昭和53年度（問　題）

1. ある年齢群 (x) の国勢調査の人口を $\pi(x)_0$, n 年後の国勢調査の人口を $\pi(x)_n$ として，次の各々の場合の n 年間の平均人口を求めよ。

(1) n 年間，毎年一定数の人口が増加する場合

(2) n 年間，毎年一定率の人口が増加する場合

2. 死亡率 q_x 及び解約率 $(wr)_x$ が与えられたとき，死亡解約脱退残存表における死亡脱退確率 q_x' 及び解約脱退確率 $(wq)_x$ を求めよ。ただし，死亡，解約は一年を通じて一様に分布するものとする。

3. 次式を証明せよ。

(1) $\bar{A}_x \fallingdotseq \mu_x \bar{a}_x + \dfrac{1}{2}(\bar{a}_{x-1} - \bar{a}_{x+1})$

(2) $\bar{a}_x \fallingdotseq \dfrac{1}{2\mu_x}\left(\dfrac{q_{x-1}}{p_{x-1}}\bar{a}_{x-1} + q_x \bar{a}_{x+1}\right)$

4. x 歳加入 n 年満期で，被保険者が死亡したとき，その保険年度末から満期まで，毎年1の確定年金を支払う保険がある。

(1) 全期払込年払平準純保険料は，次の式で表わせることを証明せよ。

$$\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\left(\frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{iv} - \frac{v^n - A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}}{i}\right)$$

(2) 責任準備金の再帰方程式を用いて，t 年経過時の将来法による保険料払込中の純保険料式責任準備金を求めよ。

5. 予定新契約費を保険金の α，予定維持費を保険金の γ，予定集金費を営業保険料の β とする全期払込 n 年満期養老保険（保険金期末払）の責任準備金を k 年チルメル式（チルメル割合 α）で積み立てる。

この場合の各保険年度の新契約費を記せ。ただし，保険年度末責任準備金が負値となる年度の新契約費は，保険年度末責任準備金を0とし，その分新契約費を減ずるものとする。

昭和53年度（解答例）

1. 国勢調査の人口を π_0 とし，t 年後の人口を π_t とする。n 年後の人口は π_n とする。

(1) 毎年一定数の人口が増加するから，

$$\pi_t = \pi_0 + \frac{t}{n}(\pi_n - \pi_0)$$

従って，n 年間の平均人口は，次のとおりである。

$$\frac{1}{n}\int_0^n \pi_t\,dt = \frac{1}{n}\int_0^n \left\{ \pi_0 + \frac{t}{n}(\pi_n - \pi_0) \right\} dt$$

$$= \frac{1}{n}\left\{ \int_0^n \pi_0\,dt + \frac{\pi_n - \pi_0}{n}\int_0^n t\,dt \right\}$$

$$= \frac{1}{n}\left\{ \pi_0 \cdot n + \frac{n^2}{2n}(\pi_n - \pi_0) \right\}$$

$$= \pi_0 + \frac{1}{2}(\pi_n - \pi_0)$$

$$= \frac{1}{2}(\pi_0 + \pi_n)$$

(2) 毎年一定率の人口が増加するから，

$\pi_t = \gamma^{\frac{t}{n}} \cdot \pi_0$　　ここに，γ は n 年間の増加率で $\gamma = \dfrac{\pi_n}{\pi_0}$ である。

従って，n 年間の平均人口は，次のとおりである。

$$\cdot\ \frac{1}{n}\int_0^n \pi_t\, dt = \frac{1}{n}\int_0^n \gamma^{\frac{t}{n}}\cdot \pi_0\, dt = \frac{\pi_0}{n}\left[\frac{n\gamma^{\frac{t}{n}}}{\log\gamma}\right]_0^n$$

$$= \frac{\pi_0}{n}\cdot\frac{n}{\log\gamma}\cdot(\gamma-1) = \frac{\gamma-1}{\log\gamma}\cdot\pi_0$$

2. 死亡解約脱退残存表の残存数，解約脱退数，死亡脱退数をそれぞれ，l'_x，w'_x，d_x' で表わすと，

$$q_x = \frac{d'_x}{l'_x - \frac{1}{2}w'_x} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$(wr)_x = \frac{w'_x}{l'_x - \frac{1}{2}d'_x} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

