昭和42年度　（問題）

午前の部

1.　$\overline{A}_x = \text{Constant}$ となるための必要かつ十分な条件を求めよ。

2.　二組の養老保険 $\{ i,\ q,\ P_{x:\overline{n}|},\ {}_tV_{x:\overline{n}|} \}$，$\{ i^*,\ q^*,\ P^*_{x:\overline{n}|},\ {}_tV^*_{x:\overline{n}|} \}$ において下式を証明せよ。

(ア)

$$
\begin{aligned}
&({}_tV_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|})(i^* - i) + (P^*_{x:\overline{n}|} - P_{x:\overline{n}|})(1+i^*) \\
&-(q^*_{x+t} - q_{x+t})(1 - {}_{t+1}V_{x:\overline{n}|}) \\
&= (1-q^*_{x+t})({}_{t+1}V^*_{x:\overline{n}|} - {}_{t+1}V_{x:\overline{n}|}) - ({}_tV^*_{x:\overline{n}|} - {}_tV_{x:\overline{n}|})(1+i^*)
\end{aligned}
$$

(イ)

$$
\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{n-1} v^* D^*_{x+t} \{ &(1-q^*_{x+t})({}_{t+1}V^*_{x:\overline{n}|} - {}_{t+1}V_{x:\overline{n}|}) \\
&- ({}_tV^*_{x:\overline{n}|} - {}_tV_{x:\overline{n}|})(1+i^*) \} = 0
\end{aligned}
$$

3.　純保険料式責任準備金についての再帰公式が，次式によって与えられる保険種類について

(ア)　年払純保険料（$P_{xy:\overline{n}|}$）を求めよ。

(イ)　保険料払込中の保険年度末責任準備金（${}_tV_{xy:\overline{n}|}$）を求めよ。

(ウ)　この保険種類の内容を説明せよ。

$$
P_{xy:\overline{n}|} + {}_tV_{xy:\overline{n}|} - v\left\{\frac{t+1}{n} q_{y+t} + p_{y+t}\, q_{x+t}\, B_{y+t+1:\overline{n-t-1}|}\right\}
$$

$$
= v\, p_{x+t,\, y+t}\ {}_{t+1}V_{xy:\overline{n}|} \qquad (t = 0,\ 1,\ 2, \cdots\cdots,\ n-1)
$$

ここに

$$
B_{y+t:\overline{n-t}|} = \frac{1}{D_{y+t}} \left\{ \frac{1}{n}(t M_{y+t} + R_{y+t} - R_{y+n} - n M_{y+n}) + D_{y+n} \right\}
$$

$$
{}_0V_{xy:\overline{n}|} = 0\ ,\quad {}_nV_{xy:\overline{n}|} = 1
$$

とし，x，y はそれぞれ (x)，(y) なる人の加入年令とする。

〔問〕

午後の部

次の4問のうち，4，5の2問または6，7の2問のいずれか一方の組を選んで解答せよ。

4. 養老保険において ${}_{t}V_{x+1:\overline{n-1}|}$ は純保険料式責任準備金，${}_{t+1}V^{\lfloor n}_{x:\overline{n}|}$ は全期チルメル式責任準備金とする。

α の値に関して ${}_{t}V_{x+1:\overline{n-1}|}$ と ${}_{t+1}V^{\lfloor n}_{x:\overline{n}|}$ の大小関係を述べよ。

5. 次の文中の〔　〕内の(1)〜(20)について，適当な算式または数値を入れよ。

$y\ (=x+n)$ 才まで生存したときは，以後毎月保険金の1％を支払い，y 才に到達するまでに死亡したときは保険金またはその年度末責任準備金のいずれか大なる方を支払う（期末払）全期払の退職年金保険について，年金支払開始時（y 才）におけるその現価は，一般に保険金額を超過する。死亡給付が保険金を超過する時期を求めようとする。

加入年令を x 才とし，年金支払開始時における年金現価を $1+k\ (k>0)$ とおけば，年払純保険料Pは次式で与えられる。

$$P=\frac{M_x-M_{x+r}+\sum_{t=r}^{y-x-1}{}_{t+1}V_x\ C_{x+t}+(1+k)D_y}{N_x-N_y}$$

