昭和51年度（問　題）

午前の部

1.　次の数値を小数以下第3位まで求めよ。（第4位を四捨五入）

(1)　$a_x = 9.800$，$A_x = 0.200$ のとき，利率 i の値を求めよ。

(2)　$N_x = 10{,}000$，$N_{x+1} = 8{,}000$，$i = 0.05$ のとき，A_xの値を求めよ。

(3)　$A_x = 0.200$，$A_{x+t} = 0.300$ のとき，${}_tV_x$の値を求めよ。

(4)　${}_tV_x = 0.150$，$A_{x+t} = 0.300$，$i = 0.05$ のとき，P_xの値を求めよ。

2.　死亡解約脱退残存表で，中央死亡率m_xおよび中央解約率$(w_m)_x$を既知として，（x）の契約が1年間存続する確率P_xを求めよ。

3.　次式を証明し，この等式のもつ意味を言葉で説明せよ。

$$\frac{d}{d_x}(l_x\bar{a}_x) = -l_x\bar{A}_x.$$

午後の部

4.　次の$\boxed{}$を充たせ。

(1)　$\mu_x \fallingdotseq \boxed{①} \times \dfrac{d_{x-1}+d_x}{l_x} - \boxed{②} \times \dfrac{d_{x-2}+d_{x+1}}{l_x}$

(2)　${}_tV_{x:\overline{n}|} = \dfrac{P_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{x:\overline{n}|}}{\boxed{③}}$

(3)　${}_tV^{(m)}_{x:\overline{n}|} \fallingdotseq {}_tV_{x:\overline{n}|} + \dfrac{m-1}{2m} \times \boxed{④} \times \boxed{⑤}$

(4)　$\dfrac{d\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}}{dx} = \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} \times \boxed{⑥} - \mu_x + \boxed{⑦}$

5.　25年満期養老保険の年払純保険料を，最初の5年は普通終身保険と同一の純保険料とし，以後20年間は純保険料を増額して，最初の5年間の不足額を補填するように定めようとする。後の20年間に払い込むべき純保険料を定めよ。

また，将来法および過去法によって，10年経過時の責任準備金の式を求め，これが同一となることを証明せよ。

昭和51年度（解答例）

午前の部

1. (1) $A_x(1+i)+ia_x=1$ より $i=(1-A_x)/(a_x+A_x)$

$$=(1-0.200)/(9.800+0.200)$$
$$=0.800/10.000$$
$$=0.080$$

(2) $$A_x=1-d\ddot{a}_x=1-\frac{i}{1+i}\frac{N_x}{N_x-N_{x+1}}=1-\frac{0.05}{1.05}\times\frac{10,000}{10,000-8,000}$$
$$=1-0.238$$
$$=0.762$$

(3) $${}_tV_x=\frac{A_{x+t}-A_x}{1-A_x}=\frac{0.300-0.200}{1-0.200}$$
$$=\frac{0.100}{0.800}$$
$$=0.125$$

(4) ${}_tV_x=A_{x+t}-P_x\ \ddot{a}_{x+t}=A_{x+t}-\frac{1+i}{i}P_x(1-A_{x+t})$ より

$$P_x=\frac{i}{1+i}\ \frac{A_{x+t}-{}_tV_x}{1-A_{x+t}}=\frac{0.05}{1.05}\times\frac{0.300-0.150}{1-0.300}$$
$$=\frac{0.05}{1.05}\times\frac{0.150}{0.700}$$
$$=0.010$$

2. l'_x を x 歳における残存数

d'_n を l'_x 中 x 歳から $x+1$ 歳までの解約前死亡数（死亡脱退数）

w'_x を l'_x 中 x 歳から $x+1$ 歳までの解約数（解約脱退数）

とする。

$$m_x=\frac{d'_x}{l'_x-\frac{1}{2}(w'_x+d'_x)}$$

$$(w_m)_x=\frac{w'_x}{l'_x-\frac{1}{2}(w'_x+d'_x)}$$

$$p_x=\frac{l'_{x+1}}{l'_x} \qquad l'_{x+1}=l'_x-(d'_x+w'_x)$$

であるから

$$d'_x+w'_x=\left\{m_x l'_x-\tfrac{1}{2}(d'_x+w'_x)m_x\right\}+\left\{(w_m)_x l'_x-\tfrac{1}{2}(d'_x+w'_x)(w_m)_x\right\}$$

$$\therefore d'_x+w'_x=l'_x\frac{m_x+(w_m)_x}{1+\frac{1}{2}(m_x+(w_m)_x)}$$

$$l'_{x+1}=l'_x-l'_x\frac{m_x+(w_m)_x}{1+\frac{1}{2}(m_x+(w_m)_x)}$$

$$=l'_x\frac{1-\dfrac{m_x+(w_m)_x}{2}}{1+\dfrac{m_x+(w_m)_x}{2}}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}_x=\frac{1-\dfrac{m_x+(w_m)_x}{2}}{1+\dfrac{m_x+(w_m)_x}{2}}$$

