# 昭和59年度（問　題）

1.　n年満期養老保険（保険金年末払，n＞1）の全期チルメル式責任準備金のチルメル歩合$\alpha$を，第1保険年度末チルメル式責任準備金が0となるように定める。このとき次式が成り立つことを証明せよ。

$$\alpha = P_{x+1:\overline{n-1|}} - vq_x$$

2.　次の給付を行う保険金年末払，保険料年払，保険期間n年，被保険者$x$歳加入の保険を考える。

(1)　満期まで生存したとき，S（S＞1）を支払う。

(2)　保険期間中に死亡したとき，その保険年度末の責任準備金が1を超えない場合は1，超える場合は保険年度末責任準備金を支払う。

今，第r保険年度が保険年度末責任準備金が1を超えない最後の保険年度とすると，

$$(S-1)\ \ddot{a}_{x:\overline{r|}} \leqq \ddot{s}_{\overline{n-r|}}$$

が成立つことを示せ。

3.　下記の内容の夫婦年金保険につき，その年払純保険料と純保険料式責任準備金を求めよ。ただし，予定死亡率は男女同一とし，契約時年齢は夫$x$歳妻$y$歳とする。

(1)　保険料払込期間はn年とし，夫の生存中毎年払とする。

(2)　n年経過時に夫が生存している場合，その後，夫の生存を条件に，毎保険年度始に1ずつ年金を支払う。

(3)　保険料払込期間中またはその後に夫が死亡した場合，夫が死亡した翌保険年度始から，妻の生存を条件に毎年1ずつ年金を支払う。

4.　(1)　次式の成り立つことを証明せよ。

$$\frac{d}{dx}\left(l_x\,\bar{a}_x\right) = -\,l_x\,\bar{A}_x$$

(2)　定常人口の社会において，現在$x$歳以上の人が全員同一の掛金を拠出して基金を設立し，加入者が死亡した場合基金より即時に1支払うものとする。この基金の加入者が払い込むべき掛金を求めよ。ただし，掛金の拠出は設立時1回限りとする。

5. 次のA，B2問のうち，1問を選んで解答せよ。

A. 次の(1)～(10)にあてはまる算式を所定の解答用紙に記入せよ。

ある保険会社の収支を，保険契約勘定のみに限定し（契約者配当に関する勘定を除く），責任準備金は理論上のものを積立てるものとし，かつ，未収・未払もなく，前年度までに失効した契約の復活もない場合で考える。

この会社のある年度の損益計算書が次のとおりであったとする。

| 支出 | | 収入 | |
|---|---|---|---|
| 保険金 | S | 年始責任準備金 | $V_0$ |
| 解約返戻金 | W | 保険料 | $P'$ |
| 事業費 | E | 利息 | I |
| 年末責任準備金 | $V_1$ | | |
| 合計 | b | 合計 | a |

この会社の剰余金G（＝a－b）を利源に分析するため，次のとおり利源の定義を与える。

〔死差益〕実際利回りが予定利率に，事業費が予定事業費に，保険料は責任準備金計算用のものに一致し，解約者には解約時の責任準備金を支出するものと仮定した場合に生ずる剰余金を，年度末まで予定利率で利殖した額。

〔費差益〕事業年度内に収入した予定事業費から，年度内に支出した事業費を減じたものを，年度末まで予定利率で利殖した額。

〔解約益〕事業年度内に解約または失効した契約の解約・失効時における責任準備金から解約返戻金を減じたものを，年度末まで予定利率で利殖した額。

〔利差益〕死差益，費差益，解約益計算の各収支項目について，実際利回りを用いて計算した金額が，予定利率で計算した金額を超える額。

上記の定義に従って，剰余金Gを各利源に分析するにあたり，保険料の収入，ならびに保険金・解約返戻金および事業費の支払は，年度の中央で生ずるものとし，保険料は年払とする。

