〔問〕

# 昭和 41 年度　（問題）

## 午 前 の 部

1.　$\bar{a}_x = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t|}}\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt$ を証明し，また，この式を言葉で説明せよ。

2.　1年目は 1,　2年目は 2,……，$n$ 年目は $n$ の金額を年 $m$ 回分割払にするときの生命年金現価を $(I\ddot{a})^{(m)}_{x:\overline{n|}}$ とすれば，

$$(I\ddot{a})^{(m)}_{x:\overline{n|}} \doteqdot (I\ddot{a})_{x:\overline{n|}} - \frac{m-1}{2m}\left\{\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - n\cdot {}_nE_x\right\}$$

になることを示せ。

3.　ある金額を $n$ 年間で返済する際に元金の利息を利率 $i'$ で支払い，別に均等割賦金を利率 $i$（ただし，$i < i'$）で積立利殖して $n$ 年後に元金に到達させて返済するものとする。払込総実利回り $i^*$ と $i$，$i'$ との大小関係を式で示せ。また，$i$ が $i'$ に近づくと $i^*$ はどのように変るか。ただし，毎年の払込は期末払とする。

## 午 後 の 部

次の 6 問のうち 4, 5, 6 の 3 問または 7, 8, 9 の 3 問のどちらかの組をえらんで解答せよ。

4.　次式を証明し左辺の式の意味を説明せよ。

$$\frac{1}{N_x - N_{x+n}} \sum_{t=1}^{n} \frac{\ddot{a}_{\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{\overline{n|}}} C_{x+t-1} = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} - \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n|}}}$$

5.　被保険者が死亡したとき死亡保険金 1 と期末責任準備金の合計を期末に支払い，満期まで生存した場合は満期保険金 1 を支払う保険契約の年払純保険料を求めよ。

6.　$P_{x:\overline{n|}} = 0.01697$　　$P_x = 0.00984$　　${}_nP_x = 0.01106$

のとき，予定利率 $i$ を求めよ。

〔問〕

7. (1) de Moivreの死亡法則を仮定して次の式が成り立つことを示せ。

$$a_x = \frac{n-(1+i)\,a_{\overline{n|}}}{n\,i}$$

ここに，$n=\omega-x$

(2) 死力が$x$歳と$x+n$歳の間で定数$\mu$であると仮定して次の式が成り立つことを示せ。

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \frac{1-v^n\;{}_np_x}{\mu+\delta}$$

8. 過去勤務期間$\tau$年，将来勤務期間t年なる脱退者に対する給付を，(1) $\alpha_{\tau+t}+\beta_t$，(2) $\alpha_t+\beta_{\tau+t}$，(3) $\alpha_t+\beta_t$ とする三つの年金制度を設計したところ，加入年齢方式による過去勤務債務はそれぞれ (1) $U_1$，(2) $U_2$，(3) $U_3$ となった。給付を $\alpha_{\tau+t}+\beta_{\tau+t}$ とした場合の過去勤務債務を求めよ。

9. 定年退職者のみに年金を支給する定額制の年金制度において，標準加入者の加入年齢方式による全期平準払純保険料の積立終価は，積立段階のどの時点をとっても，そのときの責任準備金を常に下回ることを示せ。但し，標準加入者とは保険料を算定する基礎となった加入年齢（特定年齢）で加入したものをいう。

## 昭和41年度　（解答）

### 午前の部

1.
$$\overline{a}_{\overline{t|}} = \frac{1-e^{-\delta t}}{\delta} \text{ であるから } \frac{d\,\overline{a}_{\overline{t|}}}{dt} = e^{-\delta t} = v^{t}$$

また，

$$ {}_tp_x\,\mu_{x+t} = -\frac{1}{\ell_x}\,\frac{d\,\ell_{x+t}}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{-\frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}\right\} = \frac{d}{dt}\left\{-\,{}_tp_x\right\}$$

