昭和58年度（問　題）

1. 8軒の家屋が図のように並んでいる。このとき，ある家屋の火事により，右回りに隣の家屋が類焼する確率が$1/3$，左回りに隣の家屋が類焼する確率が$1/4$であるとする。

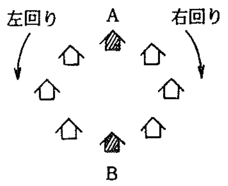
今，家屋Aから出火したものとして，

(1) 家屋Bが，左回りからの火を貰うことなく，右回りからの火によって類焼する確率を求めよ。

(2) 家屋Bが類焼する確率を求めよ。

〔注〕

ある家屋の火事が隣の家屋へ類焼するに要する時間はすべて同一であるとし，また家屋Aを除いては，隣家からの類焼によってのみ出火するものとする。



2. 線分AB上に無作為に点Pを取り，次にPB上に点Qを無作為に取ったとき，AP，PQ，QBが三角形を作り得る長さとなる確率を求めよ。

3. 2つの確率変数X，Yがそれぞれ2つの値だけをとり，かつ$\mathrm{Cov}(X, Y)=0$であれば，XとYとは独立であることを証明せよ。

4. 2つの銅貨を投げるという試みをn回独立に行なう。表と裏の出る確率はそれぞれ等しいとする。

(1) 両方の銅貨について表の出る回数が等しい確率u_nを求めよ。

(2) スターリングの公式（$n! \sim (2\pi)^{\frac{1}{2}} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$）を用いて，$u_n$の$n$が大きいときの値を調べよ。

5. (1)二項分布$\mathrm{Bin}(n, p)$にしたがう確率変数の母関数を求めよ。

(2)X，Nを確率変数とする。Xの$N=n$のもとでの条件付分布が二項分布$\mathrm{Bin}(n, p)$にしたがい，Nも二項分布$\mathrm{Bin}(m, r)$にしたがうものとする。このとき，Xの分布を求めよ。

昭和58年度（解答例）

1. (1) 火が左回りで移動してきて家屋 B に到達する確率を p_1，右回りの確率を p_2 とすれば，

$$p_1=\left(\frac{1}{4}\right)^4,\quad p_2=\left(\frac{1}{3}\right)^4$$

左回りからの火を貰うことなく，右回りからの火によって類焼する確率は，それぞれ事象が独立であることより，それぞれの確率の積に等しい。

よって求める確率は，

$$(1-p_1)\cdot p_2=\left(\frac{1}{3}\right)^4-\left(\frac{1}{12}\right)^4=85/6912$$

である。

(2) 家屋 B が類焼しない確率は，左回りから類焼しない確率と右回りから類焼しない確率の積であるから $(1-p_1)(1-p_2)$ となる。したがって，家屋 B が類焼する確率は，1からこれを引いたものであるから，

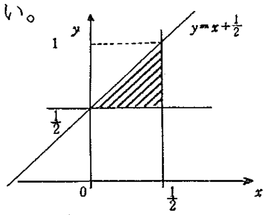
$$1-(1-p_1)(1-p_2)=p_1+p_2-p_1p_2=\left(\frac{1}{4}\right)^4+\left(\frac{1}{3}\right)^4-\left(\frac{1}{12}\right)^4=7/432$$

である。

2. A，P，Q，B をそれぞれ数直線上の座標で 0，x，y，1 $(0<x<y<1)$ とおき，AP，PQ，QB が三角形を作り得る長さとなるために，x，y が満足するべき必要十分条件を求めてみる。

$$\begin{cases}\overline{AP}+\overline{PQ}>\overline{QB}\\ \overline{PQ}+\overline{QB}>\overline{AP}\\ \overline{QB}+\overline{AP}>\overline{PQ}\end{cases}\underset{\text{(同値)}}{\Longleftrightarrow}\begin{cases}x+y-x>1-y\\ y-x+1-y>x\\ 1-y+x>y-x\end{cases}\underset{\text{(同値)}}{\Longleftrightarrow}\begin{cases}y>\dfrac{1}{2}\\ x<\dfrac{1}{2}\\ y<x+\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

ところで，P，Q はそれぞれ，一様分布 $U(0,1)$，$U(x,1)$ に従うと考えられるから，右図の斜線部分の範囲における確率をとってやればよい。



したがって，求める確率は，

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}}\frac{1}{1-x}\cdot 1\cdot dy\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x}{1-x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1-x}-1\right)dx=\Big[-\log(1-x)-x\Big]_0^{\frac{1}{2}}=\log 2-\frac{1}{2}\quad\text{（答）}$$