ここに，r は死亡給付が保険金である期間，${}_{t+1}V_x$ は才 $t+1$ 保険年度末責任準備金，したがって〔(1)〕ははじめて保険金を超過する時期における死亡給付たる責任準備金である。

いま，才 t 保険年度末責任準備金を ${}_{t}V$ と略記することとすれば，

$({}_{t}V+P)(1+i)=$〔　　(2)　　〕$(t<r)$

$({}_{t}V+P)(1+i)=$〔　　(3)　　〕$(t\geqq r)$ ………… (a)

(a) より

$(1+i)P=$〔　　(4)　　〕

従って　$v^{t-r}\ P=$〔　　(5)　　〕

これより，$P\cdot\ddot{a}_{\overline{n-r}|}=$〔　　(6)　　〕

しかるに ${}_{n}V=1+k$ は明らかであるから

$$ {}_{r}V = \text{〔 (7) 〕} \quad \cdots\cdots (b) $$

一方，$t < r$ について，過去法による責任準備金を考えれば

$$ {}_{r}V = \frac{1}{D_{x+r}} \text{〔 (8) 〕} \quad \cdots\cdots (c) $$

従って，(b); (c)より

$$ \bar{P} = \frac{\text{〔 (9) 〕}}{\text{〔 (10) 〕}} $$

また，一方(c)より

$$ P = \text{〔 (11) 〕} + \text{〔 (12) 〕} \quad \cdots\cdots (d) $$

(b), (d) により P を消去して ${}_{r}V$ について解けば

$$ {}_{r}V = \frac{\text{〔 (13) 〕}}{\text{〔 (14) 〕}} \quad \cdots\cdots (e) $$

ところで，${}_{r}V$ は定義により，保険金を超えない最大の責任準備金であるから，r は

(e) の右辺 $\leqq$ 1

なる最大の整数である。

これより，

$$ \text{〔 (15) 〕} \leqq \ddot{a}_{\overline{n-r|}} \text{〔 (16) 〕} $$

よって $\text{〔 (17) 〕} \leqq \ddot{S}_{\overline{n-r|}} \ P_{x:\overline{r|}}$

従って $\ddot{a}_{x:\overline{r|}} \leqq \text{〔 (18) 〕} \quad \cdots\cdots (f)$

即ち，rは(f)を満足する最大の整数である。

以上により，いま $x=40$，$y=55$ としたとき，死亡給付が額面保険金を超過するのは，契約締結後〔 (19) 〕年目である。従っていま $i=4\%$ として，この場合の年払純保険料を求めるに，${}_{r}V=1$ とおいて(d)により計算すれば〔 (20) 〕となる。

ここに $\ddot{a}_{40:\overline{n|}}$ および $\ddot{S}_{\overline{n|}}$ は次のとおりとし，$\ddot{a}^{(12)}_{55} = 12.6287$ とする。

〔問〕

n	$\ddot{a}_{40:\overline{n}\mid}$	$\ddot{s}_{\overline{n}\mid}$
3	2.8745	3.2465
4	3.7520	4.4163
5	4.5915	5.6330
6	5.3942	6.8983
7	6.1615	8.2142
8	6.8943	9.5828
9	7.5938	11.0061
10	8.2611	12.4864
11	8.8972	14.0258
12	9.5032	15.6268
13	10.0800	17.2919

6.　受給者および加入者について定常状態に達した年金制度において，以後定常状態を維持するものと仮定して，受給者，加入者および将来加入者について総合保険料方式によって算定した平準保険料は，完全賦課方式による保険料といかなる関係にあるか。

7.　時点T迄に支払われる給付と，保険料の対象となる給料の累積額がそれぞれ

$$\int_0^T C(1-e^{-\alpha t})e^{\beta t}dt, \quad \int_0^T B e^{\beta t}dt$$

であらわされる年金制度における平準保険料について検討せよ。ただし，B，C，α，$\beta>0$ とし，予定利力はδとする。

昭和 42 年度　（解答）

午前の部

1.　$\overline{A}_x = C$　とおく

(1)　必要条件

一般に　$\dfrac{d\overline{A}_x}{dx} = (\mu_x + \delta)\overline{A}_x - \mu_x$　　が成立する。