まず，実際利回り$i'$を求める。ハーディーの公式によると

$$i' = \frac{2\,I}{A + B - I}$$

で，AおよびBは，それぞれ年始・年末の資産であるが，この場合

$$A = \boxed{\quad(1)\quad},\quad B = \boxed{\quad(2)\quad}$$

であり，これをIについて解くと，

$$I = \frac{(V_0 + V_1 + G)}{\boxed{\quad(3)\quad}} \times \frac{i'}{2}$$

となり，このIをG＝a－bに代入してGを求めると

$$G = \boxed{\quad(4)\quad}$$

となる。

次に，P′を純保険料Pと付加保険料$\phi$とに分けて，

$$P' = P + \phi$$

とおき，解約・失効に対する消滅時の責任準備金を$V_w$，予定利率を$i$とすると，死差益$G_1$は定義により，

$$G_1 = \boxed{(5)} ,$$

また，費差益$G_2$，解約益$G_3$は次のとおりである。

$$G_2 = \boxed{(6)} ,$$

$$G_3 = \boxed{(7)} 。$$

また，$G_1$における予定利息$I_1$は，

$$I_1 = \boxed{(8)} ,$$

$G_2$，$G_3$の中の予定利息部分は，それぞれ

$$I_2 = (\phi - E)\frac{i}{2},\quad I_3 = (V_w - W)\frac{i}{2}$$

であり，利差益$G_4$は次のとおりとなる。

$$G_4 = \boxed{(9)} + (\phi - E)\frac{i' - i}{2} + (V_w - W)\frac{i' - i}{2}$$

$$= \boxed{(10)} \times (i' - i)$$

B．死因$i$による死力$\mu_x^{(i)}$が，死因$i$以外の死因による死力$\mu_x^{(-i)}$のC倍であるとするとき，被保険者$(x)$が死因$i$によって死亡したときは$1+k$，それ以外の死因によって死亡したときは1なる保険金を即時に支払う$n$年定期保険の年払純保険料を求めよ。

# 昭和59年度（解答例）

1.

第一保険年度末の全期チルメル式責任準備金が0となることから，次式が成り立つ。

$$ {}_1V_{x:\overline{n}|} - \alpha \frac{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = 0 $$

$$ \therefore \quad \alpha = {}_1V_{x:\overline{n}|} \cdot \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}} $$

$$ = \left(1 - \frac{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\right) \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}} $$

$$ = \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}} $$

ここで，

$$ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|} = (1 + vp_x \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}) - \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|} $$

$$ = 1 + v(1-q_x)\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|} - \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|} $$

$$ = 1 - (1-v)\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|} - vq_x \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|} $$

$$ = 1 - d\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|} - vq_x \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|} $$

$$ = A_{x+1:\overline{n-1}|} - vq_x \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|} $$

と変形できる。

$$ \therefore \quad \alpha = \frac{A_{x+1:\overline{n-1}|}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}} - \frac{vq_x \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}} $$

$$ = P_{x+1:\overline{n-1}|} - vq_x $$

〔別解〕

全期チルメル式の初年度純保険料 $P_{(1)}$ は，次の式で表わされる。

$$P_{(1)} = P_{x:\overline{n}|} - \alpha + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \qquad \cdots\cdots(1)$$

また，予定利率を $i$ とし，全期チルメル式の第一保険年度末責任準備金を ${}_1V'_{x:\overline{n}|}$ で表わすと，次式が成り立つ。

$$P_{(1)}(1+i) = q_x + p_x \cdot {}_1V'_{x:\overline{n}|} \qquad \cdots\cdots(2)$$

題意によると，${}_1V'_{x:\overline{n}|} = 0$ となる $\alpha$ を求めるのであるから，これを(2)式に代入すると，

$$P_{(1)} = vq_x \qquad \cdots\cdots(3)$$

を得る。次に，(3)を(1)に代入すると，

$$vq_x = P_{x:\overline{n}|} - \alpha\left(1 - \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\right)$$

となる。

$$\therefore \quad \alpha = (P_{x:\overline{n}|} - vq_x) \cdot \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1}$$

$$= \frac{A_{x:\overline{n}|} - vq_x\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1}$$

$$= \frac{(vq_x + vp_x A_{x+1:\overline{n-1}|}) - vq_x\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1}$$

$$= \frac{vp_x A_{x+1:\overline{n-1}|} - vq_x(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1)}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1}$$

$$= \frac{vp_x A_{x+1:\overline{n-1}|}}{vp_x\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}} - vq_x$$

$$= P_{x+1:\overline{n-1}|} - vq_x$$

2.

この保険の年払保険料を$P$，第$t$保険年度末責任準備金を${}_tV$で表わす。まず，${}_rV$を過去法で求めると，

$$ {}_rV = P\frac{N_x-N_{x+r}}{D_{x+r}} - \frac{M_x-M_{x+r}}{D_{x+r}} $$

従って

$$ P = \left(\frac{M_x-M_{x+r}}{D_{x+r}} + {}_rV\right)\cdot\frac{D_{x+r}}{N_x-N_{x+r}} $$

$$ = P^{1}_{x:\overline{r}|} + {}_rV\cdot P_{x:\overline{r}|}^{\ \ 1} \qquad \cdots\cdots(1) $$

