〔問〕

昭和 47 年度　（問題）

午前の部

1.　$\mu_x = 1$　$(x_0 \leqq x \leqq x_0 + 1)$ なる場合に q_{x_0} を求めよ。

2.　次式を証明せよ。ここに，保険金は期末払とする。

$$P_{x:\overline{n|}} = {}_tV_{x:\overline{n|}} \cdot P_{x:\overline{t|}} + (1 - {}_tV_{x:\overline{n|}}) \cdot P_{x:\overline{t|}}^{\;\,1} \qquad (t = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

3.　逓増する年賦償還金（償還期間 n 年，年利率 j，期末払，年賦償還金の対前年度比は $1 + r$）によって，n 年間に返済する条件で信用貸付を受けた債務者を被保険者とし，未返済残高を保険金額とする保険期間 n 年，払込期間 m 年 $(m < n)$ の死亡保険（保険金期末払）の平準純保険料および純保険料式責任準備金（予定利率 i）の算式を求めよ。

午後の部

4.　保険金額 10,000 円，保険期間 10 年，加入年齢 45 歳の養老保険において，第 5 保険年度末における解決返戻金は 4,457 円とする。　この時点における払済保険の保険金額および延長保険の生存保険金額を計算せよ。ここに，$A_{50:\overline{5|}}^{\;\;\;\;1} = 0.7738$，$A_{50:\overline{5|}}^{1} = 0.0519$ で予定事業費率は用いないものとし，解約控除率は 0 とする。

5.　次式を証明せよ。

$$\frac{d}{dt}\left[\,{}_t\overline{V}(\overline{A}_x)\,\right] = \frac{\overline{A}_{x+t} - \mu_{x+t} \cdot \overline{a}_{x+t}}{\overline{a}_x}$$

6.　最初の n 年間の死亡には額面保険金 1 に責任準備金を加えて支払い，以後の死亡には額面保険金 1 のみ支払う終身保険の年払純保険料を求めよ。ここに，加入年齢は x 歳とし保険給

〔問〕

付は期末払とする。

昭和 47 年度　（解答）

午前の部

1. $$ {}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s}\, ds} \quad \cdots\cdots\cdots ① $$

$x = x_0$，$t = 1$ を①に代入すると $0 \leqq S \leqq 1$ で $\mu_{x+s} = 1$ だから

$$ p_{x_0} = e^{-\int_0^1 1\, ds} = e^{-1} $$

$$ \therefore q_{x_0} = 1 - p_{x_0} = 1 - e^{-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (答) $$

2. 右辺 $= {}_tV_{x:\overline{n}|} \cdot (P_{x:\overline{t}|} - P^{\ 1}_{x:\overline{t}|}) + P^{\ 1}_{x:\overline{t}|}$

$$ = {}_tV_{x:\overline{n}|} \cdot P_{x:\overline{t}|}^{\ \ 1} + P^{\ 1}_{x:\overline{t}|} $$

$$ = (A_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|})\, P_{x:\overline{t}|}^{\ \ 1} + P^{\ 1}_{x:\overline{t}|} $$

$$ = \left(\frac{M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}}\right) \frac{D_{x+t}}{N_x - N_{x+t}} + \frac{M_x - M_{x+t}}{N_x - N_{x+t}} $$

$$ = \frac{(M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n})(N_x - N_{x+n}) - (M_x - M_{x+n} + D_{x+n})(N_{x+t} - N_{x+n})}{(N_x - N_{x+n})(N_x - N_{x+t})} + \frac{M_x - M_{x+t}}{N_x - N_{x+t}} \cdot \frac{N_x - N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} $$

$$ = \frac{(M_x - M_{x+n} + D_{x+n})(N_x - N_{x+t})}{(N_x - N_{x+n})(N_x - N_{x+t})} $$

$$ = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} $$

$$ = P_{x:\overline{n}|} $$

$=$ 左辺

3.　貸付金額を1とし，初回償還金を（1＋r）Rとすれば次式が成り立つ。

$$\mathrm{R}\frac{1+r}{1+j}+\mathrm{R}\frac{(1+r)^2}{(1+j)^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\mathrm{R}\frac{(1+r)^n}{(1+j)^n}=1$$