したがって，

$$\int_0^\infty \overline{a}_{\overline{t|}}\ {}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt = -\frac{1}{\ell_x}\left[\overline{a}_{\overline{t|}}\,\ell_{x+t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty v^t\,{}_tp_x\,dt$$

$$= 0 + \overline{a}_x = \overline{a}_x$$

また，$\int_0^\infty \overline{a}_{\overline{t|}}\ {}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt$ は t 年後に死亡する人にはそれまでの t 年間年金を支払うようなものの総計を表わしている。したがってそれは $\overline{a}_x$ に他ならない。

2.
$$(I\ddot{a})^{(m)}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1}\frac{t+1}{mD_x}\left\{D_{x+t} + D_{x+t+\frac{1}{m}} + D_{x+t+\frac{2}{m}} + \cdots + D_{x+t+1-\frac{1}{m}}\right\}$$

ここで

$$D_{x+t+\frac{1}{m}} \fallingdotseq D_{x+t} - \frac{1}{m}\left(D_{x+t} - D_{x+t+1}\right)$$

$$D_{x+t+\frac{2}{m}} \fallingdotseq D_{x+t} - \frac{2}{m}\left(D_{x+t} - D_{x+t+1}\right)$$

………………………………………………

$$D_{x+t+\frac{m-1}{m}} \fallingdotseq D_{x+t} - \frac{m-1}{m}\left(D_{x+t} - D_{x+t+1}\right)$$

であるから

$$D_{x+t} + D_{x+t+\frac{1}{m}} + D_{x+t+\frac{2}{m}} + \cdots + D_{x+t+1-\frac{1}{m}}$$

$$= m\,D_{x+t} - \frac{1+2+\cdots+(m-1)}{m}\left(D_{x+t} - D_{x+t-1}\right)$$

$$= m\,D_{x+t} - \frac{m-1}{2}\left(D_{x+t} - D_{x+t+1}\right)$$

したがって,

$$(I\ddot{a})^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{t+1}{D_x}\left\{D_{x+t} - \frac{m-1}{2m}\left(D_{x+t} - D_{x+t+1}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{D_x}\sum_{t=0}^{n-1}(t+1)\,D_{x+t} - \frac{m-1}{2m}\,\frac{1}{D_x}\sum_{t=0}^{n-1}(t+1)\left(D_{x+t} - D_{x+t+1}\right)$$

$$= (I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}\,\frac{1}{D_x}\left\{D_x + D_{x+1} + \cdots + D_{x+n-1} - n\,D_{x+n}\right\}$$

$$= (I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}\left\{\ddot{a}_x - n\cdot {}_nE_x\right\}$$

3. 利率 $i$ による $n$ 年年金終価と現価を夫々

$$\left.\begin{array}{llll} \text{利率 } i & & S_{\overline{n}|}, & a_{\overline{n}|} \\ 〃\ i' & 〃\quad 〃 & S'_{\overline{n}|} & a'_{\overline{n}|} \\ 〃\ i^{*} & 〃\quad 〃 & S^{*}_{\overline{n}|} & a^{*}_{\overline{n}|} \end{array}\right\}\ \text{とすると}$$

毎年の均等割賦金は $\dfrac{1}{S_{\overline{n}|}}$

毎年の払込総額 $\dfrac{1}{a^{*}_{\overline{n}|}} = i' + \dfrac{1}{S_{\overline{n}|}}$

$$= \frac{1}{a'_{\overline{n}|}} - \frac{1}{S'_{\overline{n}|}} + \frac{1}{S_{\overline{n}|}}$$

$i < i'$ より $\quad S_{\overline{n}|} < S'_{\overline{n}|}$

$$\therefore \frac{1}{a^{*}_{\overline{n}|}} - \frac{1}{a'_{\overline{n}|}} = \frac{1}{S_{\overline{n}|}} - \frac{1}{S'_{\overline{n}|}} > 0$$

$$\therefore \quad a'_{\overline{n}|} > a^{*}_{\overline{n}|}$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{i < i' < i^{*}}}$$

