.5%以上が基準数値 0.76 を下回っていることが 95%の信頼性で確保され、検証基準が充足される。

4. ステップ 3：検証基準に当てはめるためのモデルの調整

多くのパラメーターがあるモデルについて、パラメーターを調整するうまい方法がないのが一般的である。データと連続性のある平均収益率を維持する一方、収益率分布の左辺テイルの十分な確率を確保するという目的を考慮する。' は調整済パラメーター・ベクトルを示す。

5. ステップ 4：期間 1 年の累積収益率係数の平均値と標準偏差の確認

調整済パラメーター・ベクトル ' を用いて、分析的に、可能であり、必要であれば、シミュレーションにより、無作為抽出の期間 1 年の「累積収益率係数」である A_1 の平均値と標準偏差を計算する。平均値が 1.10 ~ 1.20 の範囲外である場合、または、標準偏差が 17.5%より小さい場合、『ステップ 3』に戻る。

6. ステップ 5：異なるデータを用いる場合の調整

その他の市場データを用いて株式収益率モデルを評価する場合、『ステップ 3』にある調整を適用すべきである。すなわち、新しいデータに最もよく当てはまるパラメーター・ベクトルが ' である場合、使用するパラメーター・ベクトルは ' = ' + (' - ') であるべきである。

7. 参照

ハミルトン J D (Hamilton J D) (1994) 『時系列分析』 (Time Series Analysis)、プリンストン大学出版

ハミルトン J D & サスメル R (Hamilton J D & Susmel R) (1994) 『自己回帰型条件付き不等分散と局面転換』 (AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity and Change in Regime)、エコノメトリクス・ジャーナル (Journal of Econometrics) 64 307-333

ハーディー M R (Hardy M R) (1999) 『最低保証付ファンド保険の株式収益率モデル』 (Stock Return Model for Segregated Fund Guarantees)、IIPR 研究報告 99-14、ウォータールー大学

以上