昭和47年度 (問題)

午前の部

1. あるバス停を通ってA，B二つの会社のバスが同方向に運行している。A社のバスは平均間隔10分の指数分布に従い，B社のバスは平均間隔15分の指数分布に従ってたがいに独立にこの停留所を通るものとする。

(a) ある人がこの停留所にきてから5分以内にバスに乗れる確率を求めよ。

(b) また，平均待ち時間を求めよ。

(注：平均値 λ の指数分布の密度関数は $f(x)=\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}$ である。)

2. 5年前の全数調査によれば，ある地方の20歳の男子の平均身長は165.0 cmであった。

(a) 最近同じ地方の20歳男子からランダムに10人を抽出して，その身長を調べたところ，平均166.5 cm，分散5.0 cm^2 であった。5年前とくらべこの地方の20歳の男子の平均身長に変化があったといえるか。有意水準5%で検定せよ。(ただし，$\sqrt{5}=2.236$)

(b) 前号(a)で抽出した人数を100人，平均身長165.5 cm，分散5.0 cm^2 とした場合はどうか。

(注) 計算上必要があれば次の表を利用せよ。

x	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$F(x)$	.90	.95	.975	.99	.995	.999	.9995	.99995	.999995

ここに，$F(x)=P(X<x)$

X：正規分布N(0，1)にしたがう確率変数

〔問〕

t の 数 値 表

n \ F(t)	.75	.90	.95	.975	.99	.995	.9995
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.941
4	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073

$F(t) = P(X_n < t)$

X_n ：自由度nのt分布にしたがう確率変数

3.

(1) $\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ の値は，x^2ー分布の分布関数の表から，簡単に求められることを

$$\frac{1}{\Gamma(k+1)}\int t^k e^{-t}\,dt = \frac{-1}{\Gamma(k+1)} t^k e^{-t} + \frac{1}{\Gamma(k)}\int t^{k-1} e^{-t}\,dt$$

なる関係を利用して示せ。

（注）　自由度nのx^2ー分布の確率密度関数 $g_n(x)$ は，次式で表わされる。

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

〔問〕

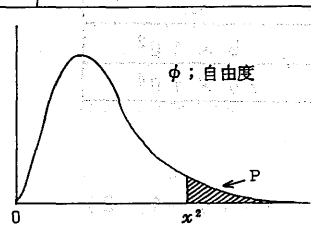
(2) (1)の結果にもとづき，下の表を用いて

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \geqq 0.9$$

を満足する最小のnを求めよ。ただし，$\lambda = 6.22$とする。

x^2 - 分 布

ϕ \ P	.995	.99	.975	.95	.90	.75	.50	.25	.10	.05	.025	.01	.005	P / ϕ
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.20	3.45	5.35	7.84	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	6
7	0.989	1.239	1.690	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.02	14.07	16.01	18.48	20.3	7
8	1.344	1.646	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.22	13.36	15.51	17.53	20.1	22.0	8
9	1.735	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.39	14.68	16.92	19.02	21.7	23.6	9
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.55	15.99	18.31	20.5	23.2	25.2	10
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.34	13.70	17.28	19.68	21.9	24.7	26.8	11
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.34	14.85	18.55	21.0	23.3	26.2	28.3	12
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.34	15.98	19.81	22.4	24.7	27.7	29.8	13
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.17	13.34	17.12	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	14
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.04	14.34	18.25	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	15
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.91	15.34	19.37	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	16
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	12.79	16.34	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	17
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	13.68	17.34	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	18
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	14.56	18.34	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	19
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	15.45	19.34	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	20
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	16.34	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	21
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	17.24	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	22
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	23
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	24
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	25



午後の部

4. ある地区の年間新契約高yは，その地区を受け持つ外務員数x_1と，その地区の見込客の平均所得額x_2とによってきまると考え，6地区のデーターを集めたところ，下の表の結果がえられた。これをもとに線型重回帰モデル

