昭和46年度　（問題）

午前の部

1.　死因Rによる死亡者には死亡保険金1を支払い，他の死因による死亡者には，死亡給付金として既払保険料を支払い，満期まで生存した者には満期保険金1を支払うn年満期の保険の年払保険料を求めよ。ここに，死因Rの発生率は年齢に関係なく一定率rとし，保険金および死亡給付金は期末払とする。また，付加保険料は，新契約費および維持費は保険金1に対しそれぞれα，βとし，集金費は営業保険料1に対しγとする。

2.　Lidstoneの定理の判別関数の値が，定数Cであるとき，$P = P' + C v'$となることを示せ。

3.　二重脱退残存表を作成するのに際し，各年齢別の二つの脱退事由による総脱退率と，一方の脱退事由による絶対脱退率が既知であるものとする。この二重脱退残存表を完成せよ。

午後の部

4.　有限払込終身保険における充足保険料式責任準備金の算式を導入せよ。

又，普通終身保険の場合，充足保険料式責任準備金はチルメル式責任準備金と同形になることを示せ。

5.　A氏は財産Sを遺して死亡した。その遺言によれば，同氏の妻（y）の生存中はSより得られる収入はすべて妻に与え，妻が死亡すれば，その時点において以下の条件により財産Sを分割することとなっていた。

即ち，

(1)　A氏の息子（a）および（b）が共に生存すれば（a）および（b）で等分する。

〔問〕

(2) 息子のいずれかが妻より先に死亡した場合には，妻の死亡時に生存している彼等の子供がこれを得る。

いま，(a)は子供3人(a_1)，(a_2)，(a_3)を持ち，(b)は2人の子供(b_1)，(b_2)を持っている。また，妻の死亡時に生存する上記の条件による財産の受取権を有する者は，全員で財産を等分して受け取るものとし，(a)および(b)には新たに子供が生まれることはないものとする。

(a)の受取額の期待値(子供の分は除く)を，第1死亡に関する条件付連続払保険給付現価(例えば $\bar{A}^{\;1}_{yab}$ など)を用いて表わせ。

6. 従業員1,000人のある会社が，死亡共済制度を始めるにあたって支払不能におちいらないため，予定死亡数を超える死亡者が発生した場合には超過死亡に対する共済給付金に相当する金額を受けとるような保険契約を締結することとした。この契約の保険料を共済掛金に付加することとしたときの割増率を計算せよ。計算にあたっては次のことを仮定せよ。

(1) 掛金率および保険料率の計算の基礎とする予定死亡率は3‰とする。

(2) 予定利率および予定経費率は考慮しない。

(3) 死亡以外の中途退職はない。

(4) 共済給付金はすべて同一金額とする。

(5) $0.997^{1000} \doteqdot 0.997^{999} \doteqdot 0.997^{998} \doteqdot 0.050$

昭和46年度　（解答）

午前の部

1. 死因Rによる死亡者に対する給付の現価は，$\dfrac{\sum_{0}^{n-1} D_{x+t} \cdot rv}{D_x}$

他の死因による死亡者に対する給付の現価は，$\dfrac{\sum_{0}^{n-1} (t+1) P'(C_{x+t} - D_{x+t} \cdot rv)}{D_x}$

満期まで生存した者に対する給付の現価は，$\dfrac{D_{x+n}}{D_x}$

従って，純保険料Pは

$$P = \frac{\sum_{0}^{n-1} D_{x+t} \cdot rv + \sum_{0}^{n-1} (t+1) P'(C_{x+t} - D_{x+t} \cdot rv) + D_{x+n}}{D_x \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

$$= rv + \frac{P'\left\{(IA)^{1}_{x:\overline{n}|} - rv(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}\right\} + {}_{n}E_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

一方，営業保険料P′は

$$P' = \frac{1}{1-\gamma}\left\{P + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + \beta\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

(1)，(2)よりPを消去するとP′が求められる。

$$P' = \frac{{}_{n}E_x + rv\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \beta\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \alpha}{(1-\gamma)\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \left\{(IA)^{1}_{x:\overline{n}|} - vr(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}\right\}}$$

