# 数　学　II　（問題）

1. $X_1, X_2, \dots, X_N$ を2項母集団 $b(n, p)$ からの標本変量とするとき，

(1) $p$ を母数として，$T = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$ は充足推定量であることを示せ。

(2) 母数 $p$ の最尤推定量を求めよ。

2. 次の(1)〜(3)が成り立つとして，時刻 $t_0$ において作動している工作機械が時刻 $t_0 + t$ まで停止しない（作動し続ける）確率を求めよ。

(1) この確率は時刻 $t_0$ に依存せず，時間 $(t_0, t_0 + t)$ の長さ $t$ だけに依存する。

(2) 工作機械が微小時間 $\Delta t$ の間に停止する確率は $\Delta t$ に比例する（比例定数 $\lambda$）。

(3) 重なり合わない時間間隔に対しては，それらの時間内に機械が停止するという事象は互に独立である。

3. 自由度 $n$ の $\chi^2$（カイ2乗）- 分布の分布関数を $F_n(x)$ とするとき，次式を証明せよ。

$$e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} = 1 - F_{2n+2}(2x)$$

4. 分散 $\sigma^2$ が既知の正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの大きさ $n$ の標本の平均値を $\bar{x}$ とし，帰無仮説 $H : \mu = \mu_0$ を棄却域 $\dfrac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} > \alpha$ （$\alpha =$ 正の定数）によって検定するとき，検出力関数は $|\mu - \mu_0|$ の増加関数であることを示せ。

5. 確率密度関数が $f(x)$ なる分布をもつ母集団からの大きさ $n$ の標本値 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を小さいものから順に並べて $x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)}$ としたとき，$x_{(r)}$ を実現値とする標本変量 $X_{(r)}$ を $r$ 番目の順序統計量という。大きさ $n$ の標本による $k$ 個の順序統計量 $X_{(r_1)}, X_{(r_2)}, \dots, X_{(r_k)}$ $(r_1 < r_2 < \dots < r_k)$ の同時分布の確率密度関数は

$$f(x_{(r_1)}, x_{(r_2)}, \dots, x_{(r_k)}) = \frac{n!}{(r_1 - 1)!(r_2 - r_1 - 1)!\dots(r_k - r_{k-1} - 1)!(n - r_k)!}$$
$$\times\left(\int_{-\infty}^{x_{(r_1)}} f(x)dx\right)^{r_1-1}\left(\int_{x_{(r_1)}}^{x_{(r_2)}} f(x)dx\right)^{r_2-r_1-1}\cdots\left(\int_{x_{(r_k)}}^{\infty} f(x)dx\right)^{n-r_k} f(x_{(r_1)})f(x_{(r_2)})\dots f(x_{(r_k)})$$

で与えられることを証明せよ。

# 数学Ⅱ　（解答例）

1.(1)　$X_i$ の確率分布は $b(n,p)$ であるから、Tの確率分布は二項分布の再生性により $b(nN,p)$ である。

$f(x_1,x_2,\cdots,x_N;p)=P(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_N=x_N)$

$=P(X_1=x_1)P(X_2=x_2)\cdots P(X_N=x_N)$

$=\binom{n}{x_1}\binom{n}{x_2}\cdots\binom{n}{x_N}p^{x_1+x_2+\cdots+x_N}(1-p)^{nN-(x_1+x_2+\cdots+x_N)}$

であるから、$t=x_1+x_2+\cdots+x_N$ として

$$g(t;p)=\binom{nN}{t}p^t(1-p)^{nN-t}$$

$$h(x_1,x_2,\cdots,x_N)=\binom{n}{x_1}\binom{n}{x_2}\cdots\binom{n}{x_N}\Big/\binom{nN}{x_1+x_2+\cdots+x_N}$$

とすれば、$g(t;p)$ はTの確率分布、$h(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ は $p$ には関係しない関数で、

$f(x_1,x_2,\cdots,x_N;p)=g(t;p)\,h(x_1,x_2,\cdots,x_N)$

と表わせる。よってTは充足推定量である。

(2)　尤度関数 $l(p)$ は

$l(p)=\binom{n}{x_1}\binom{n}{x_2}\cdots\binom{n}{x_N}p^{x_1+x_2+\cdots+x_N}(1-p)^{nN-(x_1+x_2+\cdots+x_N)}$ である。