$\dfrac{1+r}{1+j}=\dfrac{1}{1+j'}$　とおいて上式を書き直すと

$$\mathrm{R}\left\{\frac{1}{1+j'}+\frac{1}{(1+j')^2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{(1+j')^n}\right\}=1$$

$$\therefore\quad \mathrm{R}=\frac{1}{a_{\overline{n|}}^{(j')}}$$

t 年度末の未返済残高は

$$\left\{\mathrm{R}\frac{(1+r)^t}{(1+j)^t}+\mathrm{R}\frac{(1+r)^{t+1}}{(1+j)^{t+1}}+\cdots\cdots\cdots+\mathrm{R}\frac{(1+r)^n}{(1+j)^n}\right\}\times(1+j)^t$$

$$=(1+r)^{t-1}(1+j)\frac{1}{a_{\overline{n|}}^{(j')}}\cdot a_{\overline{n-t+1|}}^{(j')}$$

故に求める純保険料は

$$\mathrm{P}=\frac{\dfrac{1+j}{a_{\overline{n|}}^{(j')}}\displaystyle\sum_{t=1}^{n}(1+r)^{t-1}a_{\overline{n-t+1|}}^{(j')}\mathrm{C}_{x+t-1}}{\mathrm{N}_x-\mathrm{N}_{x+m}}$$

純保険料式責任準備金は

$${}_t\mathrm{V}=\frac{1+j}{a_{\overline{n|}}^{(j')}}\times\frac{1}{\mathrm{D}_{x+t}}\sum_{s=t}^{n-1}\mathrm{C}_{x+s}(1+r)^s\,a_{\overline{n-s|}}^{(j')}-\mathrm{P}\frac{\mathrm{N}_{x+t}-\mathrm{N}_{x+n}}{\mathrm{D}_{x+t}}\qquad(t<m)$$

$$=\frac{1+j}{a_{n}^{(j')}}\times\frac{1}{\mathrm{D}_{x+t}}\sum_{s=t}^{n-1}\mathrm{C}_{x+s}(1+r)^s\,a_{\overline{n-s|}}^{(j')}$$

ここに D_x，N_x，C_x は予定利率 i による。

午後の部

4. 解約控除率が0だから解約返戻金は責任準備金に等しい。

払済保険の保険金額S′は，責任準備金を一時払純保険料で割ってえられる。

すなわち，　$S' = \dfrac{S\,{}_tV_{x:\overline{n}|}}{A_{x+t:\overline{n-t}|}}$　　ここにSは10,000円

${}_5V_{45:\overline{10}|} = 0.4457$　　$A_{45+5:\overline{10-5}|} = A_{50:\overline{5}|} = A^{1}_{50:\overline{5}|} + A_{50:\overset{1}{\overline{5}|}} = 0.0519 + 0.7738$

$= 0.8257$

$$\therefore\ S' = \frac{4457}{0.8257} = 5,398\ \overset{(円)}{\cdots\cdots\cdots\cdots}\ (答)$$

解約時における定期保険の保険料は519円である。

一方，解約返戻金は4,457円であるから残りの

4,457円－519円＝3,938円が生存保険部分に充当される。

生存保険金額をSeとすれば

$$Se = \frac{S\,{}_tV - SA^{1}_{x+t:\overline{n-t}|}}{A_{x+t:\overset{1}{\overline{n-t}|}}} = \frac{3,938}{0.7738} = 5,089\ \overset{(円)}{\cdots\cdots\cdots\cdots}\ (答)$$