が得られる。

一方，$t \geqq r$ のとき次の再帰方程式が成り立つ。

$$ {}_tV+P = vq_{x+t}\cdot{}_{t+1}V + vp_{x+t}\cdot{}_{t+1}V $$

$$ = v\,{}_{t+1}V $$

よって，

$$ v\,{}_{r+1}V = {}_rV+P $$

$$ v^2\,{}_{r+2}V = v\,{}_{r+1}V+vP $$

$$ v^3\,{}_{r+3}V = v^2\,{}_{r+2}V+v^2P $$

$$ \vdots $$

$$ v^{n-r}\,{}_nV = v^{n-r-1}\,{}_{n-1}V+v^{n-r-1}P $$

の辺々を加え，${}_nV = S$ に注意すると，

$$ v^{n-r}S = {}_rV+P\ddot{a}_{\overline{n-r}|} $$

が得られる。この式に(1)式の$P$を代入すると，

$$ v^{n-r}S = {}_rV+(P^{1}_{x:\overline{r}|}+{}_rVP_{x:\overline{r}|}^{\ \ 1})\ddot{a}_{\overline{n-r}|} $$

$$\therefore \quad {}_rV\left(1+P_{x:\overset{1}{\overline{r|}}}\,\ddot{a}_{\overline{n-r|}}\right) = v^{n-r}S - P^{1}_{x:\overline{r|}}\,\ddot{a}_{\overline{n-r|}}$$

ここで，${}_rV \leqq 1$ であることから，次の不等式が成り立つ。

$$1+P^{1}_{x:\overline{r|}}\,\ddot{a}_{\overline{n-r|}} \geqq v^{n-r}S - P_{x:\overset{1}{\overline{r|}}}\,\ddot{a}_{\overline{n-r|}}$$

$$\therefore \quad 0 \leqq 1+P_{x:\overline{r|}}\,\ddot{a}_{\overline{n-r|}} - v^{n-r}S$$

$$= 1+\left(\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{r|}}}-d\right)\ddot{a}_{\overline{n-r|}} - v^{n-r}S \qquad \left(\because \quad P_{x:\overline{r|}} = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{r|}}}-d\right)$$

$$= 1-d\,\ddot{a}_{\overline{n-r|}} + \frac{\ddot{a}_{\overline{n-r|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{r|}}} - v^{n-r}S$$

$$= \frac{\ddot{a}_{\overline{n-r|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{r|}}} - v^{n-r}(S-1) \qquad (\because \quad 1-d\,\ddot{a}_{\overline{n-r|}} = v^{n-r})$$

$$\therefore \quad 0 \leqq (1+i)^{n-r}\,\ddot{a}_{\overline{n-r|}} - (S-1)\,\ddot{a}_{x:\overline{r|}}$$

$$= \ddot{s}_{\overline{n-r|}} - (S-1)\,\ddot{a}_{x:\overline{r|}}$$

$$\therefore \quad (S-1)\,\ddot{a}_{x:\overline{r|}} \leqq \ddot{s}_{\overline{n-r|}}$$

3.

求める年払純保険料を$P$で表わすと，収入の現価は，

$$P\,\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$$

で表わされ，支出の現価は，問題中の(2)に対する現価が，

$${}_{n|}\ddot{a}_x$$

また，(3)に対する現価が，

$$(\ddot{a}_y-1)-(\ddot{a}_{xy}-1)$$

$$= \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}$$

で表わされる。よって，収支相等の原則より$P$は次のとおりとなる。

$$P = \frac{\ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy} + {}_{n|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

次に，この保険の第$t$保険年度末責任準備金を ${}_tV$ で表わすと，${}_tV$ は次の式で表わされることが容易にわかる。

(ア) $t < n$ の場合

(i) 夫・妻共に生存のとき

$${}_tV = (\ddot{a}_{y+t} - \ddot{a}_{x+t:y+t}) + \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}}\ddot{a}_{x+n} - P\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

(ii) 夫生存，妻死亡のとき

$${}_tV = \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}}\ddot{a}_{x+n} - P\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

(iii) 夫死亡，妻生存のとき

$${}_tV = \ddot{a}_{y+t}$$

(イ) $t \geqq n$ の場合

(i) 夫・妻共に生存のとき

$${}_tV = (\ddot{a}_{y+t} - \ddot{a}_{x+t:y+t}) + \ddot{a}_{x+t}$$

(ii) 夫生存，妻死亡のとき

$${}_tV = \ddot{a}_{x+t}$$

(iii) 夫死亡，妻生存のとき

$${}_tV = \ddot{a}_{y+t}$$

4.

