昭和 47 年度　（問題）

午前の部

1.　下記の夫婦年金の年払営業保険料を求めよ。

①　保険料払込期間は n 年とし，夫の生存中，毎年払とする。

②　夫の死亡後は妻の生存している間，妻に毎年末年金年額1 の年金が支払われる。

③　n 年経過後は，夫が生存している時は，夫に毎年始に年金年額1 の年金が支払われる。

ここに，新契約費，保険料払込中の維持費は年金年額1 に対しそれぞれ，0.3，0.03 で，集金費は営業保険料の 3 %とし，年金開始後の維持費は年金年額1 に対し 0.01 とする。

2.　多重脱退残存表において瞬間脱退率が $\mu_x^{(k)} = \dfrac{1}{100k - x}$ （k＝1，2，3）で与えられているとき20歳で加入した者が60歳まで残存する確率を求めよ。

3.　某生命保険会社はある年度において，次の諸数値を得た。これによって損益計算書を完成し，かつ，利源（死差，費差，解約差，利差）分析を行なえ。

年始責任準備金（V_0）	110,088,200 円
営業保険料（P'）	29,184,376 円
純保険料（P）	25,251,475 円
付加保険料（φ）	3,932,901 円
利息・配当金（I）	8,143,750 円
予定利率（i）	4 %
保険金（S）（即時払）	3,920,000 円
解約返戻金（W）	1,137,910 円
解約時責任準備金（V_W）	1,315,026 円
事業費（E）	4,546,288 円
年末責任準備金（V_1）	133,844,483 円

〔問〕

午後の部

4. 保険料一時払の養老保険（保険金期末払）において，死亡率を q_{x+t} から $q'_{x+t}=q_{x+t}(1+k)$ に変更するとき，保険料および責任準備金に及ぼす影響を算式により述べよ。

5. x 歳加入 n 年満期の養老保険契約の集団が，各年齢の死亡を含む脱退率 w_x（＝一定）によって脱退していくものとし，集団全体が人員に関し定常状態に達しているものとする。この集団のみで収支を相等させることにした場合，新契約費は新契約総保険金額に対しいくらの率になるか。次の２つの場合について考えよ。

① １件あたりの保険金額は全て一定である場合。

② １件当りの新契約の保険金額は毎年 r の比率で増加する場合。

ここに，死亡率，利率，維持費率および集金費率は予定の率どおり推移するものとし，責任準備金は純保険料式責任準備金を積立て，解約益は０とする。

6. 某生命保険会社は次の条件の養老保険（保険金期末払）を発売するという。

① この保険の責任準備金に対応する資産は，その全額を他の保険の資産と分離独立して運用管理するものとする。

② 保険金額は①の運用実績に対応して変動させるものとする。

③ 契約者は毎年一定額の保険料を払込むものとし，その純保険料率は保険金定額の同種類の保険の平準純保険料率と等しく，かつ，純保険料式責任準備金を積立てるものとする。

いま予定利率を i とし，第 t 保険年度の利回りを i'_t，保険金額を S_t（ただし，$S_0=1$ とする）とするとき，S_t に関する漸化式

$$S_t=f(S_{t-1},\ V_{t-1})\cdot g(i'_t)$$

を求めよ。ここに V_{t-1} は定額養老保険の平準純保険料式責任準備金とする。

昭和 47 年度　（解答）

午前の部

1.　契約年齢を夫x歳，妻y歳とする。

純保険料をＰとすると条件①より収入の現価は

$P\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ ……………(1)

条件②の支出の現価は年金年額１だから

$a_y - a_{xy}$ ……………(2)

条件③の支出の現価はn年据置の単生命年金だから

${}_{n|}\ddot{a}_x$ ……………(3)

収支相等の原則により　(1)＝(2)＋(3)

$$P\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = (a_y - a_{xy}) + {}_{n|}\ddot{a}_x$$

$$\therefore P = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\left\{(a_y - a_{xy}) + {}_{n|}\ddot{a}_x\right\}$$

求める営業保険料を P' とすると

$$P' = \frac{1}{1-\gamma}\left\{(1+\beta')P + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + \beta\right\}$$