2. 変更後の計算基礎に基づく記号には，′ を付するものとする。

判別函数が定数であるから，${}_{t}V' = {}_{t}V$ （$0 \leqq t \leqq n$）である。

今，関係式　$({}_{t}V + P)(1+i) = {}_{t+1}V + q_t\,(1 - {}_{t+1}V)$

$({}_{t}V' + P')(1+i') = {}_{t+1}V' + q'_t\,(1 - {}_{t+1}V')$

において，辺々相減じて，次式を得る。

$$({}_{t}V'+P')(1+i')-({}_{t}V+P)(1+i)=({}_{t+1}V'-{}_{t+1}V)+q'_{t}(1-{}_{t+1}V')$$
$$-q_{t}(1-{}_{t+1}V)$$

両辺に $({}_{t}V+P)(1+i')+q'_{t}(1-{}_{t+1}V)$ を加えて

$$({}_{t}V'+P')(1+i')+({}_{t}V+P)(i'-i)+q'_{t}(1-{}_{t+1}V)=({}_{t+1}V'-{}_{t+1}V)$$
$$+q'_{t}(1-{}_{t+1}V')+(q'_{t}-q_{t})(1-{}_{t+1}V)+({}_{t}V+P)(1+i')$$

$$\therefore\quad ({}_{t}V+P)(i'-i)-(q'_{t}-q_{t})(1-{}_{t+1}V)=({}_{t+1}V'-{}_{t+1}V)-({}_{t}V'+P')(1+i')$$
$$-q'_{t}({}_{t+1}V'-{}_{t+1}V)+({}_{t}V+P)(1+i')$$
$$=p'_{t}({}_{t+1}V'-{}_{t+1}V)-({}_{t}V'-{}_{t}V)(1+i')$$
$$-(P'-P)(1+i')$$
$$=C$$

$$\therefore\quad -(P'-P)=Cv'$$

すなわち，$P=P'+Cv'$ である。

3. 二つの脱退原因を(1)，(2)で表わし，相対脱退率にはダッシュを付するものとする。即ち，

絶対脱退率	相対脱退率
$q_x^{(1)}$	$q_x^{(1)'}$
$q_x^{(2)}$	$q_x^{(2)'}$

で表わすものとする。

題意によって

$$q'_x=q_x^{(1)'}+q_x^{(2)'} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

によって求められる q'_x と $q_x^{(1)}$（又は $q_x^{(2)}$，ここでは $q_x^{(1)}$ とする）が既知である。

(1)式より　$q_x^{(2)'}=q'_x-q_x^{(1)'}$

を求め，これを

$$q_x^{(1)} = \frac{q_x^{(1)'}}{1-\frac{1}{2}q_x^{(2)'}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

に代入する。

$$q_x^{(1)} = \frac{q_x^{(1)'}}{1-\frac{1}{2}\left(q_x' - q_x^{(1)'}\right)}$$

これより $q_x^{(1)'}$ を求めれば，

$$q_x^{(1)'} = \frac{q_x^{(1)}\left(1-\frac{1}{2}q_x'\right)}{1-\frac{1}{2}q_x^{(1)}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

これと(1)式から

$$q_x^{(2)'} = \frac{q_x' - q_x^{(1)}}{1-\frac{1}{2}q_x^{(1)}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

(3)，(4)によって求まる相対脱退率により，脱退残存表を作成すればよい。

午後の部

4. 新契約費　保険金1に対し　α

新契約費		保険金1に対し	α
維持費	保険料払込中	〃	β
	保険料払済後	〃	β'
集金費		充足保険料1に対し	γ

とする。

m年払込年払充足保険料 ${}_mP_x^a$ は

$$A_x + \alpha + (\beta + \gamma\,{}_mP_x^a)\ddot{a}_{x:\overline{m|}} + \beta'(\ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{m|}}) = {}_mP_x^a \cdot \ddot{a}_{x:\overline{m|}} \quad \text{より}$$

$${}_mP_x^a = \frac{A_x + \alpha + \beta\,\ddot{a}_{x:\overline{m|}} + \beta'(\ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{m|}})}{(1-\gamma)\,\ddot{a}_{x:\overline{m|}}}$$