3. Xのとり得る値をx_1，x_2，Yのとり得る値をy_1，y_2とし，

$p(X=x_1,\ Y=y_1)=a$

$p(X=x_1,\ Y=y_2)=b$

$p(X=x_2,\ Y=y_1)=c$

$p(X=x_2,\ Y=y_2)=d$

$(a+b+c+d=1)$ とおく。

$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ から a,b,c,d のみたす条件を求めよう。

$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$ を用いて展開すれば，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= ax_1y_1+bx_1y_2+cx_2y_1+dx_2y_2 \\
&\qquad -\{(a+b)x_1+(c+d)x_2\}\{(a+c)y_1+(b+d)y_2\} \\
&= \{a-(a+b)(a+c)\}x_1y_1+\{b-(a+b)(b+d)\}x_1y_2 \\
&\qquad +\{c-(c+d)(a+c)\}x_2y_1+\{d-(c+d)(b+d)\}x_2y_2 \\
&= (a-a^2-ac-ab-bc)x_1y_1+(b-ab-ad-b^2-bd)x_1y_2 \\
&\qquad +(c-ca-c^2-da-cd)x_2y_1+(d-cb-cd-db-d^2)x_2y_2 \\
&= \{a(1-a-c-b)-bc\}x_1y_1+\{b(1-a-b-d)-ad\}x_1y_2 \\
&\qquad +\{c(1-a-c-d)-da\}x_2y_1+\{d(1-c-b-d)-cb\}x_2y_2 \\
&= (ad-bc)x_1y_1+(bc-ad)x_1y_2+(cb-ad)x_2y_1+(da-cb)x_2y_2 \\
&= (ad-bc)(x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+x_2y_2) \\
&= (ad-bc)(x_1-x_2)(y_1-y_2)=0
\end{aligned}$$

題意より，$x_1 \fallingdotseq x_2$，$y_1 \fallingdotseq y_2$ であるから，$ad-bc=0$ が得られた。

XとYとが独立であることを証明するには，

$$p(X=x_i)\cdot p(Y=y_j)=p(X=x_i,\ Y=y_j)\quad (i,\ j=1,\ 2)$$

を示せばよい。

$$\begin{aligned}
p(X=x_1)\cdot p(Y=y_1) &= (a+b)(a+c) \\
&= a^2+ac+ab+bc
\end{aligned}$$

$bc=ad$ に注意して，a で整理すれば，

$$\begin{aligned}
&= a(a+b+c+d) \\
&= a \\
&= p(X=x_1,\ Y=y_1)
\end{aligned}$$

以下，同様にして，X，Y の独立性が証明できる。($q.\ e.\ d.$)

4. (1) それぞれの銅貨の表の出る回数が k 回 ($k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n$) である確率をそれぞれ p_k，p'_k とすると，

$$p_k = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

同様に

$$p'_k = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\therefore\quad u_n = \sum_{k=0}^{n} p_k p'_k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

ここで $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ は n 個の白玉，n 個の赤玉より合計 n 個の玉を選ぶときの選び方の数であるから，$2n$ 個の玉より n 個の玉を選ぶときの選び方の数に等しい。

よって

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$$

$$\therefore\quad u_n = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\quad (答)$$

(2) $n! \sim (2\pi)^{\frac{1}{2}} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$ を利用すると，

$$u_n = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{2n!}{n!\,n!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$\sim \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}{\{(2\pi)^{\frac{1}{2}}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\}^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$= \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{2n+\frac{1}{2}}\cdot n^{2n+\frac{1}{2}}\cdot e^{-2n}}{2\pi\cdot n^{2n+1}\cdot e^{-2n}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\cdot n^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}\quad (答)$$

5. (1) Xを二項分布 Bin$(n,\ p)$にしたがう確率変数とし，$G_X(t)$でXの母関数を示す。

$$
\begin{aligned}
G_X(t) &= E(t^X) \\
&= \sum_{k=0}^{n} t^k \cdot \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (tp)^k (1-p)^{n-k} \\
&= (tp+1-p)^n
\end{aligned}
$$

これが求めるものである。

(2) (1)の結果を利用しよう。$X|_{N=n}$，Nの母関数をそれぞれ $G_X|_{N=n}(t)$，$G_N(t)$ で表わすことにすれば，

$$G_X|_{N=n}(t) = (tp+1-p)^n$$

$$G_N(t) = (tr+1-r)^m$$

この2つの母関数より，Xの母関数 $G_X(t)$ を求めてみよう。

まずXのとりうる値の範囲を考えよう。Nの最大値はmであるから，その時 $X|_{N=m}$は Bin$(m,\ p)$ にしたがい，Xは最大値mをとりうる。

それ以外の，$N=n<m$ のときは $X|_{N=n}$ は Bin$(n,\ p)$ にしたがうので，Xは結局，0からmまでの値をとることになる。

したがって $G_X(t) = \sum_{x=0}^{m} t^x \cdot p(X=x)$ と表わせる。

ここで $p(X=x) = \sum_{n=x}^{m} p(X=x|N=n) \cdot p(N=n)$ を代入すれば，

$$G_X(t) = \sum_{x=0}^{m} t^x \sum_{n=x}^{m} p(X=x|N=n) \cdot p(N=n)$$

和の順序をパラメーターに注意して交換すれば，

$$= \sum_{n=0}^{m} \left\{ \sum_{x=0}^{n} t^X p(X=x|N=n) \right\} \cdot p(N=n)$$

{ }の部分は $X|_{N=n}$ の確率母関数 $G_X|_{N=n}$ に他ならないから，

$$= \sum_{n=0}^{m} (tp+1-p)^n \cdot p(N=n)$$

これは，Nの確率母関数 $G_N(t)$ の t を $(tp+1-p)$ におきかえたものであり，

$$
\begin{aligned}
&= G_N(tp+1-p) \\
&= \{(tp+1-p)\cdot r+1-r\}^m \\
&= \{t(pr)+1-(pr)\}^m
\end{aligned}
$$

これは Bin$(m,\ pr)$ の確率母関数であるから，Xは二項分布 Bin$(m,\ pr)$ にしたがうことがわかる。