$\alpha = 0.3$，　$\beta = 0.03$，　$\beta' = 0.01$，　$\gamma = 0.03$　を代入して

$$P' = \frac{1}{0.97}\left\{1.01P + \frac{0.3}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + 0.03\right\}$$

2.　瞬間脱退率　$\mu_x^{(k)} = \dfrac{1}{100k - x}$　（$k=1,\ 2,\ 3$）

$$\mu_x^{(k)} = -\frac{1}{\ell_x^{(T)}}\frac{d\ell_x^{(k)}}{dx}$$

$$\mu_x^{(T)} = -\frac{1}{\ell_x^{(T)}}\frac{d\ell_x^{(T)}}{dx}$$

ここに　$\ell_x^{(k)} = \sum_{t=0}^{\infty} d_{x+t}^{(k)}$

$$\ell_x^{(T)} = \sum_{k=1}^{3}\ell_x^{(k)}$$

$$\therefore\ \mu_x^{(T)} = -\frac{1}{\ell_x^{(T)}}\frac{d\ell_x^{(T)}}{dx} = -\frac{1}{\ell_x^{(T)}}\frac{d\left(\sum_{k=1}^{3}\ell_x^{(k)}\right)}{dx} = \sum_{k=1}^{3}\mu_x^{(k)}$$

よって $${}_nP_{x_0}^{(T)} = \frac{\ell_{x_0+n}^{(T)}}{\ell_{x_0}^{(T)}} = \frac{\ell_0^{(T)}e^{-\int_0^{x_0+n}\mu_x^{(T)}dx}}{\ell_0^{(T)}e^{-\int_0^{x_0}\mu_x^{(T)}dx}} = e^{-\int_{x_0}^{x_0+n}\mu_x^{(T)}dx}$$

$x_0 = 20$, $x_0+n = 60$ を代入すると

$${}_{40}P_{20}^{(T)} = e^{-\int_{20}^{60}\sum_{k=1}^{3}\frac{dx}{100k-x}} = e^{-\sum_{k=1}^{3}\int_{20}^{60}\frac{dx}{100k-x}} = e^{-\sum_{k=1}^{3}\left[-\log(100k-x)\right]_{20}^{60}}$$

$$= e^{-\sum_{k=1}^{3}\left[-\log\frac{100k-60}{100k-20}\right]} = e^{-\sum_{k=1}^{3}\log\frac{100k-20}{100k-60}}$$

$$= \prod_{k=1}^{3}\frac{100k-60}{100k-20}$$

$$= \frac{100-60}{100-20}\times\frac{200-60}{200-20}\times\frac{300-60}{300-20}$$

$$= \frac{1}{3}$$ ……………(答)

3. 損益計算書（P／L）

支	出	収	入
S：	3,920,000 円	P′：	29,184,376 円
W：	1,137,910	I：	8,143,750
E：	4,546,288	V_0：	110,088,200
V_1：	133,844,483		
G：	3,967,645		
	147,416,326		147,416,326

・死差益（G_1）

S：	3,920,000 円	P：	25,251,475 円
V_W：	1,315,026	I_1：	4,803,857
V_1：	133,844,483	V_0：	110,088,200
G_1：	1,064,023		
	140,143,532		140,143,532

$$I_1 = \left(V_0 + \frac{P - S - V_W}{2}\right) \times i$$

$$= 4,803,857$$

・費差益（G_2）

E：	4,546,288 円	ϕ：	3,932,901 円
G_2：	△ 625,655	I_2：	△ 12,268
	3,920,633		3,920,633

$$I_2 = (\phi - E) \times \frac{i}{2} = -12,268$$

・解約益（G_3）

W：	1,137,910 円	V_W：	1,315,026 円
G_3：	180,658	I_3：	3,542
	1,318,568		1,318,568

$$I_3 = (V_W - W) \times \frac{i}{2} = 3,542$$

・利差益（G_4）

I_1：	4,803,857 円	I：	8,143,750 円
I_2：	△ 12,268		
I_3：	3,542		
G_4：	3,348,619		
	8,143,750		8,143,750

