〔問〕

昭和41年度　（問題）

午前の部

1. 任意に選んだ男女計100名に数学の試験を行ない，男女別に得点の平均値を計算し，その差をもって男女の学力差としたい。信頼度αの場合の信頼区間の幅を求め，その値を最小にする男女別の人数を求めよ。ただし，男子と女子の得点は，それぞれ分散4，9の正規分布に従っているものとする。

2. 確率密度関数が次式であたえられる母集団がある。

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\ \beta^{\alpha}}\ x^{\alpha-1}\ e^{-\frac{x}{\beta}} \qquad (x>0)$$
$$= 0 \qquad (x \leqq 0)$$

ただし$\alpha>0$とする。このとき次の問に答えよ。

(i) 母平均mおよび母分散σ^2を求む。

(ii) αを既知として，βの最尤推定量を求む。

(iii) βの最尤推定量について，一致性，有効性および充足性が成立つことを示せ。

午後の部

3. 連続な分布の無限母集団からN個の標本 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_N$ を抽出し，大きさの順に並べ

$$x_{(1)} < x_{(2)} < \cdots\cdots < x_{(N)}$$

とする。同じ母集団から，さらにr個の標本を追加して抽出したとき，その中で $x_{(N)}$を超えるものが現われる確率を求む。

4. <u>次の(1)および(2)の2問のうち，いずれか1問に答えよ。</u>

(1) 零和2人ゲームにおいて，プレイヤーA，Bはそれぞれn個，m個の戦略をもち，その混合戦略を$(x) = (x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$，$(y) = (y_1, y_2, \cdots\cdots, y_m)$とすす。ここで，$x_i, y_j \geqq 0$，$(i=1, 2, \cdots, n\ ;\ j=1, 2, \cdots, m)$でかつ

$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ \sum_{j=1}^{m} y_j = 1$ とする。このとき，一組の戦略（x'），（y'）があたえられたとき，すべての(y)に対して

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, x_i'\, y_j' \leqq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, x_i'\, y_j$$

でかつ，すべての(x)に対して

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, x_i'\, y_j' \geqq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, x_i\, y_j'$$

ならば，（x'），（y'）はゲームの解（最適戦略）であることを証明せよ。

(2) 駐車できる車の台数が１０台である駐車場を設計したいと思う。駐車しようとする車は，平均0.9 台/時間 のポアッソン分布に従って到着し，また駐車した車の駐車時間は平均値１時間の指数分布に従うものとする。

この駐車場には平均何台の車が駐車すると見込まれるか。ただし，駐車場が満車のときに到着した車は，待つことなく他の駐車場に向って立ち去るものとする。

昭和41年度　（解答）

午前の部

1.　男女の得点の分布は $N(\mu_1, 4)$，$N(\mu_2, 9)$ である。

男子 n_1 人，女子 n_2 人をとり，その得点の平均値を $\bar{x}$，$\bar{y}$ とすれば，$\bar{x}$，$\bar{y}$ の分布は，

$N(\mu_1, \frac{4}{n_1})$，$N(\mu_2, \frac{9}{n_2})$ となる。

したがって，得点の差 $(\bar{x}-\bar{y})$ の分布は，$N\left(\mu_1-\mu_2, \frac{4}{n_1}+\frac{9}{n_2}\right)$ となる。

信頼度 α の信頼区間は，

$$P_r\left\{\frac{|\bar{x}-\bar{y}-(\mu_1-\mu_2)|}{\sqrt{\frac{4}{n_1}+\frac{9}{n_2}}} < \varepsilon(\alpha)\right\} = \alpha \text{ なる } \varepsilon(\alpha) \text{ を}$$

求むれば，$\left(\mu_1-\mu_2-\varepsilon(\alpha)\sqrt{\frac{4}{n_1}+\frac{9}{n_2}},\ \mu_1-\mu_2+\varepsilon(\alpha)\sqrt{\frac{4}{n_1}+\frac{9}{n_2}}\right)$

であり，その巾は，$2\varepsilon(\alpha)\sqrt{\frac{4}{n_1}+\frac{9}{n_2}}$ である。

$\varepsilon(\alpha)$ は，n_1，n_2 に無関係に定まる値であるから，$n_1+n_2=100$ という条件で，

$\frac{4}{n_1}+\frac{9}{n_2}$ を最少にする n_1，n_2 を求むれば，信頼区間を最小にする男女の人数が求まる。

よって　$n_1=40$ 人，　$n_2=60$ 人である。

2.