又割引利率 $i_1$, $i_2$ なる際の毎年の払込実額を夫々 $\dfrac{1}{{}_1a^{*}_{\overline{n}|}}$ , $\dfrac{1}{{}_2a^{*}_{\overline{n}|}}$ とすると

$$\frac{1}{{}_1a^{*}_{\overline{n}|}} = \frac{1}{S_{\overline{n}|(i_1)}} + i'$$

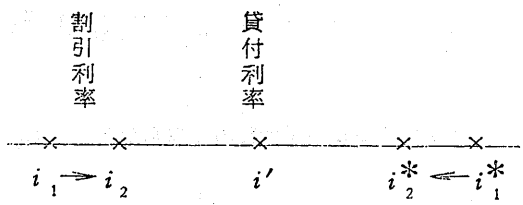
$$\frac{1}{{}_2a^{*}_{\overline{n}|}} = \frac{1}{S_{\overline{n}|(i_2)}} + i'$$

今， $i_1 < i_2 < i'$ とすると

$$\frac{1}{{}_1a^{*}_{\overline{n}|}} > \frac{1}{{}_2a^{*}_{\overline{n}|}}$$

$${}_2a^{*}_{\overline{n}|} > {}_1a^{*}_{\overline{n}|}$$

$$i^{*}_2 < i^{*}_1$$




即ち割引利率 $i$ が貸付利率 $i'$ に近づけば，実払込利回り $i^{*}$ は減少しながら $i'$ に近づく。

## 午後の部

4. $$\frac{1}{N_x - N_{x+n}} \sum_{t=1}^{n} \frac{\ddot{a}_{\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} C_{x+t-1}$$

$$= \frac{1}{N_x - N_{x+n}} \sum_{t=1}^{n} \frac{1-v^{n-t}}{1-v^{n}} C_{x+t-1}$$

$$= \frac{1}{N_x - N_{x+n}} \; \frac{M_x - M_{x+n} - \sum_{t=1}^{n} v^{n-t} \, v^{x+t} \quad d_{x+t-1}}{1 - v^{n}}$$

$$= \frac{1}{N_x - N_{x+n}} \quad \frac{M_x - M_{x+n} - v^n \cdot D_x + D_{x+n}}{1 - v^n}$$

$$= \frac{1}{N_x - N_{x+n}} \quad \frac{(1-v^n) D_x - D_x + M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{1 - v^n}$$

$$( M_x = v N_x - N_{x+1} = D_x - d \cdot N_x )$$

$$= \frac{D_x}{N_x - N_{x+n}} - \frac{d ( N_x - N_{x+n} )}{( N_x - N_{x+n} )( 1 - v^n )}$$

$$= \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} - \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n|}}}$$

左辺はｔ年度の死亡に対して$\dfrac{\ddot{a}_{\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{\overline{n|}}}$を期末に支払う逓減定期保険の年払平準純保険料である。

さらに $\dfrac{\ddot{a}_{\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{\overline{n|}}}$ は貸付金１を貸付期間$n$で毎年割賦返済した場合のｔ年後の貸付残額を意味している。

5.　保険期間を$n$，加入年齢$x$，ｔ年目の責任準備金を ${}_tV'_{x:\overline{n|}}$ とする。ｔ年目の死亡に対してその年度末に支払われる死亡保険金は $1 + {}_tV'_{x:\overline{n|}}$ である。

ファクラーの公式により，

$${}_{t+1}V'_{x:\overline{n|}} = ( {}_tV'_{x:\overline{n|}} + P )( 1 + i ) - q_{x+t}$$

$$v \cdot {}_{t+1}V'_{x:\overline{n|}} - {}_tV'_{x:\overline{n|}} - P + v \cdot q_{x+t} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

(1)式を $f(t)$ とおくと

$$f(0) + v f(1) + v^2 f(2) + \cdots\cdots + v^{n-1} f(n-1) = 0$$

$$\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\ {}_{t+1}V'_{x:\overline{n}|} - \sum_{t=0}^{n-1} v^{t} \cdot {}_{t}V'_{x:\overline{n}|} - P\sum_{t=0}^{n-1} v^{t} + \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} \cdot g_{x+t} = 0$$