(1) $l_x\bar{a}_x = \int_0^\infty l_x v^t\, {}_tp_x\, dt = \int_0^\infty v^t\, l_{x+t}\, dt$

を用いることにより，次のように証明できる。

$$\frac{d}{dx}\left(l_x\bar{a}_x\right) = \int_0^\infty \frac{d}{dx}\left(v^t\, l_{x+t}\right)dt = \int_0^\infty v^t\frac{d\,l_{x+t}}{dx}\,dt$$

$$= \int_0^\infty v^t\frac{d\,l_{x+t}}{dt}\,dt$$

$$= -l_x \int_0^\infty v^t \frac{l_{x+t}}{l_x} \left( -\frac{1}{l_{x+t}} \ \frac{d\, l_{x+t}}{dt} \right) dt$$

$$= -l_x \overline{A}_x$$

(2) まず $y$ 歳（$y \geqq x$）の人の死亡給付現価を求めると，

$$\int_0^\infty v^t \, l_y \, {}_t p_y \, \mu_{y+t} \, dt = \int_0^\infty v^t \, l_y \frac{l_{y+t}}{l_y} \left( -\frac{1}{l_{y+t}} \right) \frac{d\, l_{y+t}}{dt} \, dt$$

$$= \int_0^\infty v^t \left( -\frac{d\, l_{y+t}}{dt} \right) dt$$

$$= \Big[ v^t \left( -l_{y+t} \right) \Big]_0^\infty + \int_0^\infty \log v \cdot v^t \, l_{y+t} \, dt$$

$$= l_y - \delta \int_0^\infty v^t \, l_{y+t} \, dt$$

$$= l_y \left( 1 - \delta \, \overline{a}_y \right)$$

$$= l_y \overline{A}_y$$

である。従って，$x$ 歳以上の人の総死亡給付現価を $A$ とすると，

$$A = \int_x^\infty l_y \overline{A}_y \, dy$$

であり，(1)で示した関係を用いると，

$$A = \int_x^\infty l_y \overline{A}_y \, dy$$

$$= \int_x^\infty \frac{d}{dy} \left( -l_y \overline{a}_y \right) dy$$

$$= \left[ -l_y \overline{a}_y \right]_x^{\infty}$$

$$= l_x \overline{a}_x$$

となる。一方，$x$歳以上の人口（＝基金の加入者数）は，

$$\int_0^{\infty} l_{x+t}\, dt$$

であるから，求める掛金額は以下のとおりとなる。

$$\frac{l_x \overline{a}_x}{\int_0^{\infty} l_{x+t}\, dt} = \frac{\overline{a}_x}{\int_0^{\infty} l_{x+t}\, dt \,/\, l_x}$$

$$= \frac{\overline{a}_x}{\mathring{e}_x}$$

5.A.

(1) $V_0$

(2) $V_1+G$

(3) $1+\frac{i'}{2}$

(4) $V_0(1+i')+P'\left(1+\frac{i'}{2}\right)-(S+W+E)\left(1+\frac{i'}{2}\right)-V_1$

(5) $V_0(1+i)+P\left(1+\frac{i}{2}\right)-(S+V_W)\left(1+\frac{i}{2}\right)-V_1$

(6) $(\phi-E)\left(1+\frac{i}{2}\right)$

(7). $(V_W-W)\left(1+\dfrac{i}{2}\right)$

(8) $V_0 i+\left\{P-(S+V_W)\right\}\dfrac{i}{2}$

(9) $\left[V_0+\dfrac{1}{2}\left\{P-(S+V_W)\right\}\right](i'-i)$

(10) $V_0+\dfrac{1}{2}\left\{P'-(S+W+E)\right\}$

なお，本題に関しては，守田常直著「保険数学」（改訂版）下巻の，第７章第２節「剰余金の分析」の§１および§２を参照のこと。

5.B.

題意の保険の給付現価を $\overset{a}{\bar{A}}{}^{\,1}_{x:\overline{n|}}$ とすると，

$$\overset{a}{\bar{A}}{}^{\,1}_{x:\overline{n|}}=\int_0^n v^t\,{}_tp_x\left\{\mu^{(i)}_{x+t}(1+k)+\mu^{(-i)}_{x+t}\right\}dt$$

$$=\int_0^n v^t\,{}_tp_x\left\{\mu_{x+t}+k\mu^{(i)}_{x+t}\right\}dt \qquad (\because\quad \mu_{x+t}=\mu^{(i)}_{x+t}+\mu^{(-i)}_{x+t})$$

$$=\bar{A}{}^{\,1}_{x:\overline{n|}}+k\int_0^n v^t\,{}_tp_x\,\mu^{(i)}_{x+t}\,dt$$

である。ところで，$\mu^{(i)}_{x+t}=C\mu^{(-i)}_{x+t}$ であることから，

$$\mu^{(i)}_{x+t}=\frac{C}{1+C}\mu_{x+t}$$

となる。

$$\therefore\quad \overset{a}{\bar{A}}{}^{\,1}_{x:\overline{n|}}=\left(1+\frac{kC}{1+C}\right)\bar{A}{}^{\,1}_{x:\overline{n|}}$$

従がって，求める年払純保険料は上記給付現価を $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ で割って，

$$\left(1+\frac{kC}{1+C}\right)\bar{P}^{\,1}_{x:\overline{n}|}$$

となる。