(i)　$$m = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-\frac{x}{\beta}}dx = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x}dx$$

$$= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\left\{\left[-x^{\alpha}e^{-x}\right]_0^{\infty} + \alpha\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx\right\} = \alpha\beta$$

$$E(X^2) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\int_0^{\infty} x^{\alpha+1} e^{-\frac{x}{\beta}}dx = \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} x^{\alpha+1}e^{-x}dx$$

$$= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \left[-x^{\alpha+1} \; e^{-x} \right]_0^{\infty} + (\alpha+1) \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx \right\} = \frac{\beta^2(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} \; \Gamma(\alpha+1)$$

$$= \alpha \, (\alpha+1) \, \beta^2$$

故に　$\sigma^2 = \mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - \left\{ \mathrm{E(X)} \right\}^2 = \alpha\,(\alpha+1)\,\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = \alpha\beta^2$

(ii) パラメータβを考慮して，$f(x)$ を $f(x\,;\,\beta)$と書くことにする。

尤度は

$$\prod_i f(x_i\,;\,\beta) = \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}}\right)^n \left(\prod_i x_i\right)^{\alpha-1} e^{-\sum_i x_i/\beta}$$

となるので，

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{ \log \prod_i f(x\,;\,\beta) \right\} = \frac{\partial}{\partial\beta}\left\{ -n \log\Gamma(\alpha) - n\,\alpha\log\beta + (\alpha-1)\sum_i \log x_i - \frac{1}{\beta}\Sigma x_i \right\}$$

$$= -\frac{\alpha n}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}\sum_i x_i = 0$$

となるβを $\hat{\beta}$ と書けば，

$$\hat{\beta} = \frac{\Sigma x_i}{\alpha n} = \frac{\bar{x}}{\alpha}$$

故に最尤推定量は　$\overline{\mathrm{X}}/\alpha$

(iii) <u>一致性</u>　　$\overline{\mathrm{X}}/\alpha$ がβに確率収束することを示せばよい。

$$\mathrm{E}(\overline{\mathrm{X}}/\alpha) = \beta, \qquad \mathrm{Var}\,(\overline{\mathrm{X}}/\alpha) = \frac{\beta^2}{n\alpha}$$

であるので，チエビシエフの不等式は

$$\mathrm{P}\left\{ \left| \frac{\overline{\mathrm{X}}}{\alpha} - \beta \right| \geqq a \right\} \leqq \frac{1}{a^2} \; \frac{\beta^2}{n\alpha}$$

となり，$n\to\infty$のとき右辺は零に収束することから確率収束が示された。

有効性　クラーメル・ラオの不等式より

$$\mathrm{Var.}\left(\overline{X}/\alpha\right)=\frac{1}{n\,E\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\log f(x;\beta)\right)^2\right\}}$$

を示せばよい。

$$n\,E\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\log f(x;\beta)\right)^2\right\}=n\,E\left\{\left(-\frac{\alpha}{\beta}+\frac{X}{\beta^2}\right)^2\right\}=\frac{n}{\beta^4}\,E\left\{(X-\alpha\beta)^2\right\}$$

$$=\frac{n}{\beta^4}\ \mathrm{Var.}(X)=\frac{\alpha n}{\beta^2}=1/\mathrm{Var.}(\overline{X}/\alpha)$$

充足性　次のように書けることから明らかである。

$$\prod_i f(x_i;\beta)=\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^2}\right)^n e^{-\frac{n\overline{x}}{\beta}}\cdot\left(\prod_i x_i\right)^{\alpha-1}=g(\overline{x},\beta)\cdot h(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

ここに　$g(\overline{x},\beta)=\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\right)^n e^{-\frac{n\overline{x}}{\beta}}$

$$h(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\left(\prod_i x_i\right)^{\alpha-1}$$