一方，充足保険料式責任準備金は，（保険金支払の現価）+（将来支出事業費の現価）−（収入充足保険料の現価）であるから，

$t \leqq m$ の場合

$$ {}_{t}^{m}V_{x}^{a} = A_{x+t} + (\beta + \gamma\, {}_{m}P_{x}^{a})\,\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} + \beta'(\ddot{a}_{x+t} - \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}) - {}_{m}P_{x}^{a}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} $$

$$ = A_{x+t} + \beta\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} + \beta'(\ddot{a}_{x+t} - \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}) - (1-\gamma)\,{}_{m}P_{x}^{a}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} $$

$$ = A_{x+t} + \beta\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} + \beta'(\ddot{a}_{x+t} - \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}) - \frac{A_{x} + \alpha + \beta\ddot{a}_{x:\overline{m}|} + \beta'(\ddot{a}_{x} - \ddot{a}_{x:\overline{m}|})}{\ddot{a}_{x:m}} \times \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} $$

$$ = \left(A_{x+t} - \frac{A_{x}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}\right) - \alpha\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} + \beta'\left(\ddot{a}_{x+t} - \frac{\ddot{a}_{x}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} \times \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}\right) $$

$$ = {}_{t}^{m}V_{x} - \alpha\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} + \beta'\left(\ddot{a}_{x+t} - \frac{\ddot{a}_{x}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}\right) $$

$t > m$ の場合

$$ {}_{t}^{m}V_{x}^{a} = A_{x+t} + \beta'\ddot{a}_{x+t} $$

ここで，$m \to \infty$ とすれば

$$ {}_{t}V_{x}^{a} = {}_{t}V_{x} - \alpha\frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_{x}} $$

これはチルメル式責任準備金と同形である。

5. (1) 妻の死亡時に a，b 共に生存する確率は

$$ {}_{t}p_{y} \cdot \mu_{y+t} \cdot {}_{t}p_{a} \cdot {}_{t}p_{b} = \mu_{y+t} \cdot {}_{t}p_{y \cdot a \cdot b} $$

(2)(i) 妻の死亡時に b がすでに死亡し，b_1，b_2 が共に生存している確率は；

$$ {}_tp_y \cdot q_{y+t} \cdot {}_tp_a \cdot (1 - {}_tp_b) \cdot {}_tp_{b_1} \cdot {}_tp_{b_2} $$

$$ = q_{y+t} \cdot {}_tp_{y\cdot a\cdot b_1\cdot b_2} - q_{y+t} \cdot {}_tp_{y\cdot a\cdot b\cdot b_1\cdot b_2} $$

(ii) 妻の死亡時に b がすでに死亡し，b_1，b_2 のいずれかが生存している確率は，

$$ {}_tp_y \cdot q_{y+t} \cdot {}_tp_a (1 - {}_tp_b)(1 - {}_tp_{b_1})\, {}_tp_{b_2} + {}_tp_y \cdot q_{y+t} \cdot {}_tp_a (1 - {}_tp_b) $$

$$ \times {}_tp_{b_1} (1 - {}_tp_{b_2}) $$

$$ = q_{y+t} \cdot {}_tp_{y\cdot a\cdot b_1} + q_{y+t} \cdot {}_tp_{y\cdot a\cdot b_2} - 2 q_{y+t} \cdot {}_tp_{y\cdot a\cdot b_1\cdot b_2} $$

$$ - (q_{y+t} \cdot {}_tp_{y\cdot a\cdot b\cdot b_1} + q_{y+t} \cdot {}_tp_{y\cdot a\cdot b\cdot b_2} - 2 q_{y+t} \cdot {}_tp_{y\cdot a\cdot b\cdot b_1 b_2}) $$

(iii) 妻の死亡時に b，b_1，b_2 が共に死亡している確率は，

$$ {}_tp_y \cdot q_{y+t} \cdot {}_tp_a (1 - {}_tp_b)(1 - {}_tp_{b_1})(1 - {}_tp_{b_2}) $$

$$ = q_{y+t} \cdot {}_tp_{ya} - (q_{y+t}\, p_{yab} + q_{y+t}\, p_{yab_1} + q_{y+t}\, p_{yab_2}) $$

$$ + (q_{y+t} \cdot {}_tp_{yabb_1} + q_{y+t} \cdot {}_tp_{yabb_2} + q_{y+t} \cdot p_{yab_1b_2}) - q_{y+t} \cdot {}_tp_{yabb_1b_2} $$

a は，(1)の場合には $\frac{1}{2}$ S，(2)(i)の場合は $\frac{1}{3}$ S，(2)(ii)の場合は $\frac{1}{2}$ S，(2)(iii)の場合は S を受け取る。