である。

(1)より $\quad d'_x = (l'_x - \frac{1}{2}w'_x)\, q_x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(2)より $\quad w'_x = (l'_x - \frac{1}{2}d'_x)\,(wr)_x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(4)式を(3)式に代入して，

$$d'_x = l'_x\, q_x - \frac{1}{2}\left(l'_x - \frac{1}{2}d'_x\right)(wr)_x\, q_x$$

$$= l'_x\, q_x - \frac{1}{2}l'_x\, q_x\,(wr)_x + \frac{1}{4}d'_x\, q_x\,(wr)_x$$

従って,

$$d'_x = \frac{l'_x\, q_x \left\{ 1 - \frac{1}{2}(wr)_x \right\}}{1 - \frac{1}{4} q_x (wr)_x}$$

同様に(3)式を(4)式に代入して w'_x を求めると,

$$w'_x = l'_x (wr)_x - \frac{1}{2}\left(l'_x - \frac{1}{2} w'_x \right) q_x (wr)_x$$

$$= \frac{l'_x (wr)_x \left(1 - \frac{1}{2} q_x \right)}{1 - \frac{1}{4} q_x (wr)_x}$$

$$\therefore \quad q'_x = \frac{d'_x}{l'_x} = \frac{q_x \left\{ 1 - \frac{1}{2}(wr)_x \right\}}{1 - \frac{1}{4} q_x (wr)_x}$$

$$(wq)_x = \frac{w'_x}{l'_x} = \frac{(wr)_x \left(1 - \frac{1}{2} q_x \right)}{1 - \frac{1}{4} q_x (wr)_x}$$

3. (1)

$$\frac{d\bar{a}_x}{dx} = \frac{d}{dx} \int_0^\infty v^t\, {}_t p_x\, dt \qquad \left(\because\ \bar{a}_x = \int_0^\infty v^t\, {}_t p_x\, dt \right)$$

$$= \int_0^\infty v^t \left(\frac{d}{dx}\, {}_t p_x \right) dt$$

$$= \int_0^\infty v^t \, {}_tp_x \, (\mu_x - \mu_{x+t}) \, dt \qquad \left\{ \because \ \frac{d \, {}_tp_x}{d_x} = {}_tp_x \, (\mu_x - \mu_{x+t}) \right\}$$

$$= \mu_x \bar{a}_x - \bar{A}_x$$

$$\left(\because \ \bar{a}_x = \int_0^\infty v^t \, {}_tp_x \, dt \,, . \quad \bar{A}_x = \int_0^\infty v^t \, {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt \right)$$

$$\therefore \quad \bar{A}_x = \mu_x \bar{a}_x - \frac{d \, \bar{a}_x}{dx}$$

$$\fallingdotseq \mu_x \bar{a}_x + \frac{1}{2} (\bar{a}_{x-1} - \bar{a}_{x+1})$$

$$\left\{ \because \ \frac{d \, \bar{a}_x}{dx} \fallingdotseq \frac{1}{2} (\bar{a}_{x+1} - \bar{a}_{x-1}) \right\}$$

(2) $\bar{A}_x = \int_0^\infty v^t \, {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt$

$$= \frac{1}{l_x} \int_0^\infty v^t \, l_{x+t} \, \mu_{x+t} \, dt$$

$$\fallingdotseq \frac{1}{l_x} \int_0^\infty v^t \, l_{x+t} \cdot \frac{l_{x+t-1} - l_{x+t+1}}{2 l_{x+t}} \, dt \qquad \left(\because \ \mu_{x+t} \fallingdotseq \frac{1}{2} \cdot \frac{l_{x+t-1} - l_{x+t+1}}{l_{x+t}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty v^t \cdot \frac{l_{x+t-1}}{l_x} \, dt - \frac{1}{2} \int_0^\infty v^t \cdot \frac{l_{x+t+1}}{l_x} \, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{l_{x-1}}{l_x}\int_0^\infty v^t \frac{l_{x-1+t}}{l_{x-1}}\,dt - \frac{l_{x+1}}{l_x}\int_0^\infty v^t \frac{l_{x+1+t}}{l_{x+1}}\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{a}_{x-1}}{p_{x-1}} - p_x\overline{a}_{x+1}\right) \qquad \left(\because\ \overline{a}_x = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_x\,dt = \int_0^\infty v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}\,dt\right)$$

(1)から,

$$\overline{A}_x \fallingdotseq \mu_x\overline{a}_x + \frac{1}{2}(\overline{a}_{x-1} - \overline{a}_{x+1})$$