${}_{0}V'_{x:\overline{n}|} = 0$　　${}_{n}V'_{x:\overline{n}|} = 1$　を代入

$$P = \frac{v^{n} + \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\ g_{x+t}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}$$

6. $$P_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - d \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$P_{x} = \frac{1}{\ddot{a}_{x}} - d \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$ {}_{n}P_{x} = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - \frac{d\,\ddot{a}_{x}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

(1) (2) (3) 式から $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ , $\ddot{a}_{x}$ を消去すると

$$ {}_{n}P_{x} = (P_{x:\overline{n}|} + d) - d\,\frac{P_{x:\overline{n}|} + d}{P_{x} + d}$$

$$ {}_{n}P_{x}(P_{x} + d) - (P_{x:\overline{n}|} + d)(P_{x} + d) + d(P_{x:\overline{n}|} + d) = 0$$

$$ {}_{n}P_{x} \cdot P_{x} + {}_{n}P_{x} \cdot d - P_{x:\overline{n}|} \cdot P_{x} - d \cdot P_{x} - d \cdot P_{x:\overline{n}|} - d^{2} + d \cdot P_{x:\overline{n}|} + d^{2} = 0$$

$$d = \frac{P_{x} \cdot (P_{x:\overline{n}|} - {}_{n}P_{x})}{{}_{n}P_{x} - P_{x}}$$

$$d = \frac{.00984(.01697 - .01106)}{.01106 - .00984} = .04767$$

$$i = \frac{d}{1-d} \fallingdotseq .05$$

予定利率　5%

7. (1) de Moivreの死亡法則は次のように表現される。

$$\ell_x = \frac{k}{\omega}(\omega - x)$$

したがって，この場合

$$_tp_x = \frac{\omega - x - t}{\omega - x} = 1 - \frac{t}{n}$$

これを $a_x$ の定義式

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega - x} {}_tp_x v^t$$

に代入して，

$$a_x = \sum_{t=1}^{n}\left(1 - \frac{t}{n}\right) v^t$$

$$= a_{\overline{n}|} - \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} t\, v^t$$

$$= \frac{n\,i\,a_{\overline{n}|} - \left\{(1+i)a_{\overline{n}|} - n\,v^n\right\}}{n\,i}$$

$$= \frac{n(i\,a_{\overline{n}|} + v^n) - (1+i)a_{\overline{n}|}}{n\,i}$$

$$= \frac{n - (1+i)a_{\overline{n}|}}{n\,i}$$

(2) 仮定により

$$_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+k}\,dk} = e^{-\mu t}$$

これを $\overline{a}_{x:\overline{n}|}$ の定義式

$$\overline{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n {}_tp_x v^t\, dt$$

に代入して

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \int_0^n e^{-\mu t} \cdot e^{-\delta t} dt$$

$$= \frac{1 - v^n {}_n p_x}{\mu + \delta}$$

8. (i) P ( EAN) は4つの制度に共通

(ii) $\alpha_{\tau+t} + \beta_{\tau+t} = (\alpha_{\tau+t} + \beta_t) + (\alpha_t + \beta_{\tau+t}) - (\alpha_t + \beta_t)$

であるから，(i)も加味して

$$( PSL ) = U_1 + U_2 - U_3$$

9. 簡単にするため，保険料は年払いであるものと仮定しPで表わすものとする。 t年度における責任準備金を ${}_tV$ とすれば

$${}_tV = P \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}}$$

$$= P\left\{(1+i)^t \frac{\ell_x}{\ell_{x+t}} + (1+i)^{t-1} \frac{\ell_{x+1}}{\ell_{x+t}} + \cdots + (1+i) \frac{\ell_{x+t-1}}{\ell_{x+t}}\right\}$$

$$> P\left\{(1+i)^t + (1+i)^{t-1} + \cdots + (1+i)\right\}$$

$$= P\ \ddot{S}_{\overline{t|}}$$

右辺は積立終価に一致する。よって証明された。