〔問〕

昭和 43 年度　（問題）

午前の部

1. $P_{35:\overline{20|}} = 0.0420$, ${}_{20}P_{35} = 0.0299$ および $A_{55} = 0.6099$ より

$P^{\ 1}_{35:\overline{20|}}$ を求めよ。

2. $$P^{(m)}_x \doteqdot P_x + \underbrace{\frac{m-1}{2m} P^{(m)}_x \cdot d}_{(ア)} + \underbrace{\frac{m-1}{2m} P^{(m)}_x \cdot P_x}_{(イ)}$$

について，次の問に答えよ。

(1) 上式を導け。

(2) 右辺の調整項(ア), (イ)の意味することを述べよ。

3. $${}_tV_x = 1-(1-{}_1V_x)(1-{}_1V_{x+1})\cdots\cdots(1-{}_1V_{x+t-1})$$

なることを証明せよ。　ただし，保険金は期末払とする。

午後の部

4. $l_x = 100 - x$, $i = 4\%$ （$v^{10} = 0.6756$）なるとき，$A^{\ 1}_{30:\overline{30|}}$ の値を求めよ。

5. 死亡の場合にはその保険年度から満期まで毎年kづつの確定年金を支払い（年末払），生存の場合には毎年hの生存保険金を支払い（年末払），保険料は年払とする契約について，次の問に答えよ。

(1) 責任準備金の再帰公式を導け。

(2) 保険料を蓄積保険料と危険保険料で表わせ。

6. $$\int_0^\infty v^t \cdot {}_tp_x \mathring{e}_{x+t}\, dt = \frac{1}{\delta}(\mathring{e}_x - \bar{a}_x)$$ なることを示せ。

昭和43年度　（解答）

午前の部

1.　題意から

$$P_{35:\overline{20|}} = \frac{M_{35} - M_{55} + D_{55}}{N_{35} - N_{55}}$$

$$_{20}P_{35} = \frac{M_{35}}{N_{35} - N_{55}}$$

$$A_{55} = \frac{M_{55}}{D_{55}}$$

ここで

$$P^{1}_{35:\overline{20|}} = \frac{M_{35} - M_{55}}{N_{35} - N_{55}} = {}_{20}P_{35} - \frac{M_{55}}{N_{35} - N_{55}} = {}_{20}P_{35} - \frac{M_{55}}{D_{55}} \quad \frac{D_{55}}{N_{35} - N_{55}}$$

$$= {}_{20}P_{35} - A_{55}\,(\,P_{35:\overline{20|}} - P^{1}_{35:\overline{20|}}\,)$$

$$\therefore \quad P^{1}_{35:\overline{20|}} = \frac{{}_{20}P_{35} - A_{55} \cdot P_{35:\overline{20|}}}{1 - A_{55}} = \frac{.0299 - .6099 \times .0420}{.3901}$$

$$= \frac{.0299 - .0256}{.3901} = \frac{.0043}{.3901} = .0110$$

2.

(1)　$$P^{(m)}_{x} = \frac{A_x}{\ddot{a}^{(m)}_{x}} \doteqdot \frac{A_x}{\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}}$$

$$= \frac{P_x}{1 - \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{1}{\ddot{a}_x}}$$

$$= \frac{P_x}{1 - \frac{m-1}{2m}\,(P_x + d)}$$

$$\therefore\quad P_x^{(m)} \fallingdotseq P_x + \frac{m-1}{2m}\,P_x^{(m)}\,d + \frac{m-1}{2m}\,P_x^{(m)}\,P_x$$

(2) (ア) 保険料分割払における利息のロス。

$\because$ 1年の第 $t\cdot\frac{1}{m}$ 年期の利息損失は近似的に $\frac{1}{m}\,P_x^{(m)}\,\frac{t-1}{m}\,d$ であり，1年間の純利息損失は $\sum_{t=1}^{m}\frac{1}{m}\,P_x^{(m)}\,\frac{t-1}{m}\,d = \frac{m-1}{2m}\,P_x^{(m)}\,d$