3. (i)式の証明

$$\frac{d}{dx}(l_x\overline{a}_x)=\frac{d}{dx}\left(l_x\int_0^\infty v^t\,{}_tp_x\,dt\right)$$

$$=\frac{d}{dx}\int_0^\infty v^t\,l_{x+t}\,dt$$

$$=\int_0^\infty v^t\,\frac{d}{dx}\,l_{x+t}\,dt$$

$$=-l_x\int_0^\infty v^t\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt$$

$$=-l_x\overline{\mathrm{A}}_x$$

(ii)言葉による説明

$\dfrac{d}{dx}l_x\overline{a}_x=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{l_{x+k}\overline{a}_{x+k}-l_x\overline{a}_x}{k}$ なることから，生命年金現価において年令を微小区間変化させたときの変化率は，その時点における終身保険の現価相当分だけ減少することを示している。

午後の部

4　(1) $\frac{7}{12}$　(2) $\frac{1}{12}$　(3) $P_{x+t:\overline{n-t|}}+d$

(4) $P^{(m)}_{x:\overline{n|}}$　(5) ${}_tV^{1}_{x:\overline{n|}}$　((4)と(5)は逆でも可)

(6) $\mu_x+\delta$　(7) $\frac{D_{x+n}}{D_x}\mu_{x+n}$

5.(i)求める保険料をP'とすると

$$A_{x:\overline{25|}}=P_x\ddot{a}_{x:\overline{5|}}+P'(\ddot{a}_{x:\overline{25|}}-\ddot{a}_{x:\overline{5|}})$$

$$\therefore P'=\frac{A_{x:\overline{25|}}-P_x\ddot{a}_{x:\overline{5|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{25|}}-\ddot{a}_{x:\overline{5|}}}=\frac{M_x-M_{x+25}+D_{x+25}-P_x(N_x-N_{x+5})}{N_{x+5}-N_{x+25}}$$

$$=\frac{P_x N_{x+5}-M_{x+25}+D_{x+25}}{N_{x+5}-N_{x+25}}$$

(ii)将来法による責任準備金　$A_{x+10:\overline{15|}}-P'\ddot{a}_{x+10:\overline{15|}}$

過去法による責任準備金　$\frac{1}{D_{x+10}}\Big\{P_x(N_x-N_{x+5})+P'(N_{x+5}-N_{x+10})-(M_x-M_{x+10})\Big\}$

(iii)将来法と過去法が等しいことの証明

(i)より　$P'(N_{x+5}-N_{x+25})=M_x-M_{x+25}+D_{x+25}-P_x(N_x-N_{x+5})$

i.e.　$P'\frac{N_{x+5}-N_{x+25}}{D_{x+10}}-\frac{M_x-M_{x+25}+D_{x+25}}{D_{x+10}}+P_x\frac{N_x-N_{x+5}}{D_{x+10}}=0$

将来法 $=A_{x+10:\overline{15|}}-P'\ddot{a}_{x+10:\overline{15|}}$

$$=A_{x+10:\overline{15|}}-P'\ddot{a}_{x+10:\overline{15|}}+P'\frac{N_{x+5}-N_{x+25}}{D_{x+10}}-\frac{M_x-M_{x+25}+D_{x+25}}{D_{x+10}}+P_x\frac{N_x-N_{x+5}}{D_{x+10}}$$

$$=\frac{1}{D_{x+10}}\Big\{(M_{x+10}-M_{x+25}+D_{x+25})-P'(N_{x+10}-N_{x+25})+P'(N_{x+5}-N_{x+25})-(M_x-M_{x+25}+D_{x+25})+P_x(N_x-N_{x+5})\Big\}$$

$$= \frac{1}{D_{x+10}} \left\{ P_x (N_x - N_{x+5}) + P' (N_{x+5} - N_{x+10}) - (M_x - M_{x+10}) \right\}$$

＝　過去法