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

〔問〕

を定めよ（すなわち，最小自乗法によって，係数β_0，β_1，β_2を求めよ。）。ただし，この際下の補助表の数値を利用せよ。

（注意）　最終的な数値を出すための乗除算は実行せず，式を示すだけでよい。すなわち，たとえば

$$\frac{53 \times 72^2}{1.65 \times 10^3} + 65.5^2$$

のような式のままでとどめてよい。

地区j	年間新契約高y_j	外務員数　x_{1j}	平均所得額　x_{2j}
1	69	84	800
2	70	78	1,000
3	72	83	1,000
4	67	78	800
5	68	77	1,000
6	77	86	1,100
平　均	$70.5=\overline{y}$	$81=\overline{x_1}$	$950=\overline{x_2}$

補助表s_{ij}の数値

i \ j	0	1	2
0	65.5	—	—
1	53	72	5×10^2
2	1.65×10^3	5×10^2	7.5×10^4

$$s_{ij} = \sum_{\nu=1}^{6} (x_{i\nu} - \overline{x_i})(x_{j\nu} - \overline{x_j}) \qquad (i, j = 1, 2)$$

$$s_{i0} = \sum_{\nu=1}^{6} (x_{i\nu} - \overline{x_i})(y_\nu - \overline{y}) \qquad (i = 1, 2)$$

$$s_{00} = \sum_{\nu=1}^{6} (y_\nu - \overline{y})^2$$

5.　微少時間Δt時間の間に1人の客が来る確率を$\lambda\Delta t + o(\Delta t)$とするとき，$t$時間の間に$k$人の客が来る確率$P_k(t)$を求めよ。ただし，各々の客は独立に来るものとする。

昭和47年度　（解答）

午前の部

1.

(a)　X，Yを，その人が停留所に来てから，それぞれA，B社のバスが来るまでの時間とすると，この人の待ち時間は

$$\min(X, Y)$$

となる。

$$P(\min(X, Y) > t) = P(X>t, Y>t) = (*)$$

X，Yは独立だから

$$(*) = P(X>t)P(Y>t) = \int_t^{\infty} \frac{e^{-\frac{x}{10}}}{10}dx \int_t^{\infty} \frac{e^{-\frac{x}{15}}}{15}dx$$

$$= e^{-\frac{t}{10}} e^{-\frac{t}{15}} = e^{-\frac{t}{6}}$$

$$\therefore P(\min(X, Y) \leqq 5) = 1 - P(\min(X, Y) > 5)$$

$$= 1 - e^{-\frac{5}{6}} \text{ ……………… 答}$$

(b)　この人の待ち時間の分布関数は

$$P(\min(X, Y) \leqq t) = 1 - e^{-\frac{t}{6}}$$

したがって，その密度関数は

$$\frac{1}{6}e^{-\frac{t}{6}}$$

したがって，その平均は

$$\int_0^{\infty} t \cdot \frac{1}{6} e^{-\frac{t}{6}} dt = 6\int_0^{\infty} ue^{-u} du$$

$$= 6\left[-ue^{-u}\right]_0^{\infty} - 6\int_0^{\infty} -e^{-u} du = 6\left[-e^{-u}\right]_0^{\infty} = 6 \qquad \text{答　6分}$$

2.

(a) ランダム抽出i人目の身長をX_iとすると，X_1，…，X_nは独立で，ある正規分布N(μ, σ^2)に従うと考えてよい。

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

とおくと，$\overline{X}$，Qはたがいに独立で$\sqrt{n}\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma}$はN(0，1)，$\dfrac{Q}{\sigma^2}$は自由度$n-1$の$\chi^2$分布に従う。したがって，

$$t = \frac{\sqrt{n}\,(\overline{X}-\mu)}{\sigma} \div \left\{\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{Q}{n-1}}\right\} = \frac{\sqrt{n-1}\ (\overline{X}-\mu)}{\sqrt{\frac{Q}{n}}} = \frac{\sqrt{n-1}\ (\overline{X}-\mu)}{\sqrt{S}}$$