(イ) 保険料分割払における死亡による保険料不払のロス。

$\because$ (ア)と同様に死亡が1年の第 $t\cdot\frac{1}{m}$ 年期におきると保険料 $\frac{m-t}{m}\,P_x^{(m)}$ が未払となる。1年間の死亡率が均等とすれば年間死亡率の $\frac{1}{m}$ にあたり，1年間の死亡による保険料の平均損失は $\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m}\frac{m-t}{m}\,P_x^{(m)} = \frac{m-1}{m}\,P_x^{(m)}$，これを保険金の増加とすれば $\frac{m-1}{2m}\,P_x^{(m)}\cdot P_x$

3. $${}_tV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x} = 1 - \left(\frac{\ddot{a}_{x+1}}{\ddot{a}_x}\right)\cdot\left(\frac{\ddot{a}_{x+2}}{\ddot{a}_{x+1}}\right)\cdots\cdots\left(\frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_{x+t-1}}\right)$$

$$= 1 - (1 - {}_1V_x)(1 - {}_1V_{x+1})\cdots\cdots(1 - {}_1V_{x+t-1})$$

午 後 の 部

4. $$A^{\ 1}_{30:\overline{30|}} = \frac{1}{\ell_{30}} \sum_{t=0}^{30-1} v^{t+1}\ d_{30+t}$$

題意より $\ell_x = 100 - x$, また, 一般に $d_x = \ell_x - \ell_{x+1}$ であるから,

$$= \frac{1}{100-30} \sum_{t=0}^{29} v^{t+1} \left\{ (100-30-t) - (100-30-t-1) \right\}$$

$$= \frac{1}{70} \sum_{t=0}^{29} v^{t+1}$$

$$= \frac{1}{70}\ \frac{v - v^{31}}{1 - v}$$

$$= \frac{1}{70}\ \frac{1 - v^{30}}{i}$$

$$= \frac{1}{70} \cdot \frac{1 - 0.6756^{3}}{0.04}$$

$$= 0.2470$$

5.

(1) $$v\, p_{x+t}\ V_{t+1} = (V_t + P) - v\, k\, \ddot{a}_{\overline{n-t|}}\ q_{x+t} - v\, h\, p_{x+t}$$

(2) $$P = \underbrace{(v\, V_{t+1} - V_t)}_{\text{蓄積保険料}} + \underbrace{\left\{ v\, q_{x+t}\, (k\, \ddot{a}_{\overline{n-t|}} - V_{t+1}) + v\, h\, p_{x+t} \right\}}_{\text{危険保険料}}$$

6. 一般に

$$\mathring{e}_{x+t} = \frac{1}{\ell_{x+t}} \int_{k=t}^{\infty} \ell_{x+k}\, dk = \frac{1}{\ell_{x+t}}\ L_{x+t}$$ である。

ここで

$$\int_0^\infty v^t\,{}_tp_x\,\mathring{e}_{x+t}\,dt = \int_0^\infty v^t\,\frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}\cdot\frac{1}{\ell_{x+t}}\,L_{x+t}\,dt = \frac{1}{\ell_x}\int_0^\infty v^t\,L_{x+t}\,dt$$

$$= \frac{1}{\ell_x}\left\{\left[\frac{v^t}{\log v}\,L_{x+t}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{v^t}{\log v}\,(-\ell_{x+t})\,dt\right\}$$

$$= \frac{1}{\ell_x}\left\{-\frac{1}{\log v}\,L_x + \int_0^\infty \frac{v^t\,\ell_{x+t}}{\log v}\,dt\right\}$$

$$= -\frac{1}{\log v}\left\{\frac{L_x}{\ell_x} - \int_0^\infty v^t\,\frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}\,dt\right\}$$

$$= \frac{1}{\delta}\left\{\mathring{e}_x - \bar{a}_x\right\}$$