従って,

$$\mu_x\overline{a}_x + \frac{1}{2}(\overline{a}_{x-1} - \overline{a}_{x+1}) \fallingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{a}_{x-1}}{p_{x-1}} - p_x\overline{a}_{x+1}\right)$$

$$\mu_x\overline{a}_x \fallingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{a}_{x-1}}{p_{x-1}} - \overline{a}_{x-1} + \overline{a}_{x+1} - p_x\overline{a}_{x+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{p_{x-1}} - 1\right)\overline{a}_{x-1} + (1-p_x)\overline{a}_{x+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{q_{x-1}}{p_{x-1}}\overline{a}_{x-1} + q_x\overline{a}_{x+1}\right)$$

$$\therefore\quad \overline{a}_x \fallingdotseq \frac{1}{2\mu_x}\left(\frac{q_{x-1}}{p_{x-1}}\overline{a}_{x-1} + q_x\overline{a}_{x+1}\right)$$

4. (1) 求める保険料を P，給付現価を A とする。

$$A = \frac{1}{D_x}\sum_{t=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{n-t|}}\, C_{x+t}$$

$$= \frac{1}{D_x}\sum_{t=0}^{n-1} \frac{1-v^{n-t}}{iv} C_{x+t} \qquad \left(\because\ \ddot{a}_{\overline{n-t|}} = \frac{1-v^{n-t}}{1-v} = \frac{1-v^{n-t}}{iv} \right)$$

$$= \frac{1}{D_x}\sum_{t=0}^{n-1} \frac{C_{x+t}}{iv} - \frac{1}{D_x}\sum_{t=0}^{n-1} \frac{v^{n-t}}{iv} C_{x+t}$$

$$= \frac{1}{iv}\cdot\frac{1}{D_x}\sum_{t=0}^{n-1} C_{x+t} - \frac{1}{i}\,\frac{1}{D_x}\sum_{t=0}^{n-1} v^{n-t-1}(v\,D_{x+t} - D_{x+t+1})$$

$$\left\{ \because\ C_{x+t} = v^{x+t+1}\, d_{x+t} = v^{x+t+1}(l_{x+t} - l_{x+t+1}) = v\cdot D_{x+t} - D_{x+t+1} \right\}$$

$$= \frac{1}{iv}\,\frac{1}{D_x}\,(M_x - M_{x+n}) - \frac{1}{i}\,\frac{1}{D_x}\,(v^n D_x - D_{x+n})$$

$$\left\{ \because\ \sum_{t=0}^{n-1} C_{x+t} = M_x - M_{x+n},\quad \sum_{t=0}^{n-1} (v^{n-t} D_{x+t} - v^{n-t-1} D_{x+t+1}) = v^n D_x - D_{x+n} \right\}$$

$$= \frac{1}{iv}\, A^{1}_{x:\overline{n|}} - \frac{1}{i}\,(v^n - A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}})$$

$$\left(\because\ A^{1}_{x:\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x},\qquad A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = \frac{D_{x+n}}{D_x} \right)$$

従って，

$$P = \frac{A}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\left(\frac{A^{1}_{x:\overline{n}|}}{iv} - \frac{v^n - A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}}{i}\right)$$

(2) 保険料 P を払込中の，責任準備金の再帰方程式は，

$$v\,p_{x+\tau}\cdot{}_{\tau+1}V_x = {}_{\tau}V_x + P - v\,q_{x+\tau}\cdot\ddot{a}_{\overline{n-\tau}|}$$

この両辺に $v^{x+\tau}l_{x+\tau}$ を乗ずると，

$$v^{x+\tau+1}l_{x+\tau+1}\cdot{}_{\tau+1}V_x = v^{x+\tau}l_{x+\tau}({}_{\tau}V_x+P) - v^{x+\tau+1}d_{x+\tau}\cdot\ddot{a}_{\overline{n-\tau}|}$$

$$D_{x+\tau+1}\cdot{}_{\tau+1}V_x = D_{x+\tau}\cdot{}_{\tau}V_x + D_{x+\tau}P - C_{x+\tau}\cdot\ddot{a}_{\overline{n-\tau}|}$$

この両辺を $\tau = t$ から $n-1$ まで加えると，

$$\sum_{\tau=t}^{n-1}(D_{x+\tau+1}\cdot{}_{\tau+1}V_x - D_{x+\tau}\cdot{}_{\tau}V_x) = \sum_{\tau=t}^{n-1}D_{x+\tau}P - \sum_{\tau=t}^{n-1}C_{x+\tau}\cdot\ddot{a}_{\overline{n-\tau}|} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(a)}$$