$\left(S = \dfrac{Q}{n}\right.$ とおいた$\left.\right)$

は自由度$n-1$ のt分布に従う。

問題の１０人抽出の場合

$\overline{X} = 166.5$，　$S = 5$

が与えられ，帰無仮説

$H_0 : \mu = 165.0$

を検定する。

$$t = \frac{(166.5 - 165.0) \times \sqrt{9}}{\sqrt{5}} = \frac{1.5 \times 3 \times \sqrt{5}}{5} = 0.3 \times 3 \times 2.236$$

$$= 2.012$$

表から

$P(t < 2.262) = 0.975$

$\therefore P(t > 2.262) = 0.025$

$\therefore P(|t| > 2.262) = 0.05$

$|t| = 2.012 < 2.262$

であるから，仮設は棄却できない。したがって，平均身長に変化があったとはいえない。

(b) nが大きい場合は，$\sigma^2 = S$ とみなしてよく，したがって，

$$Y = \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{S}}$$

は N (0 , 1) に従うとみなしてよい。

帰無仮設 Ho : $\mu = 165.0$ を検定する。

$$Y = \sqrt{100} \times \frac{165.5-165.0}{\sqrt{5}} = \frac{10 \times 0.5 \times \sqrt{5}}{5} = \sqrt{5} = 2.236$$

表から

$P\,(\,Y < 1.960\,) = 0.975$

$\therefore P\,(\,Y \geqq 1.960\,) = 0.025$

$\therefore P\,(\,|Y| \geqq 1.960\,) = 0.05$

$|\,2.236\,| > 1.96$ であるから，仮設は棄却される。したがって，変化があったといえる。

3. (1)

$$A_k(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(k)}\int_\lambda^\infty t^{k-1}e^{-t}\,dt \qquad (\,k \geqq 1\,)$$

$$a_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda} \qquad (\,k \geqq 0\,)$$

とおくと，$k \geqq 1$ の場合

$$a_k(\lambda) = A_{k+1}(\lambda) - A_k(\lambda) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

が成り立つ。

また，$A_0(\lambda) = 0$ と定義すれば，(*) の式は，$k = 0$ でも成り立つ。

$(\because\ e^{-\lambda} = \int_\lambda^\infty e^{-t}\,dt\ )$

$$\therefore \sum_{k=0}^{n} a_k(\lambda) = \mathrm{A}_{n+1}(\lambda) - \mathrm{A}_0(\lambda) = \mathrm{A}_{n+1}(\lambda)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_{\lambda}^{\infty} t^n e^{-t} dt$$

一方, $\displaystyle\int_x^{\infty} g_{2n+2}(u)\,du = \frac{1}{2\Gamma(n+1)} \int_x^{\infty} \left(\frac{u}{2}\right)^n e^{-\frac{u}{2}} du = (\#)$

$\frac{u}{2} = t$ とおくと,

$$(\#) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_{\frac{x}{2}}^{\infty} t^n e^{-t} dt$$

$$\therefore \ \mathrm{A}_{n+1}(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_{\lambda}^{\infty} t^n e^{-t} dt = \int_{2\lambda}^{\infty} g_{2n+2}(u)\,du$$

(2) $\lambda = 6.22$ のとき

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \int_{12.44}^{\infty} g_{2n+2}(u)\,du$$

表から $\displaystyle\int_{12.44}^{\infty} g_{20}(u)\,du = 0.90$ だから, 求める $n = 9$

午後の部

4.

$\displaystyle\sum_{i=1}^{6} (\beta_0 + \sum_{j=1}^{2} x_{ij}\beta_j - y_i)^2$ (問題に用いてある記号 x_{ij} を, 以下 x_{ji} とかきなおす。)

を最小にする β_0, β_1, β_2 を求めればよい。このため, この式を β_0, β_1, β_2 で偏微分したものを 0 とおいたもの, すなわち, 正規方程式を解けばよい。正規方程式は

$$
\begin{cases}
n\beta_0 + \sum_{j=1}^{2}\left(\sum_{i=1}^{6} x_{ij}\right)\beta_j = \sum_{i=1}^{6} y_i & \cdots\cdots(1) \\
\left(\sum_{i=1}^{6} x_{i1}\right)\beta_0 + \sum_{j=1}^{2}\left(\sum_{i=1}^{6} x_{i1}\, x_{ij}\right)\beta_j = \sum_{i=1}^{6} x_{i1}\, y_i & \cdots\cdots(2) \\
\left(\sum_i x_{i2}\right)\beta_0 + \sum_j \left(\sum_i x_{i2}\, x_{ij}\right)\beta_j = \sum_i x_{i2} y_i & \cdots\cdots(3)
\end{cases}
$$