ここで、$K(p)=\log l(p)$

$=(x_1+x_2+\cdots+x_N)\log p+\{nN-(x_1+x_2+\cdots+x_N)\}\log(1-p)$

$+\log\left\{\binom{n}{x_1}\binom{n}{x_2}\cdots\binom{n}{x_N}\right\}$

とおいて $p$ で微分すれば

$$\frac{dK(p)}{dp}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_N}{p}-\frac{nN-(x_1+x_2+\cdots+x_N)}{1-p}$$

$\dfrac{dK(p)}{dp}=0$ を満たす $p$ を $\hat{p}$ とすると

$\hat{p}=(x_1+x_2+\cdots+x_N)/(nN)$

ところで、

$$\frac{d^2K(p)}{dp^2}=-(x_1+x_2+\cdots+x_N)/p^2-\{nN-(x_1+x_2+\cdots+x_N)\}/(1-p)^2<0$$

であるから $\hat{p}$ は $K(p)$ の極大値で同時に最大値を与え、したがって $l(p)$ の最大値を与える。
ゆえに、$\overline{X}=(X_1+X_2+\cdots+X_N)/(nN)$ が $p$ の最尤推定量である。

2

(1)より求める確率をP(t)とする。

機械が微小時間Δtの間に停止する確率は (2)より

$1-P(\Delta t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$

である。

時刻 $t_0$ に作動している機械が時刻 $t_0+t+\Delta t$まで作動し続ける（停止しない）という事象の確率を求める。この事象が生起するためには、長さ tとΔtとの２つの重なり合わない時間間隔において機械は停止してはならない。

したがって、(3) と確率の乗法定理により

$$P(t+\Delta t)=P(t)P(\Delta t)$$
$$=P(t)\{1-\lambda\Delta t-o(\Delta t)\}$$

これから、

$$\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t}=-\lambda P(t)-\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

ここで、Δt→0 とすると

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t}=\frac{dP(t)}{dt}=-\lambda P(t)$$

この微分方程式の解は

$P(t)=C\,e^{-\lambda t}$ (Cは定数)

$P(0)=0$より$C=1$

よって　$P(t)=e^{-\lambda t}$

3.

$$1-F_{2n+2}(2x)=1-\frac{1}{2^{(2n+2)/2}\Gamma((2n+2)/2)}\int_0^{2x} t^{(2n+2)/2-1}e^{-t/2}dt$$

$$=1-\frac{1}{2^{(n+1)}n!}\int_0^{2x} t^{n}e^{-t/2}dt$$

$$=1-\frac{1}{2^{(n+1)}n!}\int_0^{x} (2t)^{n}e^{-t}2dt$$

$$=1-\frac{1}{n!}\int_0^{x} t^{n}e^{-t}dt \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ここで、$L_n(x)=\int_0^x t^n e^{-t}dt$ とおくと

$$L_n(x)=\left[-t^n e^{-t}\right]_0^x+n\int_0^x t^{n-1}e^{-t}dt$$

$$=-x^n e^{-x}+nL_{n-1}(x)$$

$$=-x^n e^{-x}+n\left\{-x^{n-1}e^{-x}+(n-1)L_{n-2}(x)\right\}$$

$$=\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=-e^{-x}\left\{x^n+nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}+\cdots+n!x\right\}+n!L_0(x)$$

$L_0(x)=\int_0^x e^{-t}dt=1-e^{-x}$であるから

$$L_n(x)=-e^{-x}\left\{x^n+nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}+\cdots+n!x+n!\right\}+n!$$

$$=-n!e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+n! \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1),(2) より

$$1-F_{2n+2}(2x)=1-\frac{1}{n!}\left\{-n!e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+n!\right\}$$

$$=e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

４．

検出力関数＝１－Ｐ（第２種の誤りがおこる）

＝１－Ｐ（帰無仮説Ｈを棄却しない｜$\mu \neq \mu_0$）

＝Ｐ（帰無仮説Ｈを棄却する｜$\mu \neq \mu_0$）

$$= P\left( \frac{|x-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} > \alpha \mid \mu \neq \mu_0 \right)$$

一方　$t = \dfrac{x-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ は平均値 $\dfrac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ （＝ａとおく）

分散１の正規分布にしたがうので、

検出力関数＝Ｐ（｜ｔ｜＞$\alpha$｜$\mu \neq \mu_0$）

$$= \left( \int_{-\infty}^{-\alpha} + \int_{\alpha}^{\infty} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(t-a)^2/2} dt$$

$$= 1 - \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(t-a)^2/2} dt$$

$= \psi(a)$ とおく

$$\frac{d\psi(a)}{da} = \frac{d}{da}\left( 1 - \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(t-a)^2/2} dt \right)$$

$$= \int_{-\alpha}^{\alpha} (t-a) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(t-a)^2/2} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha-a}^{\alpha-a} t\, e^{-t^2/2} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ e^{-t^2/2} \right]_{-\alpha-a}^{\alpha-a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{-(\alpha-a)^2/2} - e^{-(\alpha+a)^2/2} \right\}$$