$$\text{(a) の左辺} = D_{x+n}\cdot{}_{n}V_x - D_{x+t}\cdot{}_{t}V_x$$

$$= -D_{x+t}\cdot{}_{t}V_x \qquad (\because\ {}_{n}V_x = 0)$$

また，(1)と同様にして，

$$\frac{1}{D_{x+t}}\sum_{\tau=t}^{n-1}C_{x+\tau}\cdot\ddot{a}_{\overline{n-\tau}|} = \frac{1}{D_{x+t}}\sum_{\tau=t}^{n-1}\frac{1-v^{n-\tau}}{iv}C_{x+\tau}$$

$$= \frac{1}{D_{x+t}}\left\{\frac{\sum_{\tau=t}^{n-1}C_{x+\tau}}{iv} - \frac{\sum_{\tau=t}^{n-1}v^{n-\tau-1}(v\,D_{x+\tau} - D_{x+\tau+1})}{i}\right\}$$

$$= \frac{1}{iv}\ \frac{M_{x+t}-M_{x+n}}{D_{x+t}} - \frac{1}{i}\ \frac{v^{n-t}D_{x+t}-D_{x+n}}{D_{x+t}}$$

$$= \frac{1}{iv} A_{x+t\,:\,\overline{n-t|}}^{1} - \frac{1}{i}\left(v^{n-t} - A_{x+t\,:\,\overline{n-t|}}^{\ \ \ \ \ 1}\right)$$

従って，(a)式は，

$$-D_{x+t}\cdot {}_tV_x = P(N_{x+t}-N_{x+n}) - D_{x+t}\left(\frac{A_{x+t\,:\,\overline{n-t|}}^{1}}{iv} - \frac{v^{n-t}-A_{x+t\,:\,\overline{n-t|}}^{\ \ \ \ \ 1}}{i}\right)$$

$$\therefore\quad {}_tV_x = \frac{A_{x+t\,:\,\overline{n-t|}}^{1}}{iv} - \frac{v^{n-t}-A_{x+t\,:\,\overline{n-t|}}^{\ \ \ \ \ 1}}{i} - P\,\ddot{a}_{x+t\,:\,\overline{n-t|}}$$

5. この保険の営業保険料を $P'_{x:\overline{n|}}$， 純保険料を $P_{x:\overline{n|}}$ とすると，

$$P'_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{1-\beta}\left(P_{x:\overline{n|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} + \gamma\right)$$

であり，チルメル歩合 α とすると初年度の純保険料 $P^{(1)}_{x:\overline{n|}}$ は，

$$P^{(1)}_{x:\overline{n|}} = P_{x:\overline{n|}} - \left(\alpha - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{k|}}}\right)$$

$$= (1-\beta)P'_{x:\overline{n|}} - \gamma - \left(\alpha + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{k|}}}\right)$$

となる。この $P^{(1)}_{x:\overline{n|}}$ と初年度の死亡保険金の現価 $v\cdot q_x$ との大小により初年度責任準備金の正負となる。題意より保険年度末責任準備金が負値の時はこれを０とするので $P^{(1)}_{x:\overline{n|}}$ と $v\cdot q_x$ の大小により分けて考える。

(1) $P^{(1)}_{x:\overline{n}|} \geqq v \cdot q_x$　（即ち，保険年度末責任準備金 $\geqq 0$ ）のとき，

初年度新契約費　：　$\alpha + \dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - \dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$

次年度～ k 年度新契約費　：　$\dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - \dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$

$k+1$ 年度以降新契約費　：　$\dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$

(2) $P^{(1)}_{x:\overline{n}|} < v \cdot q_x$　（即ち，保険年度末責任準備金 < 0 となり，これを0とする）

のとき，

初年度新契約費　：　$(1-\beta)P'_{x:\overline{n}|} - \gamma - v \cdot q_x$

$\left(P_{x:\overline{n}|} + \dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - v \cdot q_x \right.$ でもよい。$\left.\right)$

次年度～ l 年度新契約費　：　$(1-\beta)P'_{x:\overline{n}|} - \gamma - v \cdot q_{x+l-1}$

$l+1$ 年度新契約費　：　$(1-\beta)P'_{x:\overline{n}|} - \gamma - v \cdot q_{x+l} - v \cdot {}_{l+1}V'_{x:\overline{n}|}$

$l+2$ 年度～ k 年度新契約費　：　$\dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - \dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$

$k+1$ 年度以降新契約費　：　$\dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$

ただし，ここにlは，チルメル歩合αのとき${}_{l}V'_{x:\overline{n}|}<0$で${}_{l+1}V'_{x:\overline{n}|}\geqq 0$となる$l$であり，${}_{l}V'_{x:\overline{n}|}$は$l$年度末の$h$年チルメル式責任準備金である。