(1)を整理して，

$$\beta_0 + \sum_{j=1}^{2} \overline{x}_{\cdot j}\,\beta_j = \overline{y}_{\cdot} \quad \left(\overline{x}_{\cdot j} = \sum_i x_{ij} \div 6,\ \ \overline{y}_{\cdot} = \sum_i y_i \div 6\right) \cdots\cdots(4)$$

これを使って，(2)，(3)から β_0 を消去すると，

$$\sum_{j=1}^{2}\left\{\sum_{i=1}^{6} x_{ik}(x_{ij} - \overline{x}_{\cdot j})\right\}\beta_j = \sum_i x_{ik}(\overline{y_i} - \overline{y}_{\cdot}) \qquad (k = 1,\ 2) \cdots\cdots(5)$$

$$\sum_{i=1}^{6}(x_{ij} - \overline{x}_{\cdot j}) = 0,\ \ \sum_i (y_i - \overline{y}_{\cdot}) = 0 \quad \text{を考慮して}$$

$$\sum_i x_{ik}(x_{ij} - \overline{x}_{\cdot j}) = \sum_i (x_{ik} - \overline{x}_{\cdot j})(x_{ij} - \overline{x}_{\cdot j})$$

$$\sum_i x_{ik}(y_i - \overline{y}_{\cdot}) = \sum_i (x_{ik} - \overline{x}_{\cdot k})(y_i - \overline{y}_{\cdot}) \qquad \text{（注2参照）}$$

がえられるから，(5)は次のように変形される。

$$\sum_{j=1}^{2}\left\{\sum_i (x_{ik} - \overline{x}_{\cdot k})(x_{ij} - \overline{x}_{\cdot j})\right\}\beta_j = \sum_i (x_{ik} - \overline{x}_{\cdot k})(y_i - \overline{y}_{\cdot})$$
$$(k = 1,\ 2)$$

これはさらに

$$\sum_{j=1}^{2} s_{kj}\beta_j = s_{k0} \qquad (k = 1,\ 2)$$

となり，結局

$$
\begin{cases}
72\beta_1 + 5 \times 10^2 \beta_2 = 53 \\
5 \times 10^2 \beta_1 + 7.5 \times 10^4 \beta_2 = 1.65 \times 10^3
\end{cases}
$$

をとくことになる。

$$\therefore\ \beta_1 = \begin{vmatrix} 53 & 5\times10^2 \\ 1.65\times10^3 & 7.5\times10^4 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 72 & 5\times10^2 \\ 5\times10^2 & 7.5\times10^4 \end{vmatrix}$$

$$= (53\times7.5\times10^4 - 1.65\times5\times10^5)\div(72\times7.5\times10^4 - 25\times10^4)$$

$$\beta_2 = (72\times1.65\times10^3 - 5\times53\times10^2)\div(72\times7.5\times10^4 - 25\times10^4)$$

上の β_1，β_2 を使って，(4)から

$$\beta_0 = 70.5 \div (81\times\beta_1 + 950\times\beta_2)$$

〔別解１〕 $\sum_i(\beta_0 + \sum_j x_{ij}\beta_j - y_i)$

$$= \sum_i \left[\left\{\sum_j(x_{ij} - \overline{x}_{\cdot j})\,\beta_j - (y_i - \overline{y}_\cdot)\right\} + (\beta_0 + \sum_j \overline{x}_{\cdot j}\beta_j - \overline{y}_\cdot)\right]^2 = (\#)$$

この式の〔　〕内の第１項は，i について加え合わせると，０になる

$$\left(\sum_i\sum_j(x_{ij} - \overline{x}_{\cdot j})\,\beta_j - \sum_i(y_i - \overline{y}_\cdot) = \sum_j 0\,\beta_j - 0 = 0\right)$$

