数　学　I　（問題）

午前の部

1. ２つの正しいサイコロを独立に投げて，出た目の数を各々X，Yとする。このとき，

　(1) XおよびYの分布および平均値，分散を求めなさい。

　(2) Z＝X＋Yの分布および平均値，分散を求めなさい。

2. 確立変数X，Yが独立で各々パラメーターλのポワソン分布をするとき，Z＝X＋Yの分布を求めなさい。

3. n個の独立な事象E_1，E_2……，E_nにおいて，事象E_1の確率をp_1，E_2の確率をp_2，…，E_nの確率をp_nとする。

$$p=\frac{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n}{n},\quad q=1-p,$$ とおく。

　このn個の事象E_1，E_2，……，E_nの内実現する事象の数をXとおくと，Xの分散はnpqより大きくないことを示しなさい。

午後の部

4. 確率変数が，平均値０，分散１の正規分布に従うとき，X^2の分布の確率密度函数を求めなさい。　（Xの確率密度函数は $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}$ ）

5. XとYは互いに独立で，ともに標準正規分布N（０，１）に従う確立変数とする。

$$U=X\ \cos\alpha-Y\ \sin\alpha$$

$$V=X\ \sin\alpha+Y\ \cos\alpha$$

　とおく。このときUとVが互いに独立であり，ともにN（０，１）に従うことを積率母函数または特性函数を用いて示しなさい。ただしN（０，１）の積率母数は$e^{\frac{\theta^2}{2}}$特性函数は　$e^{-\frac{\theta^2}{2}}$。

数　学　I　（解答）

1. (1) X，Yの分布，平均，分数は

$$P(X=i)=\frac{1}{6}$$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{6} P(X=i)\cdot i=\sum_{i=1}^{6}\frac{i}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$$

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{6} P(X=i)\cdot i^2=\sum_{i=1}^{6}\frac{i}{6}=\frac{91}{6}$$

$$V(X)=\frac{91}{6}-\left(\frac{21}{6}\right)=\frac{546-441}{36}=\frac{105}{36}=\frac{35}{12}$$

Y＝についても同様

(2) Z＝X＋Yの分布は

$$P(Z=2)=P(X=1,\ Y=1)=\frac{1}{36}$$

$$P(Z=3)=P(X=1,\ Y=2)+P(X=2,\ Y=1)=\frac{2}{36}$$

………………………………

$$P(Z=7)=P(X=1,\ Y=6)+\cdots\cdots+P(X=6,\ Y=1)=\frac{6}{36}$$

………………………………

$$P(Z=12)=P(X=6,\ Y=6)=\frac{1}{36}$$

Zの平均値は$E(Z)=E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=7$

Zの分散はX，Yの独立性から

$$V(Z)=V(X+Y)=V(X)+V(Y)=\frac{35}{12}+\frac{35}{12}=\frac{35}{6}$$

2. X，Yの分布は各々

$$P_i=P(X=i)=e-\lambda\frac{\lambda i}{i\,!}$$

$$P_j = P(Y=j) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}$$

Zの分布は

$$P(Z=n) = \sum_{i=0}^{n} P(X=i,\ Y=n-i) = \sum_{i=0}^{n} P(X=i)\cdot P(Y=n-i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^i}{i!}\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n-i}}{(n-i)!}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} e^{-2\lambda}\frac{\lambda^n}{i!(n-i)!} = e^{-2\lambda}\cdot\lambda^n\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!(n-i)!}$$

$$= e^{-2\lambda}\cdot\lambda^n\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n!}\frac{n!}{i!(n-i)!}$$

$$= e^{-2\lambda}\cdot\lambda^n\cdot\frac{1}{n!}(1+1)^n = e^{-2\lambda}\cdot\frac{(2\lambda)^n}{n!}$$

すなわちZはパラメーター2λのポワソン分布をする。

3. 事象E_i（$i=1, 2, \cdots, n$）が実現すれば$X_i=1$，実現しなければ$X_i=0$として，確率変数X_iを実義する。このとき$X_1, X_2, \cdots, X_n$は互いに独立である。