$\alpha > 0$だから、ａ＞，＝，＜０にしたがって

$\dfrac{d\psi(a)}{da}$ ＞，＝，＜０となる。

よって　$\psi(a)$ は｜ａ｜の増加関数

したがって　｜$\mu - \mu_0$｜の増加関数である。

5. $x_{(r_1)} < X_{(r_1)} \leqq x_{(r_1)} + dx_{(r_1)}, x_{(r_2)} < X_{(r_2)} \leqq x_{(r_2)} + dx_{(r_1)}$

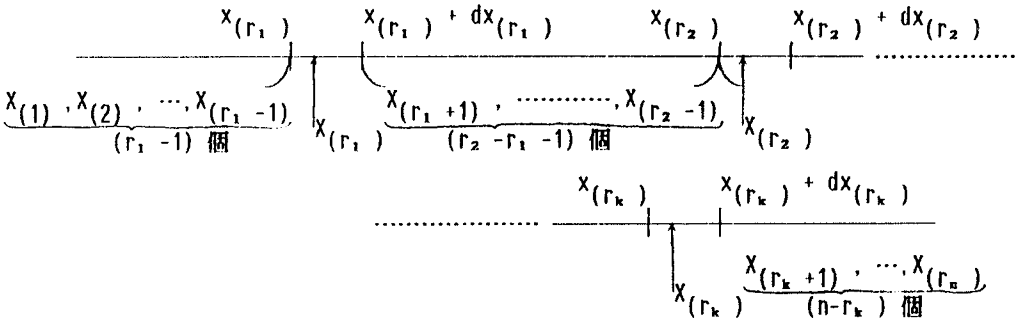
$, \cdots\cdots, x_{(r_k)} < X_{(r_k)} \leqq x_{(r_k)} + dx_{(r_k)}$ の同時確率は

$P(X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots\cdots, X_{(r_1-1)} \leqq x_{(r_1)} \leqq X_{(r_1)} \leqq x_{(r_1)} + dx_{(r_1)}$

$\leqq X_{(r_1+1)}, \cdots\cdots, X_{(r_2-1)} \leqq x_{(r_2)} \leqq X_{(r_2)} \leqq x_{(r_2)} + dx_{(r_2)} \leqq \cdots\cdots, \cdots\cdots$

$\leqq X_{(r_{k-1})} \leqq x_{(r_{k-1})} + dx_{(r_{k-1})} \leqq X_{(r_{k-1}+1)}, \cdots\cdots$

$, X_{(r_k-1)} \leqq x_{(r_k)} \leqq X_{(r_k)} \leqq x_{(r_k)} + dx_{(r_k)})$ となる。




これはn個の中の$(r_1-1)$個が $x_{(r_1)}$ 以下の値をとり

1個が $x_{(r_1)}$ と $x_{(r_1)} + dx_{(r_1)}$ の間の値をとり

$(r_2-r_1-1)$ 個が $x_{(r_1)} + dx_{(r_1)}$ と $x_{(r_2)}$ の間の値をとり

…………………

$(n-r_k)$ 個が $x_{(r_k)} + dx_{(r_k)}$ 以上の値をとる確率である。

一方1つの標本が $x_{(r_1)}$ 以下となる確率は$\int_{-\infty}^{x_{(r_1)}} f(x)dx$であり

$x_{(r_1)}$ と $x_{(r_1)} + dx_{(r_1)}$ の間となる確率は$f(x_{(r_1)})dx_{(r_1)}$ であるから

以下同様にして、求める確率は多項分布にしたがい

$$\frac{n!}{(r_1-1)!(r_2-r_1-1)!\cdots\cdots(r_k-r_{k-1}-1)!(n-r_k)!}$$

$$\times \left\{\int_{-\infty}^{x_{(r_1)}} f(x)dx\right\}^{(r_1-1)} \left\{\int_{x_{(r_1)}}^{x_{(r_2)}} f(x)dx\right\}^{(r_2-r_1-1)} \times\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\times \left\{\int_{x_{(r_k)}}^{\infty} f(x)dx\right\}^{(n-r_k)}$$

$$\times f(x_{(r_1)}) \cdots\cdots f(x_{(r_k)})\, dx_{(r_1)} \cdots\cdots dx_{(r_k)}$$ となる。