上式に　$\overline{A}_x = C$　を代入すれば

$$(\mu_x + \delta)\ C - \mu_x = 0$$

ここで　$C \fallingdotseq 1$　とおける。（$C = 1$　は予定利息が零の場合となる）

故に　　$\mu_x = \dfrac{\delta C}{1 - C}$

即ち，μ_x　が一定であることが必要条件となる。

(2)　十分条件

μ_x　が一定（$\equiv \mu$）であるならば，　$\overline{A}_x = \mu\,\overline{a}_x$　となる。一方，一般に，

$\overline{A}_x = 1 - \delta\,\overline{a}_x$　であるから　$\overline{a}_x = \dfrac{1}{\mu + \delta}$　となり，$\overline{A}_x = \dfrac{\mu}{\mu + \delta}$　が得られる。

即ち，μ_x　が一定であることが十分条件となる。

2.

(ア)　$({}_tV_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|})(1+i) - q_{x+t} - (1 - q_{x+t})\,{}_{t+1}V_{x:\overline{n}|} = 0 \cdots\cdots\cdots \quad (1)$

$({}_tV^*_{x:\overline{n}|} + P^*_{x:\overline{n}|})(1+i^*) - q^*_{x+t} - (1 - q^*_{x+t})\,{}_{t+1}V^*_{x:\overline{n}|} = 0 \cdots\cdots\cdots \quad (2)$

一般に　$AB - A'B' = A(B - B') + B'(A - A')$　なる関係が成り立つが，(1) － (2)　にこの関係を導入すれば

$$({}_tV_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|})(i - i^*) + (1 + i^*)({}_tV_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|} - {}_tV^*_{x:\overline{n}|} - P^*_{x:\overline{n}|})$$

$$+ (q^*_{x+t} - q_{x+t}) + (1 - q^*_{x+t})({}_{t+1}V^*_{x:\overline{n}|} - {}_{t+1}V_{x:\overline{n}|}) + {}_{t+1}V_{x:\overline{n}|}\ (q_{x+t} - q^*_{x+t}) = 0$$

これを適宜分解，展開して

$$({}_tV_{x:\overline{n}|}+P_{x:\overline{n}|})(i-i^*)+(1+i^*)({}_tV_{x:\overline{n}|}-{}_tV^*_{x:\overline{n}|})+(1+i^*)(P_{x:\overline{n}|}-P^*_{x:\overline{n}|})$$

$$+(q^*_{x+t}-q_{x+t})(1-{}_{t+1}V_{x:\overline{n}|})+(1-q^*_{x+t})({}_{t+1}V^*_{x:\overline{n}|}-{}_{t+1}V_{x:\overline{n}|})=0$$

移項して符号をかえれば，

$$({}_tV_{x:\overline{n}|}+P_{x:\overline{n}|})(i^*-i)+(P^*_{x:\overline{n}|}-P_{x:\overline{n}|})(1+i^*)-(q^*_{x+t}-q_{x+t})(1-{}_{t+1}V_{x:\overline{n}|})$$

$$=(1-q^*_{x+t})({}_{t+1}V^*_{x:\overline{n}|}-{}_{t+1}V_{x:\overline{n}|})-({}_tV^*_{x:\overline{n}|}-{}_tV_{x:\overline{n}|})(1+i^*)$$

