昭和44年度　（問題）

午前の部

1.　養老保険の責任準備金を例に，次の問に答えよ。

a）　過去法による算式及び将来法による算式を示せ。

b）　上記両式は一致することを示せ。

2.　任意のxに対し，

$$\mu_{x:x+n} = \mu_{x+t:x+t} + \alpha$$

ならば

$$\ddot{a}^{(i)}_{x:x+n} = \ddot{a}^{(j)}_{x+t:x+t}$$

なることを証明せよ。

ここに　$j = (1+i)e^{\alpha} - 1$　とする。

3.　ある生命保険会社で，次のような25年満期の生命保険を発売しようとする。被保険者(x)の死亡に対して支払う保険金は第1年度1,000円から毎年度20円ずつ増加し，満期生存保険金は1,500円とする。純保険料は初年度純保険料に対し毎年1割ずつ第6年度まで増加し，第6年度以降は同一とする。初年度の純保険料を求めよ。

午後の部

4.　$l_x = kr^x$ なるとき，μ_x，$\mathring{e}_x$，$\bar{a}_x$　を求めよ。

5.　次の微分方程式を満足するyを求めよ。

$$y' - (\mu_x + \delta)y + 1 = 0$$

〔問〕

6. (x), (y)および(z)の３生命に対し，３人とも生存する間は，毎年末に１０,０００円を，第１死亡後は毎年末８,０００円を，第２死亡後は毎年末６,０００円を最終生存者の死亡まで給付する年金の現価を求めよ。

昭和 44 年度 （解答）

午前の部

1. a）過去法： ${}_tV_{x:\overline{n}|} = P_{x:\overline{n}|}\dfrac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} - \dfrac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}}$

将来法： ${}_tV_{x:\overline{n}|} = A_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{x:\overline{n}|}\ \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$

b）過去法 $= P_{x:\overline{n}|}\dfrac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} - \dfrac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}}$

$$= P_{x:\overline{n}|}\left\{\frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+t}} - \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}}\right\} - \left\{\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+t}} - \frac{M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+t}}\right\}$$

$$= \left\{\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+t}} - P_{x:\overline{n}|}\ \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}\right\} - \left\{\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+t}} - A_{x+t:\overline{n-t}|}\right\}$$

$= A_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{x:\overline{n}|}\ \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$ ＝ 将来法

2. $\mu_{x:y} = \mu_x + \mu_y$ であるから

$\mu_x + \mu_{x+n} = 2\mu_{x+t} + \alpha$

即ち，$-\dfrac{d}{dx}\log l_x - \dfrac{d}{dx}\log l_{x+n} = -2\dfrac{d}{dx}\log l_{x+t} + \alpha$

$$\frac{d}{dx}\log\left(\frac{l_x \cdot l_{x+n}}{l_{x+t}^2}\right) = -\alpha$$

従って，$l_x \cdot l_{x+n} = l_{x+t}^2 \cdot e^{-\alpha x + \beta}$

故に，$\ddot{a}^{(i)}_{x:x+n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} v^\nu \cdot \dfrac{l_{x+\nu} \cdot l_{x+n+\nu}}{l_x \cdot l_{x+n}}$ $\qquad (v = (1+i)^{-1})$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} v^{\nu} \cdot \frac{\ell^2_{x+t+\nu} \cdot e^{-\alpha(x+\nu)+\beta}}{\ell^2_{x+t} \cdot e^{-\alpha x+\beta}}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} v^{\nu} \cdot e^{-\alpha\nu} \frac{\ell^2_{x+t+\nu}}{\ell^2_{x+t}}$$

しかるに，$(1+i)^{-1} \cdot e^{-\alpha} = (1+j)^{-1}$ であるから

$$\ddot{a}^{(i)}_{x:x+n} = \ddot{a}^{(j)}_{x+t:x+t}$$

3.　初年度の純保険料をPで表わせば，

$$\text{保険金の期望現価} = \frac{1}{D_x}\{1{,}000(M_x - M_{x+25}) + 20(R_{x+1} - R_{x+25} - 24M_{x+25}) + 1{,}500 D_{x+25}\}$$

$$\text{保険料の期望現価} = \frac{P}{D_x}\{N_x + 0.1(S_{x+1} - S_{x+6}) - 1.5 N_{x+25}\}$$