午後の部

4. 死亡率の変更による，変更後と変更前との差を△の記号を用いる。

責任準備金の再帰公式より，第１年度は

$$\mathrm{P}\ (1+i)=q_x+(1-q_x)\cdot{}_1\mathrm{V} \quad\cdots\cdots①$$

$$(\mathrm{P}+\triangle\mathrm{P})\ (1+i)=q_x+\triangle q_x+(1-q_x-\triangle q_x)\ ({}_1\mathrm{V}+\triangle_1\mathrm{V})\cdots\cdots②$$

変更後の保険料を P'，責任準備金を ${}_t\mathrm{V}'$ とすれば $\triangle\mathrm{P}=\mathrm{P}'-\mathrm{P}$，$\triangle_t\mathrm{V}={}_t\mathrm{V}'-{}_t\mathrm{V}$

となり ②が得られる。

②−① $\triangle\mathrm{P}\ (1+i)=\triangle q_x-\triangle q_x\,({}_1\mathrm{V}+\triangle_1\mathrm{V})+(1-q_x)\triangle_1\mathrm{V}$

$$\therefore\ \triangle\mathrm{P}\ (1+i)=\triangle q_x(1-{}_1\mathrm{V}-\triangle_1\mathrm{V})+p_x\triangle_1\mathrm{V} \quad\cdots\cdots③$$

第２年度は①，②と同様にして

$$ {}_1\mathrm{V}\,(1+i)=q_{x+1}+(1-q_{x+1})\cdot{}_2\mathrm{V} \quad\cdots\cdots④$$

$$({}_1\mathrm{V}+\triangle_1\mathrm{V})\,(1+i)=q_{x+1}+\triangle q_{x+1}+(1-q_{x+1}-\triangle q_{x+1})({}_2\mathrm{V}+\triangle_2\mathrm{V}) \quad\cdots\cdots⑤$$

⑤−④ $\triangle_1\mathrm{V}(1+i)=\triangle q_{x+1}(1-{}_2\mathrm{V}-\triangle_2\mathrm{V})+p_{x+1}\triangle_2\mathrm{V} \quad\cdots\cdots⑥$

同様にして第（$t+1$）年度は （$t=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n-1$）

$$\triangle_t\mathrm{V}(1+i)=\triangle q_{x+t}(1-{}_{t+1}\mathrm{V}-\triangle_{t+1}\mathrm{V})+p_{x+t}\triangle_{t+1}\mathrm{V} \quad\cdots\cdots⑦$$

③× $vv^x\ell_x$，⑥× $vv^{x+1}\ell_{x+1}$，⑦× $vv^{x+t}\ell_{x+t}$ を作ると，

第１，２，……，n 年度の式は

$\triangle\mathrm{P}\cdot\mathrm{D}_x=\triangle q_x(1-{}_1\mathrm{V}-\triangle_1\mathrm{V})\,v\mathrm{D}_x+\mathrm{D}_{x+1}\cdot\triangle_1\mathrm{V}$

$\triangle_1\mathrm{V}\cdot\mathrm{D}_{x+1}=\triangle q_{x+1}(1-{}_2\mathrm{V}-\triangle_2\mathrm{V})\,v\mathrm{D}_{x+1}+\mathrm{D}_{x+2}\cdot\triangle_2\mathrm{V}$

……………

$\triangle_{n-1}\mathrm{V}\cdot\mathrm{D}_{x+n-1}=\triangle q_{x+n-1}(1-{}_n\mathrm{V}-\triangle_n\mathrm{V})\,v\mathrm{D}_{x+n-1}+\mathrm{D}_{x+n}\cdot\triangle_n\mathrm{V}$

辺々加えると

$$\triangle\mathrm{P}\cdot\mathrm{D}_x=\sum_{t=0}^{n-1}\triangle q_{x+t}(1-{}_{t+1}\mathrm{V}-\triangle_{t+1}\mathrm{V})\,v\mathrm{D}_{x+t} \quad (\because\ \triangle_n\mathrm{V}=0)$$

$$\therefore\ \triangle P=\frac{1}{D_x}\sum_{t=0}^{n-1}\triangle q_{x+t}\,(1-{}_{t+1}V-\triangle_{t+1}V)\,v\,D_{x+t}$$

$$=\frac{k}{D_x}\sum_{t=0}^{n-1}(1-{}_{t+1}V-\triangle_{t+1}V)\,C_{x+t}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(答)$$