(イ)
$$\sum_{t=0}^{n-1}v^*D^*_{x+t}\{(1-q^*_{x+t})({}_{t+1}V^*_{x:\overline{n}|}-{}_{t+1}V_{x:\overline{n}|})-({}_tV^*_{x:\overline{n}|}-{}_tV_{x:\overline{n}|})(1+i^*)\}$$

$$=\sum_{t=0}^{n-1}\{v^*D^*_{x+t}(1-q^*_{x+t})({}_{t+1}V^*_{x:\overline{n}|}-{}_{t+1}V_{x:\overline{n}|})-D^*_{x+t}({}_tV^*_{x:\overline{n}|}-{}_tV_{x:\overline{n}|})\}$$

$$=\sum_{t=0}^{n-1}\{D^*_{x+t+1}({}_{t+1}V^*_{x:\overline{n}|}-{}_{t+1}V_{x:\overline{n}|})-D^*_{x+t}({}_tV^*_{x:\overline{n}|}-{}_tV_{x:\overline{n}|})\}$$

$$=D^*_{x+n}({}_nV^*_{x:\overline{n}|}-{}_nV_{x:\overline{n}|})-D^*_x({}_0V^*_{x:\overline{n}|}-{}_0V_{x:\overline{n}|})$$

$$=0$$

3.

(1) 与えられた再帰公式の t の代りに τ を用いて

$$v\,p_{y+\tau}=\frac{D_{y+\tau+1}}{D_{y+\tau}}\ ,\qquad v\,q_{y+\tau}=\frac{C_{y+\tau}}{D_{y+\tau}}$$

$$p_{x+\tau}=\frac{l_{x+\tau+1}}{l_{x+\tau}}\ ,\qquad q_{x+\tau}=\frac{d_{x+\tau}}{l_{x+\tau}}$$

を代入して変形すると

$$P_{xy:\overline{n}|}\,\ell_{x+\tau}\,D_{y+\tau} = \ell_{x+\tau+1}\cdot D_{y+\tau+1}\cdot{}_{\tau+1}V_{xy:\overline{n}|} - \ell_{x+\tau}\,D_{y+\tau}\cdot{}_{\tau}V_{xy:\overline{n}|}$$

$$+\frac{\tau+1}{n}\ell_{x+\tau}\,C_{y+\tau} + d_{x+\tau}\,D_{y+\tau+1}\,B_{y+\tau+1:\overline{n-\tau-1}|}$$

$\tau=0$ から $\tau=n-1$ まで，辺々相加えれば ${}_0V_{xy:\overline{n}|}=0$，${}_nV_{xy:\overline{n}|}=1$ であるから

$$P_{xy:\overline{n}|}\sum_{\tau=0}^{n-1}\ell_{x+\tau}\,D_{y+\tau} = \ell_{x+n}\,D_{y+n} + \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}(\tau+1)\,\ell_{x+\tau}\,C_{y+\tau}$$

$$+\sum_{\tau=0}^{n-1}d_{x+\tau}\,D_{y+\tau+1}\,B_{y+\tau+1:\overline{n-\tau-1}|}$$

いま，　$d_{x+\tau}=\ell_{x+\tau}-\ell_{x+\tau+1}$，$C_{y+\tau}=M_{y+\tau}-M_{y+\tau+1}$　等を使って右辺を変形すれば

$$\text{右辺} = \ell_{x+n}\,D_{y+n} + \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}(\tau+1)\ell_{x+\tau}\,M_{y+\tau} - \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}(\tau+1)\ell_{x+\tau}\,M_{y+\tau+1}$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}(\tau+1)\ell_{x+\tau}\,M_{y+\tau+1} - \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}(\tau+1)\,\ell_{x+\tau+1}\,M_{y+\tau+1}$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}(\ell_{x+\tau}-\ell_{x+\tau+1})\,R_{y+\tau+1} + (\ell_x-\ell_{x+n})(D_{y+n}-M_{y+n}-\frac{1}{n}R_{y+n})$$

$$= \ell_{x+n}\,D_{y+n} + \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}\ell_{x+\tau}\,(R_{y+\tau}-R_{y+\tau+1}) - \ell_{x+n}\,M_{y+n}$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1}(\ell_{x+\tau}-\ell_{x+\tau+1})\,R_{y+\tau+1} + (\ell_x-\ell_{x+n})(D_{y+n}-M_{y+n}-\frac{1}{n}R_{y+n})$$