午後の部

3.　r個の標本を s ＋ t ＝ r とし，区間〔$-\infty$, $x_{(N)}$〕,〔$x_{(N)}$, $+\infty$〕にそれぞれ s 個，t 個に分配されて入る確率 P(t) を求める。多項分布と同様な考えにより，

$$P(t)=\frac{N!}{(N-1)!\,0!}\cdot\frac{r!}{s!\,t!}\div\frac{(N+r)!}{(N+s-1)!\,t!}=N\cdot\frac{r!\,(N+r-t-1)!}{(r-t)!\,(N+r)!}$$

求める確率は　$\sum_{t=1}^{r}P(t)=1-P(0)$　だから

$$1-P(0)=1-\frac{N}{N+r}=\frac{r}{N+r}$$

〔別　解〕

(1)　N個，r個のいずれも同一の分布からの標本だから，これは次の様なモデルに等しい。

いまN個の白球とr個の黒球をよくまぜて左から一列に並べる。このとき，白球の最右端の右側に黒球が並べられる確率が所要の確率に等しい。

$(N+r)$個の球からr個を選んで黒球にする方法は$\binom{N+r}{r}$通り，$(N+r-1)$個の球からr個を選んで黒球にする方法は$\binom{N+r-1}{r}$通り。

したがって，最右端の白球より右に黒球が並ばない確率は

$$P(0)=\binom{N+r-1}{r}\Big/\binom{N+r}{r}=\frac{N}{N+r}$$

故に求める確率は

$$1-P(0)=\frac{r}{N+r}$$

(2)　母集団の分布関数を $F(x)$ とする。連続であることから密度関数 $f(x)$ が存在して，（殆ど到るところで）

$$f(x)=F'(x)$$

となる。

さてN個の標本の最大値の分布関数を $G(x)$ とすると容易に

$$G(x)=\int_{-\infty}^{x} N\left\{F(x)\right\}^{N-1} f(x)\ dx$$

となることが判り，従ってその密度関数を $g(x)$ とすると（殆ど到るところで）

$$g(x)=N\left\{F(x)\right\}^{N-1} f(x)$$

である。

次にr個の標本 $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_r$ を追加して抽出するとき，その値がすべてxより小さいか又は等しくなる確率は

$$\prod_{j=1}^{r} P(y_j \leqq x)=\left\{F(x)\right\}^{r}$$

以上のことから求める確率は

$$1-\int_{-\infty}^{\infty}\{F(x)\}^{r}\,g(x)\,dx$$

$$=1-N\int_{-\infty}^{\infty}\{F(x)\}^{N+r-1}f(x)\,dx$$

$$=1-N\left[\frac{\{F(x)\}^{N+r}}{N+r}\right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$=1-\frac{N}{N+r}$$

$$=\frac{r}{N+r}$$

である。

4. (1) 題意により，すべての混合戦略 (y) に対し

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_i'y_j' \leqq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_i'y_j \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

及びすべての(x)に対し

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_i'y_j' \geqq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_iy_j' \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

が成り立つという仮定のもとに，すべての (x)，(y) に対し

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_i'y_j'=\min_{(y)}\max_{(x)}\sum_i\sum_j a_{ij}x_iy_j=\max_{(x)}\min_{(y)}\sum_i\sum_j a_{ij}x_iy_j \cdots (3)$$

となることを証明すればよい。

いま簡単のために

$$f(x,y)=\sum_i\sum_j a_{ij}x_iy_j$$

とおく。

すると，(1)より

$$f(x', y') \leqq \min_{(y)} f(x' \quad y)$$

同様に (2)より

$$f(x', y') \geqq \max_{(x)} f(x, y')$$

故に

$$\max_{(x)} f(x, y') \leqq f(x', y') \leqq \min_{(y)} f(x', y) \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