ことを考慮して

$$(\#) = \sum_i\left\{\sum_{j=1}^{2}(x_{ij} - \overline{x}_{\cdot j})\,\beta_j - (y_i - \overline{y}_\cdot)\right\}^2 + 6(\beta_0 + \sum \overline{x}_{\cdot j}\beta_j - \overline{y}_\cdot)^2 \quad \cdots\cdots(1)$$

この式を最小にする β_0，β_1，β_2 を求めればよいわけだが，この式の第１項は，β_0 を含んでいないことを考えて，まず第１項を最小にする β_1，β_2 を求め，次に，第２項を０にするよう β_0 を求めればよい。

第１項を最小にする β_1，β_2 を求めるのに，これから正規方程式を作ると，

$$\begin{cases} s_{11}\beta_1 + s_{12}\beta_2 = s_{10} \\ s_{21}\beta_1 + s_{22}\beta_2 = s_{20} \end{cases}$$

がえられ，あとは，前の解のようにしてとける。

〔別解２〕

$$\mathrm{X}=\begin{pmatrix}1 & x_{11} & x_{12}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & x_{61} & x_{62}\end{pmatrix},\quad \overset{\vee}{1}=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix},\quad \mathrm{Y}=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ \vdots & \vdots\\ x_{61} & x_{62}\end{pmatrix},$$

$$\overset{\vee}{\beta}=\begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix},\quad \overset{\vee}{\gamma}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix},\quad \overset{\vee}{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_6\end{pmatrix}$$

とおく。また記号 $^{\vee}$ は縦ベクトル，$^{\triangleright}$ は横ベクトルを表わすものとする。

問題は，$\left|\mathrm{X}\overset{\vee}{\beta}-\overset{\vee}{y}\right|^2$ （$|\ |$ はベクトルの長さを表わすものとする。）

を最小にする $\overset{\vee}{\beta}$ を求めることに帰着する。

ここで，必要となる補助定理を証明しておく（行列Yは６×２次元としたが，実は一般に $m\times n$ でもよい。）。

1. $\dfrac{1}{6}\overset{\vee}{1}\overset{\triangleright}{1}\mathrm{Y}=\begin{pmatrix}\bar{x}_{\cdot 1} & \bar{x}_{\cdot 2}\\ \bar{x}_{\cdot 1} & \bar{x}_{\cdot 2}\\ \vdots & \vdots\\ \bar{x}_{\cdot 1} & \bar{x}_{\cdot 2}\end{pmatrix}$ が成り立つ。

（証明） $\dfrac{1}{6}\overset{\triangleright}{1}\mathrm{Y}=\dfrac{1}{6}(1,\ \cdots\cdots,\ 1)\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ \vdots & \vdots\\ x_{61} & x_{62}\end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{6}(x_{11}+\cdots+x_{61}\ ,\ x_{12}+\cdots+x_{62})\ =(\ \bar{x}_{\cdot 1},\ \bar{x}_{\cdot 2})$$

$$\therefore\ \frac{1}{6}\overset{\vee}{1}\overset{\triangleright}{1}\mathrm{Y}=\overset{\vee}{1}(\bar{x}_{\cdot 1},\ \bar{x}_{\cdot 2})=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}(\bar{x}_{\cdot 1},\ \bar{x}_{\cdot 2})=\begin{pmatrix}\bar{x}_{\cdot 1} & \bar{x}_{\cdot 2}\\ \vdots & \vdots\\ \bar{x}_{\cdot 1} & \bar{x}_{\cdot 2}\end{pmatrix}$$

2. $\overset{\triangleright}{1}\,(\mathrm{I}-\frac{1}{6}\overset{\vee}{1}\overset{\triangleright}{1})=0$，　ここにIは単位行列（6次元の）。

