昭和49年度　(問題)

午前の部

1. $A_{x:\overline{1}|}^{\ 1} + A_{x+1:\overline{1}|}^{\ \ 1} = \dfrac{2(M_x - M_{x+2})}{N_x - N_{x+2}}$ のとき，q_x と q_{x+1} の関係を求めよ。

ここに $q_x > 0$ とする。

2. 死力は絶えず増加するものと仮定するとき，次の不等式を証明せよ。

(ア) $q_x < m_x < \dfrac{q_x}{p_x}$

(イ) $q_{x-1} < \mu_x < \dfrac{q_x}{p_x}$

3. n 年満期養老保険と m 年満期養老保険の t 年経過後の平準純保険料式責任準備金の差額は，それぞれの平準純保険料の生命年金終価の差額に等しいことを証明せよ。

午後の部

4. 次の(ア)〜(オ)のそれぞれの関数（または文章）を表わすのに最も適当と思われるものを(1)〜(5)の中から選べ。

(ア) $P_{x:\overline{n}|}^{(m)}$

(1) $\dfrac{P_{x:\overline{n}|}}{1-\dfrac{m-1}{2m}(P_{x:\overline{n}|}+d)}$　　(2) $\dfrac{P_{x:\overline{n}|}}{1-\dfrac{m+1}{2m}(P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}+d)}$

(3) $\dfrac{P_{x:\overline{n}|}}{1-\dfrac{m+1}{2m}(P_{x:\overline{n}|}^{1}+d)}$　　(4) $\dfrac{P_{x:\overline{n}|}}{1-\dfrac{m-1}{2m}(P_{x:\overline{n}|}^{1}+d)}$

(5) $\dfrac{P_{x:\overline{n}|}}{1-\dfrac{m+1}{2m}(P_{x:\overline{n}|}+d)}$

〔問〕

(イ) $P_x^{\{m\}}$

(1) $\dfrac{P_x}{1-\frac{m-1}{2m}P_x}$ (2) $\dfrac{P_x}{1-\frac{m+1}{2m}(P_x+d)}$ (3) $\dfrac{P_x}{1-\frac{m-1}{2m}d-\frac{1}{2}P_x}$

(4) $\dfrac{P_x}{1-\frac{m+1}{2m}d-\frac{1}{2}P_x}$ (5) $\dfrac{P_x}{1-\frac{d}{2m}-\frac{1}{2}P_x}$

(ウ) $(I^{(m)}A)_x$

(1) $(IA)_{x:\overline{m}|}+\frac{1}{2}A_x$ (2) $(IA)_x-\dfrac{m+1}{2}A_x$ (3) $(I\bar{A})_x-\frac{1}{2}A_{x:\overline{m}|}$

(4) $(IA)_x+\dfrac{m-1}{2m}A_x$ (5) $(IA)_x-\dfrac{m-1}{2m}A_x$

(エ) 4人の連合生命 (w), (x), (y), および (z) で, (x)が第3番目に死亡する場合に,保険金が支払われる現価。

(1) $\bar{A}_{w\overset{3}{x}yz}$ (2) $\bar{A}_{\overline{w\underset{3}{x}yz}}$ (3) $\bar{A}_{\overset{3}{x}:\overline{wyz}}$

(4) $\bar{A}_{\overline{\underset{3}{x}:\overline{wyz}}}$ (5) $\bar{A}_{x:\overset{2\ 1}{\overline{wyz}}}$

(オ) (y)の死亡の瞬間に, (z) はそれ以前に死亡しておりかつ (w) および (x) が共存している場合, (w) が終身連続年金を受ける権利を生ずる年金の現価

(1) $\bar{a}_{wx\overset{2}{y}\underset{1}{z}}$ (2) $\bar{a}_{\overline{wx}:\overset{2}{y}\underset{1}{z}}$ (3) $\bar{a}_{x\overset{2}{y}\underset{1}{z}|w}$

(4) $\bar{a}_{x:\overline{\underset{2}{y}\underset{1}{z}}|w}$ (5) $\bar{a}_{\overset{2}{y}\underset{1}{z}|\overline{xw}}$