$V(X_i) = E(X_i^2) - \{E(X_i)\}^2 = P_i(1-P_i)$で

$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$が事象$E_i$（$i=1, 2, \cdots, n$）の実現する個数を表わす。

$$\therefore\ V(X) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots\cdots + V(X_n)$$

$$= P_1(1-P_1) + P_2(1-P_2)\cdots + P_n(1-P_n)$$

$$= P_1 + P_2 + \cdots + P_n - (P_1^2 + P_2^2 + \cdots + P_n^2)$$

$$\leq P_1 + P_2 + \cdots + P_n - \frac{1}{n}(P_1 + P_2 + \cdots + P_n)^2$$

$$= nP - \frac{1}{n}(nP)^2 = nP - nP^2 = nPq$$

4. Xの確率密度函数は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$Y=X^2$ とおけばYの確率密度函数 $g(y)$ は次のようにして求められる。

Xの分布函数を $F(x)$，Yの分布函数を $G(y)$ とおくと，

$$G(y)=G(x^2)=P(X^2\leq x^2)=P(|X|\leq |x|)$$

$$=P(-|x|\leq X\leq |x|)$$

$$=F(|x|)-F(-|x|)$$

$y\geq 0$ のとき，$x=y^{\frac{1}{2}}$ で

$$g(y)=\frac{d}{dy}G(y)=\frac{dx}{dy}\cdot\frac{d}{dx}G(y)=\frac{d}{dy}y^{\frac{1}{2}}\cdot\left\{f(y^{\frac{1}{2}})+f(-y^{\frac{1}{2}})\right\}$$

$$=\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{y}{2}}$$

5. $\cos\alpha=a$，$\sin\alpha=b$ とおくと

$U=aX-bY$，$V=bX-aY$，$a^2+b^2=1$ である。

X，Yの積率母函数（以下 $m.g.f.$ と書く）を $\phi_0(\theta)$ とおくと，$\phi_0(\theta)$ とおくと，

$$\phi_0(e)=e^{\frac{\theta^2}{2}}$$

まずU，Vが共にN（0，1）に従うことを示す。Uの $m.g.f.$ を $\phi_1(\theta)$ とすると，

$$\phi_1(\theta)=E(e^{\theta U})=E(e^{(aX-bY)\theta})$$

$$=E(e^{a\theta X})E(e^{-b\theta Y})$$

（XとYは独立だから $e^{a\theta X}$ と $e^{-b\theta Y}$ も独立）

$$=e^{\frac{1}{2}(a^2+b^2)\theta}\qquad=e^{\frac{1}{2}\theta^2}$$

同様にVの $m.g.f.$ は $\phi_2(\theta)=e^{\frac{1}{2}\theta^2}$ だから，U，VはともにN（0，1）に従う。

次にU，Vが互いに独立であることを示す。

（X，Y）の $m\ g\ f$ を $\phi(\theta_1,\theta_2)$ とすると，

$$\phi(\theta_1,\theta_2)=\phi_0(\theta_1)\phi_0(\theta_2)=e^{\frac{1}{2}(\theta_1^2+\theta_2^2)}$$

$(\mathrm{U},\ \mathrm{V})$の$m.g.f.$を$g(\theta_1,\ \theta_2)$とすると，

$$g(\theta_1,\ \theta_2)=\mathrm{E}\left(e^{\theta_1\mathrm{U}+\theta_2\mathrm{V}}\right)=\mathrm{E}\left(e^{\theta_1(a\mathrm{X}-b\mathrm{Y})+\theta_2(b\mathrm{X}-a\mathrm{Y})}\right)$$

$$=\mathrm{E}\left(e^{(a\theta_1+b\theta_2)\mathrm{X}+(-b\theta_1+a\theta_2)\mathrm{Y}}\right)$$

$$=\phi(a\theta_1+b\theta_2,\ -b\theta_1+a\theta_2)$$

$$=e^{\left\{\frac{1}{2}(a\theta_1+b\theta_2)^2+\frac{1}{2}(-b\theta_1+a\theta_2)^2\right\}}$$

$$=e^{\frac{\theta_1^2+\theta_2^2}{2}}=\phi_1(\theta_1)\phi_2(\theta_2)$$

すなわち$(\mathrm{U},\ \mathrm{V})$の$m.g.f.$がUとVの各々の$m.g.f.$の積になるから，UとVは独立。