$$= \ell_{x+n}\,D_{y+n} + \frac{1}{n}(\ell_x\,R_y - \ell_{x+n}\,R_{y+n}) - \ell_{x+n}\,M_{y+n}$$

$$+(\ell_x-\ell_{x+n})(D_{y+n}-M_{y+n}-\frac{1}{n}R_{y+n})$$

$$= \ell_x \left\{ \frac{1}{n} (R_y - R_{y+n} - n M_{y+n}) + D_{y+n} \right\}$$

故に

$$P_{x\ y:\overline{n}|} = \frac{\frac{1}{n}(R_y - R_{y+n} - n M_{y+n}) + D_{y+n}}{\sum_{\tau=0}^{n-1} \frac{\ell_{x+\tau}}{\ell_x} D_{y+\tau}} = \frac{\frac{1}{n}(IA)^1_{y:\overline{n}|} + {}_nE_y}{\ddot{a}_{x\ y:\overline{n}|}}$$

(2)，(1)と同様に変形して，$\tau = t$ から $\tau = n-1$ まで，辺々相加えれば

$$P_{x\ y:\overline{n}|} \sum_{\tau=t}^{n-1} \ell_{x+\tau} D_{y+\tau} + {}_tV_{x\ y:\overline{n}|} \ell_{x+t} D_{y+t}$$

$$= \ell_{x+n} D_{y+n} + \frac{1}{n} \sum_{\tau=t}^{n-1} (\tau+1) \ell_{x+\tau} C_{y+\tau} + \sum_{\tau=t}^{n-1} d_{x+\tau} D_{y+\tau+1} B_{y+\tau+1:\overline{n-\tau-1}|}$$

(1)と同様に右辺を変形すれば，

$$右辺 = \ell_{x+n} D_{y+n} + \frac{t}{n} \ell_{x+t} D_{y+t} + \frac{1}{n} \sum_{\tau=t}^{n-1} \ell_{x+\tau} (R_{y+\tau} - R_{y+\tau+1})$$

$$- \ell_{x+n} M_{y+n} + \frac{1}{n} \sum_{\tau=t}^{n-1} (\ell_{x+\tau} - \ell_{x+\tau+1}) R_{y+\tau+1}$$

$$+ (\ell_{x+t} - \ell_{x+n}) (D_{y+n} - M_{y+n} - \frac{1}{n} R_{y+n})$$

$$= \ell_{x+n} D_{y+n} + \frac{1}{n} \ell_{x+t} D_{y+t} + \frac{1}{n} (\ell_{x+t} R_{y+t} - \ell_{x+n} R_{y+n})$$

$$- \ell_{x+n} M_{y+n} + (\ell_{x+t} - \ell_{x+n})(D_{y+n} - M_{y+n} - \frac{1}{n} R_{y+n})$$

$$= \ell_{x+t} \left\{ \frac{1}{n} (t M_{y+t} + R_{y+t} - R_{y+n} - n M_{y+n}) + D_{y+n} \right\}$$

故に

$${}_tV_{x\ y:\overline{n}|} = \frac{1}{D_{y+t}} \left\{ \frac{1}{n} (t M_{y+t} + R_{y+t} - R_{y+n} - n M_{y+n}) + D_{y+n} \right\}$$

$$- P_{xy:\overline{n}|} \frac{1}{l_{x+t} \cdot D_{y+t}} \sum_{\tau=0}^{n-1} l_{x+\tau} D_{y+\tau}$$

(3) (1)の保険料の算式より，保険期間をnとする（y）についての生存保険であり，その内容は，

(a) (y)が満期まで生存したとき保険金を支払う。

(b) (y)が契約締結後，t年目に死亡したときは保険金のt/nを支払う。（契約は消滅する）

(c) (y)の生存中に(x)が死亡したときは，その後の保険料の払込を免除する。

(d) 保険料は，(x)，(y)の双方とも生存している時に限り払い込む。

である。

午後の部

4\. 題意の責任準備金 ${}_tV_{x+1:\overline{n-1}|}$ および ${}_{t+1}V^{\lfloor n}_{x:\overline{n}|}$ は，それぞれ次式で与えられる。

$${}_tV_{x+1:\overline{n-1}|} = A_{x+1+t:\overline{n-1-t}|} - P_{x+1:\overline{n-1}|} \cdot \ddot{a}_{x+1+t:\overline{n-1-t}|} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$${}_{t+1}V^{\lfloor n}_{x:\overline{n}|} = A_{x+t+1:\overline{n-t-1}|} - \left(P_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\right) \ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