次に⑦より $t\geqq 1$ に対して

$$\triangle_t V(1+i)=\triangle q_{x+t}\,(1-{}_{t+1}V-\triangle_{t+1}V)+p_{x+t}\cdot\triangle_{t+1}V$$

両辺に $v\,v^{x+t}\,l_{x+t}$ を乗じて $t=\tau,\ \tau+1,\cdots,\ n-1$ を代入して

辺々加えると

$$\triangle_\tau V=\frac{k}{D_{x+\tau}}\sum_{t=\tau}^{n-1}(1-{}_{t+1}V-\triangle_{t+1}V)\,C_{x+t}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(答)$$

5. (1) Lを新契約件数とすると，$x+t$ 歳の件数は $L(1-w_x)^t$

総保険金は $S\cdot\sum_{t=0}^{n-1}L(1-w_x)^t$

新契約費の枠は $\dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}\times S\cdot\sum_{t=0}^{n-1}L(1-w_x)^t$

よって新契約保険金に対しては

$$\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}\times S\sum_{t=0}^{n-1}L(1-w_x)^t/SL=\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}\sum_{t=0}^{n-1}(1-w_x)^t\quad\cdots\cdots(答)$$

(2) 1件の保険金額が毎年 r の比率で増加するときの総保険金額を考える。n 年前の新契約は満期になるから0である。

$n-1$ 年前の新契約は件数が $L(1-w_x)^{n-1}$ に減るから $S(1+r)L(1-w_x)^{n-1}$

……………

1年前の新契約は件数が $L(1-w_x)$ に減るから $S(1+r)^{n-1}L(1-w_x)$

当年度の新契約は金額 $S(1+r)^n$，件数がL件だから $S(1+r)^nL$

総保険金額は

$$SL\sum_{t=0}^{n-1}(1-w_x)^t(1+r)^{n-t}=SL(1+r)^n\sum_{t=0}^{n-1}(1-w_x)^t(1+r)^{-t}$$

新契約費の枠は　$\dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \times SL(1+r)^n \sum_{t=0}^{n-1}(1-w_x)^t(1+r)^{-t}$

新契約の保険金額は　$SL(1+r)^n$　だから求める率は

$$\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \times SL(1+r)^n \sum_{t=0}^{n-1}(1-w_x)^t(1+r)^{-t} / SL(1+r)^n$$

$$= \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:n}} \sum_{t=0}^{n-1}(1-w_x)^t(1+r)^{-t} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(答)}$$

6.　責任準備金の再帰公式は

$$({}_{t-1}V + P_{x:\overline{n}|})(1+i) - q_{x+t-1} = p_{x+t-1} \cdot {}_tV$$

すなわち　$({}_{t-1}V + P_{x:\overline{n}|})(1+i) = q_{x+t-1} + p_{x+t-1} \cdot {}_tV \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

利回り i_t' によって保険金額の変化する養老保険の再帰公式は

$$(S_{t-1} \cdot {}_{t-1}V + P_{x:\overline{n}|})(1+i_t') - S_t q_{x+t-1} = p_{x+t-1} \cdot S_t \cdot {}_tV$$

$$\therefore (S_{t-1} \cdot {}_{t-1}V + P_{x:\overline{n}|})(1+i_t') = S_t(q_{x+t-1} + p_{x+t-1} \cdot {}_tV) \cdots (2)$$

(1)を(2)に代入して

$$(S_{t-1} \cdot {}_{t-1}V + P_{x:\overline{n}|})(1+i_t') = S_t({}_{t-1}V + P_{x:\overline{n}|})(1+i)$$

$$\therefore \quad S_t = \frac{S_{t-1} \cdot {}_{t-1}V + P_{x:\overline{n}|}}{{}_{t-1}V + P_{x:\overline{n}|}} \times \frac{1+i_t'}{1+i}$$

$$= f(S_{t-1}, V_{t-1}) \cdot g(i_t')$$

ここに　$f(S_{t-1}, V_{t-1}) = \dfrac{S_{t-1} \cdot {}_{t-1}V + P_{x:\overline{n}|}}{{}_{t-1}V + P_{x:\overline{n}|}}$

$$g(i_t') = \frac{1+i_t'}{1+i}$$