5. 次式を証明せよ。

(1) $\mu_x=\dfrac{1}{\mathring{e}_x}+\dfrac{1}{\mathring{e}_x}\dfrac{d\mathring{e}_x}{dx}$. (2) $(\bar{I}\bar{A})_x=\bar{a}_x-\delta(\bar{I}\bar{a})_x$

6. p_x が x とともに増加しないとき,

$$e_x \leqq \frac{p_x}{q_x}$$ を示せ。

昭和 49 年度　（解答）

午前の部

1. $A^{\ 1}_{x:\overline{1}|} + A^{\ \ 1}_{x+1:\overline{1}|} - \dfrac{2(M_x - M_{x+2})}{N_x - N_{x+2}} = 0$

$$\frac{C_x}{D_x} + \frac{C_{x+1}}{D_{x+1}} - \frac{2(C_x + C_{x+1})}{D_x + D_{x+1}} = 0$$

$$C_x \cdot D_{x+1}(D_x + D_{x+1}) + C_{x+1} \cdot D_x(D_x + D_{x+1}) - 2(C_x + C_{x+1}) \cdot D_x \cdot D_{x+1} = 0$$

$$C_x \cdot D^2_{x+1} + C_{x+1} \cdot D^2_x - C_x \cdot D_x \cdot D_{x+1} - C_{x+1} \cdot D_x \cdot D_{x+1} = 0$$

$$C_x \cdot D_{x+1}(D_{x+1} - D_x) + C_{x+1} \cdot D_x(D_x - D_{x+1}) = 0$$

$$(D_x - D_{x+1})(C_{x+1} \cdot D_x - C_x \cdot D_{x+1}) = 0$$

$$D_x - D_{x+1} = v^x(\ell_x - v\ell_{x+1}) = v^x\ell_x(1 - vp_x) > 0 \quad (v^x \cdot \ell_x > 0,\ 1 - vp_x > 0)$$

$$\therefore\ C_{x+1} \cdot D_x - C_x \cdot D_{x+1} = 0$$

$$d_{x+1} \cdot \ell_x - d_x \cdot \ell_{x+1} = 0$$

$$q_x = q_{x+1}$$

2.

ア) $m_x = \dfrac{d_x}{L_x} = \dfrac{\ell_x - \ell_{x+1}}{\int_0^1 \ell_{x+t}\,dt}$

$0 < t < 1$ なる t に対し　題意より

$\ell_x > \ell_{x+t} > \ell_{x+1}$ がいえる

$$\therefore \int_0^1 \ell_x\,dt > \int_0^1 \ell_{x+t}\,dt > \int_0^1 \ell_{x+1}\,dt$$

$$\therefore\ \ell_x > \int_0^1 \ell_{x+t}\,dt > \ell_{x+1}$$

$$\therefore \frac{\ell_x - \ell_{x+1}}{\ell_x} < \frac{\ell_x - \ell_{x+1}}{\int_0^1 \ell_{x+t}\,dt} < \frac{\ell_x - \ell_{x+1}}{\ell_{x+1}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$(\ell_x - \ell_{x+1} > 0,\ \ell_x,\ \ell_{x+1} \neq 0)$$

(1)より

$$1 - p_x < m_x < \frac{1 - p_x}{p_x}$$

$$q_x < m_x < \frac{q_x}{p_x}$$

(イ) $\mu_{x+t} = -\frac{1}{\ell_{x+t}} \frac{d\ell_{x+t}}{dt}$

$$\therefore \int_0^1 \mu_{x+t} \cdot \ell_{x+t}\, dt = \Big[-\ell_{x+t}\Big]_0^1 = dx$$

$$\therefore \quad q_x = \frac{\int_0^1 \mu_{x+t} \cdot \ell_{x+t}\, dt}{\ell_x}$$