しかるに 明らかに

$$\min_{(y)} \max_{(x)} f(x, y) \leqq \max_{(x)} f(x, y')$$

であり，

$$\max_{(x)} \min_{(y)} f(x, y) \geqq \min_{(y)} f(x', y)$$

であるので，(4)より

$$\min_{(y)} \max_{(x)} f(x, y) \leqq f(x', y') \leqq \max_{(x)} \min_{(y)} f(x, y) \cdots\cdots \quad (5)$$

ところが一般に， すべての (x) に対し

$$f(x, y) \geqq \min_{(y)} f(x, y)$$

であることから， すべての (y) に対し

$$\max_{(x)} f(x, y) \geqq \max_{(x)} \min_{(y)} f(x, y)$$

従って，

$$\min_{(y)} \max_{(x)} f(x, y) \geqq \max_{(x)} \min_{(y)} f(x, y)$$

これを式 (5) と併せれば，

$$f(x', y') = \min_{(y)} \max_{(x)} f(x, y) = \max_{(x)} \min_{(y)} f(x, y)$$

となる。

これは証明しようとする式(3)に他ならない。

(2) 時点tにおいてn台駐車している確率を$P_n(t)$，平均到着台数をλ 台／時間，平均駐車時間を$1/\mu$時間とすると，題意により

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)(1-\lambda\Delta t)+P_1(t)\mu\Delta t+0(\Delta t)$$

$$P_n(t+\Delta t)=P_{n-1}(t)\lambda\Delta t+P_n(t)(1-\lambda\Delta t-n\mu\Delta t)+P_{n+1}(t)(n+1)\mu\Delta t+0(\Delta t)$$

$$P_{10}(t+\Delta t)=P_9(t)\lambda\Delta t+P_{10}(t)(1-10\mu\Delta t)+0(\Delta t)$$

このことから，$\Delta t\to 0$とすれば

$$P_0'(t)=-\lambda P_0(t)+\mu P_1(t)$$

$$P_n'(t)=\lambda P_{n-1}(t)-(\lambda+n\mu)P_n(t)+(n+1)\mu P_{n+1}(t) \qquad (1\leqq n\leqq 9)$$

$$P_{10}'(t)=\lambda P_9(t)-10\mu P_{10}(t)$$

平均駐車台数の推定に当たっては，定常状態を仮定するものとする。このとき$P_n(t)$はtに関係しないP_nとなると考えてよいから，$P_n'(t)=0 \quad (0\leqq n\leqq 10)$

このことから

$$-\lambda P_0+\mu P_1=0, \tag{1}$$

$$\lambda P_{n-1}-(\lambda+n\mu)P_n+(n+1)\mu P_{n+1}=0 \qquad (1\leqq n\leqq 9) \tag{2}$$

$$\lambda P_9-10\mu P_{10}=0 \tag{3}$$

式(1)より

$$P_1=\frac{\lambda}{\mu}P_0$$

式(2)において $n=1$ とおくことにより

$$P_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$$

以下同様にして

$$P_n=\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \qquad (1\leqq n\leqq 9)$$

式(3)より

$$P_{10} = \frac{\lambda}{10\mu} P_9 = \frac{1}{9!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^9 \frac{\lambda}{10\mu} P_0 = \frac{1}{10!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{10} P_0$$

しかるに

$$\sum_{k=0}^{10} P_k = 1$$

であることから

$$\sum_{0}^{10} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = 1$$

$$\therefore \quad P_0 = 1 \Big/ \sum_{0}^{10} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

故に求める平均駐車台数Mは

$$M = \sum_{0}^{10} n P_n = P_0 \sum_{1}^{10} \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$= P_0 \frac{\lambda}{\mu} \sum_{0}^{9} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{\frac{\lambda}{\mu} \sum_{0}^{9} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{\sum_{0}^{10} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} = \frac{\lambda}{\mu} \left\{ 1 - \frac{\frac{1}{10!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{10}}{\sum_{0}^{10} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} \right\}$$

題意により　$\lambda = 0.9$，$\mu = 1$　であったから

$$M = \frac{9}{10} \left\{ 1 - \frac{\frac{1}{10!}\left(\frac{9}{10}\right)^{10}}{\sum_{n=0}^{10} \frac{1}{n!}\left(\frac{9}{10}\right)^n} \right\}$$