〔証明〕

$$\overset{\triangleright}{1}\,(\mathrm{I}-\frac{1}{6}\overset{\vee}{1}\overset{\triangleright}{1})=\overset{\triangleright}{1}-\frac{1}{6}\overset{\triangleright}{1}\overset{\vee}{1}\overset{\triangleright}{1}=\overset{\triangleright}{1}-\frac{1}{6}(\overset{\triangleright}{1}\overset{\vee}{1})\overset{\triangleright}{1}=(\#)$$

ここで，$\overset{\triangleright}{1}\overset{\vee}{1}=(1\cdots\cdots1)\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=1+\cdots\cdots+1=6$ を考えて

$$(\#)=\overset{\triangleright}{1}-\overset{\triangleright}{1}=0$$

3. 6次元ベクトル $\overset{\vee}{a}$，$\overset{\vee}{b}$ があり，$\overset{\vee}{a}\perp\overset{\vee}{b}$ なら

$|\overset{\vee}{a}+\overset{\vee}{b}|^2=|\overset{\vee}{a}|^2+|\overset{\vee}{b}|^2$　（本当は一般に n 次元ベクトルでもよい）

〔証明〕

$$|\overset{\vee}{a}+\overset{\vee}{b}|^2=(\overset{\triangleright}{a}+\overset{\triangleright}{b})(\overset{\vee}{a}+\overset{\vee}{b})=\overset{\triangleright}{a}\overset{\vee}{a}+\overset{\triangleright}{b}\overset{\vee}{b}+\overset{\triangleright}{a}\overset{\vee}{b}+\overset{\triangleright}{b}\overset{\vee}{a}$$

$$=\overset{\triangleright}{a}\overset{\vee}{a}+\overset{\triangleright}{b}\overset{\vee}{b}=|a|^2+|b|^2$$

本題に帰って，（補助定理1を参照）

$$|\mathrm{X}\overset{\vee}{\beta}-\overset{\vee}{y}|^2=\left|(\overset{\vee}{1},\ \mathrm{Y})\begin{pmatrix}\beta_0\\ \overset{\vee}{r}\end{pmatrix}-\overset{\vee}{y}\right|^2=|\overset{\vee}{1}\beta_0+\mathrm{Y}\overset{\vee}{r}-\overset{\vee}{y}|^2$$

$$=\left|(\mathrm{I}-\frac{1}{6}\overset{\vee}{1}\overset{\triangleright}{1})(\mathrm{Y}\overset{\vee}{r}-\overset{\vee}{y})+\left\{\overset{\vee}{1}\beta_0+\frac{1}{6}\overset{\vee}{1}\overset{\triangleright}{1}(\mathrm{Y}\overset{\vee}{r}-\overset{\vee}{y})\right\}\right|^2=(\#)$$

この最後の式の$|\ |^2$内の第1項の表わすベクトルと，第2項の表わすベクトルとは，直交する。なぜなら，

$$\text{第2項のベクトル}=\overset{\vee}{1}\left\{\beta_0+\frac{1}{6}\overset{\triangleright}{1}(\mathrm{Y}\overset{\vee}{r}-\overset{\vee}{y})\right\}$$

∴第1項のベクトルと第2項のベクトルとの内積

$$=\left\{\beta_0+\frac{1}{6}\overset{\triangleright}{1}(\mathrm{Y}\overset{\vee}{r}-\overset{\vee}{y})\right\}\overset{\triangleright}{1}(\mathrm{I}-\frac{1}{6}\overset{\vee}{1}\overset{\triangleright}{1})(\mathrm{Y}\overset{\vee}{r}-\overset{\vee}{y})$$

補助定理2から，これは0となる。

そうすると，補助定理3から，

$$(\#) = \left|\left(\mathrm{I} - \frac{1}{6}\check{\mathrm{l}}\overset{\triangleright}{\mathrm{l}}\right)(\mathrm{Y}\check{r} - \check{y})\right|^2 + \left|\check{\mathrm{l}}\beta_0 + \frac{1}{6}\check{\mathrm{l}}\overset{\triangleright}{\mathrm{l}}(\mathrm{Y}\check{r} - \check{y})\right|^2$$