$0 < t < 1$ なる t に対し題意より

$$\mu_x < \mu_{x+t} < \mu_{x+1}$$

また, $\ell_{x+1} < \ell_{x+t} < \ell_x$

$$\therefore \int_0^1 \mu_x \cdot \ell_{x+1}\, dt < \int_0^1 \mu_{x+t} \cdot \ell_{x+t}\, dt < \int_0^1 \mu_{x+1} \cdot \ell_x\, dt$$

$$\frac{\mu_x \cdot \ell_{x+1}}{\ell_x} < \frac{1}{\ell_x} \int_0^1 \mu_{x+t} \cdot \ell_{x+t}\, dt < \frac{\mu_{x+1} \cdot \ell_x}{\ell_x} \quad (\ell_x \neq 0)$$

$$\mu_x \cdot p_x < q_x < \mu_{x+1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

(1)より

$$\mu_x < \frac{q_x}{p_x} \quad (p_x > 0)$$

$$q_{x-1} < \mu_x$$

$$\therefore \quad q_{x-1} < \mu_x < \frac{q_x}{p_x}$$

3. n 年満期養老保険と m 年満期養老保険の t 年経過後の平準純保険料式責任準備金の差額を過去法によって求めると

$${}_tV_{x:\overline{n}|} - {}_tV_{x:\overline{m}|}$$

$$= \left(P_{x:\overline{n}|}\, \ddot{S}_{x:\overline{t}|} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}}\right) - \left(P_{x:\overline{m}|} \cdot \ddot{S}_{x:\overline{t}|} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}}\right)$$

$$= P_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{S}_{x:\overline{t}|} - P_{x:\overline{m}|}\, \ddot{S}_{x:\overline{t}|}$$

それぞれの平準純保険料の生命年金終価の差額に等しい。

午後の部

4.

(4), (3), (5), (1), (3)

5. (1)

$$\mathring{e}_x=\int_0^{\infty}{}_tp_x\,dt \quad \text{であるから}$$

$$\frac{d\mathring{e}_x}{dx}=\frac{d}{dx}\int_0^{\infty}{}_tp_x\,dt=\int_0^{\infty}\frac{d}{dx}({}_tp_x)\,dt$$

$$=\int_0^{\infty}{}_tp_x(\mu_x-\mu_{x+t})\,dt$$

$$=\mu_x\int_0^{\infty}{}_tp_x\,dt-\int_0^{\infty}{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt$$

$$=\mu_x\mathring{e}_x-1$$

$$\therefore\quad \mu_x=\frac{1}{\mathring{e}_x}+\frac{1}{\mathring{e}_x}\frac{d\mathring{e}_x}{dx}$$

(2)

$$\bar{a}_x=\int_0^{\infty}v^t\,{}_tp_x\,dt$$

$$=\frac{1}{D_x}\left\{\left[tD_{x+t}\right]_0^{\infty}-\int_0^{\infty}t\frac{dD_{x+t}}{dt}\,dt\right\}$$

$$=\frac{1}{D_x}\left\{\left[tD_{x+t}\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}tD_{x+t}(\mu_{x+t}+\delta)\,dt\right\}$$

$$=\frac{1}{D_x}\left\{\int_0^{\infty}tD_{x+t}\cdot\mu_{x+t}\,dt+\delta\int_0^{\infty}tD_{x+t}\,dt\right\}$$

$$=(\bar{I}\bar{A})_x+\delta(\bar{I}\bar{a})_x$$

6.

$$e_x=\frac{1}{\ell_x}\sum_{t=1}^{\omega}\ell_{x+t}=p_x+p_xp_{x+1}+p_x\cdot p_{x+1}p_{x+2}+\cdots\cdots$$

仮定よりp_xはxとともに増加しないから

$$e_x\geqq p_{x+1}+p_{x+1}\cdot p_{x+2}+\cdots\cdots=e_{x+1}$$

$$e_x\geqq e_{x+1}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

一方　$e_x = p_x(1 + p_{x+1} + p_{x+1} \cdot p_{x+2} + \cdots\cdots)$

$= p_x + p_x \cdot e_{x+1}$ ……………………………………(2)

(1)，(2) より　$e_x \leqq p_x + p_x \circ e_x$

$$\therefore \quad e_x \leqq \frac{p_x}{1-p_x} = \frac{p_x}{q_x} \quad (p_x,\ q_x > 0)$$