5. $${}_t\overline{V}(\overline{A}_x) = \overline{A}_{x+t} - \overline{P}_x\,\overline{a}_{x+t} = 1 - (\overline{P}_x + \delta)\,\overline{a}_{x+t} = 1 - \frac{\overline{a}_{x+t}}{\overline{a}_x}$$

$$\therefore\ \frac{d}{dt}[{}_t\overline{V}(\overline{A}_x)] = \frac{d}{dt}\left[1 - \frac{\overline{a}_{x+t}}{\overline{a}_x}\right] = \left(-\frac{1}{\overline{a}_x}\right)\left(\frac{d}{dt}\int_0^\infty v^s\,{}_sp_{x+t}\,ds\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{\overline{a}_x}\right)\left(\int_0^\infty v^s\left(\frac{\partial}{\partial t}\,{}_sp_{x+t}\right)ds\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{\overline{a}_x}\right)\left(\int_0^\infty v^s\,{}_sp_{x+t}\,(\mu_{x+t} - \mu_{x+t+s})\,ds\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{\overline{a}_x}\right) \times \mu_{x+t}\cdot\int_0^\infty v^s\,{}_sp_{x+t}\,ds + \frac{1}{\overline{a}_x} \times \int_0^\infty v^s\,{}_sp_{x+t}\,\mu_{x+t+s}\,ds$$

$$= -\frac{1}{\overline{a}_x}\,\mu_{x+t}\,\overline{a}_{x+t} + \frac{1}{\overline{a}_x}\,\overline{A}_{x+t}$$

$$= \frac{\overline{A}_{x+t} - \mu_{x+t}\,\overline{a}_{x+t}}{\overline{a}_x}$$

6. ⅰ）最初のn年間の給付に対し次式が成り立つ。

$${}_{t}V + P - vq_{x+t}(1 + {}_{t+1}V) = vp_{x+t} \cdot {}_{t+1}V$$

$$\therefore {}_{t}V + P - vq_{x+t} = v(p_{x+t} + q_{x+t})\ {}_{t+1}V = v_{t+1}V$$

v^t をかけると　$v^t\,{}_{t}V + v^tP - v^{t+1}q_{x+t} = v^{t+1} \cdot {}_{t+1}V$

$t = 0 \sim n-1$ を代入して辺々加えると

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}P - \sum_{k=1}^{n} v^k q_{x+k-1} = v^n \cdot {}_{n}V \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ⅱ）n年以後の給付に対して次式が成り立つ。

$${}_{t}V + P - vq_{x+t} = vp_{x+t} \cdot {}_{t+1}V$$

$\ell_{x+t}v^{x+t}$ をかけると　$\ell_{x+t}v^{x+t}\,{}_{t}V + \ell_{x+t}v^{x+t}P - d_{x+t}v^{x+t+1}$

$= \ell_{x+t+1}v^{x+t+1}\,{}_{t+1}V$

基数に直して　$D_{x+t}\,{}_{t}V + D_{x+t}P - C_{x+t} = D_{x+t+1} \cdot {}_{t+1}V$

$t = n \sim \infty$を代入して辺々加えると

$$D_{x+n} \cdot {}_{n}V + P \cdot N_{x+n} - M_{x+n} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2)より　$${}_{n}V = \frac{M_{x+n} - PN_{x+n}}{D_{x+n}} = A_{x+n} - P \cdot \ddot{a}_{x+n}$$

(1)に代入　$$\ddot{a}_{\overline{n}|}P - \sum_{k=1}^{n} v^k q_{x+k-1} = v^n A_{x+n} - v^n P \ddot{a}_{x+n}$$

$$\therefore P = \frac{v^n A_{x+n} + \sum_{k=1}^{n} v^k q_{x+k-1}}{\ddot{a}_{\overline{n}|} + v^n \ddot{a}_{x+n}}$$

$$= \frac{A_{x+n} + \sum_{k=1}^{n} v^{k-n} q_{x+k-1}}{\ddot{s}_{\overline{n}|} + \ddot{a}_{x+n}} \cdots\cdots\cdots\cdots （答）$$