よって

$$P = \frac{1{,}000(M_x - M_{x+25}) + 20(R_{x+1} - R_{x+25}) - 480 M_{x+25} + 1{,}500 D_{x+25}}{N_x + 0.1(S_{x+1} - S_{x+6}) - 1.5 N_{x+25}}$$

午後の部

4.　$$\mu_x = -\frac{1}{\ell_x}\frac{d\ell_x}{dx} = \frac{1}{kr^x} \cdot \frac{d}{dx}(kr^x) = -\frac{1}{kr^x} \cdot kr^x \log r = -\log r$$

$$\mathring{e}_x = \frac{1}{\ell_x}\int_0^{\infty} \ell_{x+t}\,dt = \frac{1}{kr^x}\int_0^{\infty} kr^{x+t}\,dt = \int_0^{\infty} r^t\,dt = \left.\frac{r^t}{\log r}\right]_0^{\infty} \quad (r<1)$$

$$= -\frac{1}{\log r} = \frac{1}{\mu_x}$$

$$\bar{a}_x = \frac{1}{\ell_x}\int_0^\infty v^t \ell_{x+t}\, dt = \frac{1}{kr^x}\int_0^\infty v^t\, kr^{x+t}\, dt = \left.\frac{v^t r^t}{\log vr}\right]_0^\infty \quad (v<1,\ r<1)$$

$$= \frac{-1}{\log v + \log r} = \frac{1}{\delta + \mu_x}$$

5.　一階常微分方程式　$y' + p(x)\,y + Q(x) = 0$　の一般解は

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx}\left\{ C - \int_{x_0}^{x} Q(x)\; e^{\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx}\; dx \right\}$$

で表わされる。

$$p(x) \ = \ -(\mu_x + \delta)$$

$$Q(x) \ = \ 1$$

を代入すれば

$$e^{\int_{x_0}^{x}(\mu_x+\delta)\,dx} = e^{\int_{x_0}^{x}\left(-\frac{d}{dt}\log \ell_t+\delta\right)dt} = e^{\log\frac{\ell_{x_0}}{\ell_x} - \delta(x_0-x)}$$

$$= \frac{\ell_{x_0}}{\ell_x} \times v^{x_0-x} = \frac{D_{x_0}}{D_x}$$

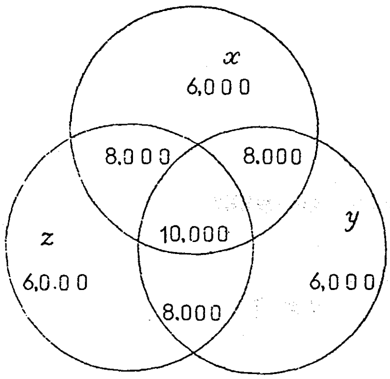
よって,

$$y = \frac{D_{x_0}}{D_x}\left\{ C - \int_{x_0}^{x} \frac{D_x}{D_{x_0}}\, dx \right\} = \frac{C'}{D_x} - \frac{1}{D_x}\int_{x_0}^{x} D_x\, dx$$

$$= \frac{C'}{D_x} + \frac{1}{D_x}\left\{ \int_x^\omega D_x\, dx - \int_{x_0}^{\omega} D_x\, dx \right\} = \bar{a}_x + \frac{C''}{D_x}$$

6.　この年金の現価は次のとおりとなる。

$$10{,}000\, a_{xyz} + 8{,}000\,(a_{x|yz} + a_{y|zx} + a_{z|xy}) + 6{,}000\,(a_{\overline{xy}|z} + a_{\overline{yz}|x} + a_{\overline{zx}|y})$$



ここに

$$a_{x|yz} = a_{yz} - a_{xyz}$$

$$a_{\overline{zx}|y} = a_y - a_{xy} - a_{yz} + a_{xyz}$$