ただし，$0 \leqq t \leqq n-1$ とし，$A_{x:\overline{0}|} = 1$，$\ddot{a}_{x:\overline{0}|} = 0$ と約束する。

① − ② を作れば

$${}_tV_{x+1:\overline{n-1}|} - {}_{t+1}V^{\lfloor n}_{x:\overline{n}|} = \left(P_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - P_{x+1:\overline{n-1}|}\right) \ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|} \quad \cdots\cdots ③$$

ここで $\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|} \geqq 0$ であるから

$$P_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - P_{x+1:\overline{n-1}|} \gtreqless 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

に従って ${}_tV_{x+1:\overline{n-1}|} \gtreqless {}_{t+1}V^{\lfloor n}_{x:\overline{n}|}$ （複号同順） となる。

④式を変形すれば

$$\alpha \gtreqless P_{x+1:\overline{n-1}|}\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - A_{x:\overline{n}|}$$

$$= \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}} - 1$$

$$= \frac{1}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}} - (1 - v\,p_x)$$

$$= P_{x+1:\overline{n-1}|} - P^{\ 1}_{x:\overline{1}|}$$

よって　$\alpha \gtreqless P_{x+1:\overline{n-1}|} - P^{\ 1}_{x:\overline{1}|}$

に従って

$${}_{t}V_{x+1:\overline{n-1}|} \gtreqless {}_{t+1}V^{\lfloor n}_{x:\overline{n}|} \qquad \text{（複号同順）}$$

である。

5.

(1)　${}_{r+1}V_x$

(2)　$q_{x+t} + p_{x+t} \cdot {}_{t+1}V$

(3)　${}_{t+1}V$

(4)　${}_{t+1}V - (1+i)\ {}_{t}V$

(5)　$v^{t-r+1} \cdot {}_{t+1}V - v^{t-r} \cdot {}_{t}V$

(6)　$v^{n-r} \cdot {}_{n}V - {}_{r}V$

(7)　$(1+k)\,v^{n-r} - P\ \ddot{a}_{\overline{n-r}|}$

(8)　$P(N_x - N_{x+r}) - (M_x - M_{x+r})$

(9) $M_x - M_{x+r} + (1+k)\, v^{n-r} \cdot D_{x+r}$

(10) $N_x - N_{x+r} + \ddot{a}_{\overline{n-r}|} \cdot D_{x+r}$

(11) $P^{\,1}_{x:\overline{r}|}$

(12) ${}_r V\, P_{x:\overset{1}{\overline{r}|}}$

(13) $(1+k)\, v^{n-r} - P^{\,1}_{x:\overline{r}|}\ \ddot{a}_{\overline{n-r}|}$

(14) $1 + P_{x:\overset{1}{\overline{r}|}}\ \ddot{a}_{\overline{n-r}|}$

(15) $(1+k)\, v^{n-r} - 1$

(16) $P^{\,1}_{x:\overline{r}|} + P_{x:\overset{1}{\overline{r}|}}$ (or $P_{x:\overline{r}|}$)