$$= \left|\left(\mathrm{I} - \frac{1}{6}\check{\mathrm{l}}\overset{\triangleright}{\mathrm{l}}\right)(\mathrm{Y}\check{r} - \check{y})\right|^2 + \left\{\beta_0 + \frac{1}{6}\overset{\triangleright}{\mathrm{l}}(\mathrm{Y}\check{r} - \check{y})\right\}^2 |\check{\mathrm{l}}|^2$$

$$= \left|\left(\mathrm{I} - \frac{1}{6}\check{\mathrm{l}}\overset{\triangleright}{\mathrm{l}}\right)(\mathrm{Y}\check{r} - \check{y})\right|^2 + 6\left\{\beta_0 + \frac{1}{6}\overset{\triangleright}{\mathrm{l}}(\mathrm{Y}\check{r} - \check{y})\right\}^2$$

この式を最小にする β_0，$\check{r} = \begin{pmatrix}\beta_1 \\ \beta_2\end{pmatrix}$ を求めればよいわけだが，この第1項は β_0 を含まないことに着目して，まず第1項を最小にする $\check{r}$ を求め，その $\check{r}$ を用いて，第2項が0になるよう β_0 をきめればよいことになる。

補助定理1から，この第1項は，

$$\left|\begin{pmatrix} x_{11} - \bar{x}_{\cdot 1} & x_{12} - \bar{x}_{\cdot 2} \\ x_{21} - \bar{x}_{\cdot 1} & x_{22} - \bar{x}_{\cdot 2} \\ \vdots & \vdots \\ x_{61} - \bar{x}_{\cdot 1} & x_{62} - \bar{x}_{\cdot 2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1 \\ \beta_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 - \bar{y}_{\cdot} \\ \vdots \\ y_6 - \bar{y}_{\cdot} \end{pmatrix}\right|^2$$

第2項は，$6\left\{\beta_0 + (\bar{x}_{\cdot 1}\beta_1 + \bar{x}_{\cdot 2}\beta_2) - \bar{y}_{\cdot}\right\}^2$

となる。あとは，前の解のとおりやればよい。

（注1） 一般に $|\mathrm{X}\check{\beta} - \check{y}|^2$ を最小にする $\check{\beta}$ を求めるには，β_1，…，β_n で偏微分して正規方程式を作るが，行列を使うのなら偏微分によらず，次のようにするのがよい。

$$|\mathrm{X}\check{\beta} - \check{y}|^2 = |(\mathrm{X}\check{\beta}_0 - \check{y}) + \mathrm{X}(\check{\beta} - \check{\beta}_0)|^2 = (\#)$$

ここで，$\check{\beta}_0$ を，

$$\mathrm{X}'(\mathrm{X}\check{\beta}_0 - \check{y}) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

になるようにきめておくと，$\mathrm{X}\check{\beta}_0 - \check{y}$ と $\mathrm{X}(\check{\beta} - \check{\beta}_0)$ は直交する。なぜなら，これらの内積は，

$$(\overset{\triangleright}{\beta} - \overset{\triangleright}{\beta}_0)\,\mathrm{X}'(\mathrm{X}\check{\beta} - \check{y}) = 0$$

となるから。そうすると，

$$(\#) = \left| X\check{\beta}_0 - \check{y} \right|^2 + \left| X(\check{\beta} - \check{\beta}_0) \right|^2$$

この第1項は，$\check{\beta}$ に関係しないから，結局，第2項を最小にすればよい。そのような$\check{\beta}$は $\check{\beta}_0$ にほかならない。

上の(1)が正規方程式である。(1)は通常

$$X'X\check{\beta}_0 = X'\check{y}$$

の形でかく。

（注2） 一般に，$\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum(x_i y_i - \bar{x}\bar{y})$

$$\because)\quad \sum x_i y_i = \sum\{\bar{x} + (x_i - \bar{x})\}\{\bar{y} + (y_i - \bar{y})\}$$
$$= \sum\{\bar{x}\bar{y} + (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\} + \bar{x}\sum(y_i - \bar{y}) + \bar{y}\sum(x_i - \bar{x})$$
$$= \sum\{\bar{x}\bar{y} + (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\}$$