従って，(a)の受取額の期待値は

$$ \frac{1}{2} S \bar{A}^{1}_{yab} + \frac{1}{3} S \left\{ \bar{A}^{1}_{yab_1b_2} - \bar{A}^{1}_{yabb_1b_2} \right\} $$

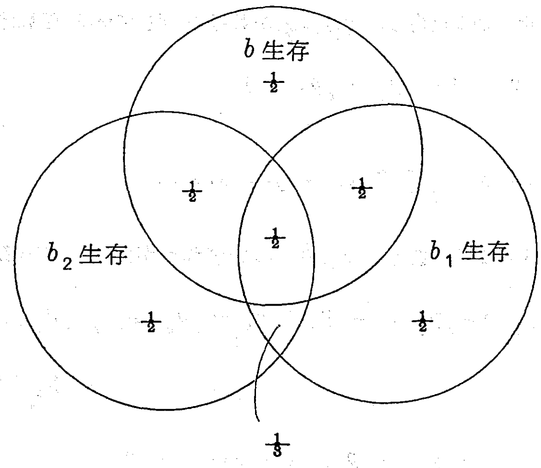
$$ + \frac{1}{2} S \left\{ (\bar{A}^{1}_{yab_1} + \bar{A}^{1}_{yab_2} - 2\bar{A}^{1}_{yab_1b_2}) - (\bar{A}^{1}_{yabb_1} + \bar{A}^{1}_{yabb_2} - 2\bar{A}^{1}_{yabb_1b_2}) \right\} $$

$$ + S \left\{ \bar{A}^{1}_{ya} - (\bar{A}^{1}_{yab} + \bar{A}^{1}_{yab_1} + \bar{A}^{1}_{yab_2}) + (\bar{A}^{1}_{yabb_1} + \bar{A}^{1}_{yabb_2} + \bar{A}^{1}_{yab_1b_2}) - \right. $$

$$ \left. - \bar{A}^{1}_{yabb_1b_2} \right\} $$

$$ = S \left\{ \bar{A}^{1}_{ya} - \frac{1}{2} (\bar{A}^{1}_{yab} + \bar{A}^{1}_{yab_1} + \bar{A}^{1}_{yab_2} - \bar{A}^{1}_{yabb_1} - \bar{A}^{1}_{yabb_2}) \right. $$

$$ \left. + \frac{1}{3} (\bar{A}^{1}_{yab_1b_2} - \bar{A}^{1}_{yabb_1b_2}) \right\} $$ である。



6. 保険金額を１として再保険料 $\mathbb{P}^{RE}$ を計算すると，

$$\mathbb{P}^{RE} = \sum_{r \geqq 4} \binom{n}{r} q^r (1-q)^{n-r} (r-3)$$

$$= \left\{ \sum_{r \geqq 0} \binom{n}{r} q^r (1-q)^{n-r} \cdot r - \sum_{3 \geqq r \geqq 0} \binom{n}{r} q^r (1-q)^{n-r} \cdot r \right\}$$

$$- 3 \left\{ \sum_{r \geqq 0} \binom{n}{r} q^r (1-q)^{n-r} - \sum_{3 \geqq r \geqq 0} \binom{n}{r} q^r (1-q)^{n-r} \right\}$$

$$= \left\{ n \cdot q - \sum_{3 \geqq r \geqq 0} \binom{n}{r} q^r (1-q)^{n-r} \cdot r \right\} - 3 \left\{ 1 - \sum_{3 \geqq r \geqq 0} \binom{n}{r} q^r (1-q)^{n-r} \right\}$$

$$= \sum_{2 \geqq r \geqq 0} \binom{n}{r} q^r (1-q)^{n-r} \cdot (3-r)$$

$$= 3(1-q)^n + 2 \times 1{,}000 \cdot q(1-q)^{n-1} + \frac{1{,}000 \times 999}{2} q^2 (1-q)^{n-2}$$

$$\fallingdotseq 3 \times \frac{50}{1{,}000} + 2{,}000 \times \frac{3}{1{,}000} \times \frac{50}{1{,}000} + \frac{1{,}000^2}{2} \times \left(\frac{3}{1{,}000}\right)^2 \times \frac{50}{1{,}000}$$

$$= 0.675$$

割増前元受保険料 $\mathbb{P}$ は $nq = 3$ であるから，割増率は

$$\mathbb{P}^{RE} / \mathbb{P} = 0.675/3 \fallingdotseq 0.225$$