(17) $1 + k - v^{r-n}$

(18) $\ddot{S}_{\overline{n-r}|} / k$

(19) 11

(20) 0.08259

6. 問題の本質を損わない範囲内で単純化して考える。

加入年齢 x_0

退職年齢 x_r

最終年齢 ω

x 才の加入者数 ℓ_x $x_0 \leqq x \leqq x_r - 1$

x 才の受給者数 ℓ_x $x_r \leqq x \leqq \omega$ 年金額は1とする。

年金資産 F

平準保険料 C

給付額 B （完全賦課方式による保険料）

$$C = \frac{\sum_{x_0}^{x_r-1} \ell_x \cdot {}_{x_r-x|}\ddot{a}_x + \sum_{x_r}^{\omega} \ell_x \ddot{a}_x + \ell_{x_0} \cdot {}_{x_r-x_0|}\ddot{a}_{x_0} \,(v+v^2+\cdots\cdots) - F \sum_{x_0}^{x_r-1} \ell_x}{\sum_{x_0}^{x_r-1} \ell_x \,\ddot{a}_{x:\overline{x_r-x}|} + \ell_{x_0} \cdot \ddot{a}_{x_0:\overline{x_r-x_0}|}\,(v+v^2+\cdots\cdots)}$$

これに $\displaystyle\sum_{x_0}^{x_r-1} \ell_x \; {}_{x_r-x|}\ddot{a}_x = \frac{v}{d} \{ \ell_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} - \ell_{x_0} \; {}_{x_r-x_0|}\ddot{a}_{x_0} \}$

$$\sum_{x_r}^{\omega} \ell_x \, \ddot{a}_x = \frac{1}{d} \{ \sum_{x_r}^{\omega} \ell_x - v \cdot \ell_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} \}$$

$$\sum_{x_0}^{x_r-1} \ell_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{x_r-x}|} = \frac{1}{d} \{ \sum_{x_0}^{x_r-1} \ell_{x_r} - v \ell_{x_0} \; \ddot{a}_{x_0:\overline{x_r-x_0}|} \}$$

を代入して整頓すれば，$B = \displaystyle\sum_{x_r}^{\omega} \ell_x$ を考慮して，

$$C = B - dF$$

7. $$I_1(T) = \int_0^T C\,(1-e^{-\alpha t})\, e^{\beta t} \cdot e^{-\delta t}\, dt\,, \quad I_2(T) = \int_0^T B e^{\beta t} \cdot e^{-\delta t}\, dt$$

とおくことにすれば

$$I_1(T) = \frac{C}{\beta-\delta}\left(e^{(\beta-\delta)T} - 1 \right) - \frac{C}{\beta-\delta-\alpha}\left(e^{(-\alpha+\beta-\delta)T} - 1 \right) \qquad \beta \neq \delta,\ \beta \neq \delta+\alpha$$

$$= CT + \frac{1}{\alpha}\left(e^{-\alpha T} - 1 \right) \qquad \beta = \delta$$

$$= \frac{C}{\alpha}\left(e^{\alpha T} - 1 \right) - CT \qquad \beta = \delta + \alpha$$

$$I_2(T) = \frac{B}{\beta-\delta}\left(e^{(\beta-\delta)T} - 1 \right) \qquad \beta \neq \delta$$

$$= BT \qquad \beta = \delta$$

(1)　$\beta < \delta$　の場合

$$P = \frac{\lim_{T\to\infty} I_1(T)}{\lim_{T\to\infty} I_2(T)} = \frac{C\alpha}{B(\alpha-\beta+\delta)}$$

(2)　$\beta \geqq \delta$　の場合

$$\lim_{T\to\infty} I_1(T) = \infty \quad , \quad \lim_{T\to\infty} I_2(T) = \infty$$

となるので通常の意味での平準掛金率は求まらない。

但し，Pを次のように定義したとすると

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{I_1(T)}{I_2(T)} = \frac{C}{B} \qquad (\delta=\beta,\ \delta>\beta\ \ いづれの場合にも求まる)$$

ところが　$P=\frac{C}{B}$ とすると，Tなる瞬間における給付と掛金は夫々

$$C\left(1-e^{-\alpha T}\right)e^{\beta T}\,dt \quad , \quad Ce^{\beta T}\,dt$$

となり，掛金が常に給付を上回っていることになる。しかしながら

$$P = \frac{C}{B} - \varepsilon$$

とおくと，Tが十分に大きくなれば

$$I_1(T) > \left(\frac{C}{B} - \varepsilon\right) I_2(T)$$

となり，矢張り掛金として適当でない。

従って，この場合適当な平準掛金率はあり得ないことになる。