〔別解2'〕（これは実質的には別解1と同じである。記号は別解2のものを流用する。）

$$Z = \begin{pmatrix} x_{11} - \bar{x}_{.1} & x_{12} - \bar{x}_{.2} \\ \vdots & \vdots \\ x_{61} - \bar{x}_{.1} & x_{62} - \bar{x}_{.2} \end{pmatrix}, \quad \check{z} = \begin{pmatrix} y_1 - \bar{y}_. \\ \vdots \\ y_6 - \bar{y}_. \end{pmatrix}, \quad \check{a} = \begin{pmatrix} \bar{x}_{.1} \\ \bar{x}_{.2} \end{pmatrix}$$

とおく。そうすると，

$$Y = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ \vdots & \vdots \\ x_{61} & x_{62} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_{.1} & \bar{x}_{.2} \\ \vdots & \vdots \\ \bar{x}_{.1} & \bar{x}_{.2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{11} - \bar{x}_{.1} & x_{12} - \bar{x}_{.2} \\ & \vdots \\ x_{61} - \bar{x}_{.1} & x_{62} - \bar{x}_{.2} \end{pmatrix}$$

$$= \check{1}a + Z$$

$$\check{y} = \check{1}\bar{y}_. + \check{z}$$

あきらかに，$\overset{\triangleright}{1}Z=0$，$\overset{\triangleright}{1}\check{z}=0$ ……………………………(1)

$$|X\check{\beta}-\check{y}|^2=\left|(\check{1}Y)\begin{pmatrix}\beta_0\\ \check{\gamma}\end{pmatrix}-\check{y}\right|^2=|\check{1}\beta_0+Y\check{\gamma}-\check{y}|^2$$

$$=|\check{1}\beta_0+(\check{1}\overset{\triangleright}{a}+Z)\check{\gamma}-(\check{1}\bar{y}_{.}+\check{z})|^2$$

$$=|(Z\check{\gamma}-\check{z})+\check{1}(\overset{\triangleright}{a}\check{\gamma}+\beta_0-\bar{y}_{.})|^2=(\#)$$

この最後の式の｜　｜内の第１項と第２項は，(1)によって，直交するから，

$$(\#)=|Z\check{\gamma}-\check{z}|^2+6(\overset{\triangleright}{a}\check{\gamma}+\beta_0-\bar{y}_{.})^2 \qquad (\because\ |\check{1}|^2=6)$$

これは，別解１の(1)と同じなので，あとは，別解１のとおり。

5.　題意から次の関係式が成立する。

$$P_n(t+\triangle t)=P_n(t)(1-\lambda\cdot\triangle t)+P_{n-1}(t)\lambda\cdot\triangle t+o(\triangle t) \qquad (n\geqq 1)$$

$$\therefore\ \frac{P_n(t+\triangle t)-P_n(t)}{\triangle t}=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)+\frac{o(\triangle t)}{\triangle t}$$

ここで，$\triangle t\to 0$ とすれば，

$$P_n'(t)=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t) \qquad \cdots\cdots(1)$$

なる微分方程式を得る。

ところで，$n=0$ のときは，

$$P_0(t+\triangle t)=P_0(t)(1-\lambda\triangle t)+o(\triangle t)$$

なる関係式が成立する。

上と同様にして，

$$P_0'(t)=-\lambda P_0(t)$$

を得る。　$P_0(t)=1$ を利用し，

この微分方程式を解けば，

$$P_0(t)=e^{-\lambda t} \qquad \cdots\cdots(2)$$

を得る。

$n=1$ のとき，(2)を利用し，(1)を解けば，

$$\mathrm{P}_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

を得る。

$n=2$ のとき，(3)を利用し，(1)を解けば，

$$\mathrm{P}_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t}$$

を得る。

以上により，(1)の一般解 $\mathrm{P}_n(t)$ は，$\mathrm{P}_n(t) = \dfrac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$ と容易に類推できるが，これは確かに(2)を満足する。微分方程式(1)の解の存在と一意性により(1)の解は，$\mathrm{P}_n(t) = \dfrac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$ と決定できる。