〔問〕

昭和 40 年度　（問題）

午前の部

1. $\bar{a}_{\overline{\mathring{e}_x}|} > \bar{a}_x$ を証明せよ。ただし，$0<i<1$，$0<q_x<1$ とする。

2. ある会社の年間利息配当金収入をI，年始および年末総資産を A_0 および A_n とする。いま，1年間を n 等分し，それぞれ $\frac{1}{n}$，$\frac{2}{n}$，…… の時点における総資産をA_1，A_2，……とし，それぞれの間は直線で結ばれるとした場合，この会社の総資産利回りを求む。ただし，利力は年間一定であると仮定する。

3. $q_x < q_{x+1} < q_{x+2} < \cdots\cdots < q_{x+n-1}$ であるとき，

$$\frac{C_x}{D_x}+\frac{C_{x+1}}{D_{x+1}}+\frac{C_{x+2}}{D_{x+2}}+\cdots\cdots+\frac{C_{x+n-1}}{D_{x+n-1}} > n\frac{C_x+C_{x+1}+C_{x+2}+\cdots\cdots+C_{x+n-1}}{D_x+D_{x+1}+D_{x+2}+\cdots\cdots+D_{x+n-1}}$$

となることを証明せよ。

午後の部

次の6問のうち，4, 5, 6 の3問または7, 8, 9 の3問のどちらかの組をえらんで解答せよ。

4. ${}_tV^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ と ${}_tV_{x:\overline{n}|}$ の大小を比較せよ。ただし，保険金は年末払とする。

5. 標準下体（substandard）契約における特別条件として，削減法，年増法および料増法（特別保険料徴収法）がある。それぞれの方法と死亡率との関連および契約撰択上の注意を養老保険と定期保険の別に述べよ。

6. 次のような計算基礎率を有する全期払養老保険（保険金期末払）がある。初年度および次年度以降の付加保険料を，それぞれ保険金比例および営業保険料比例の要素に分解し，その値を求めよ。

予定利率	4 %	
予定新契約費率	$\frac{30}{1000}$	（対保険金）
予定維持費率	$\frac{4}{1000}$	（対保険金）

予定集金費率　3％　（対営業保険料）

営業保険料　$\frac{41.20}{1000}$　（対保険金）

責任準備金積立方式　チルメル控除　$\frac{25}{1000}$　の全期チルメル式。

7. 最終給与スライド制で，かつ，過去勤務期間の算入については完全年金制をとる年金制度において，過去勤務債務償却を定率（給与比例）による凍結方式とし，再計算期まで償却率の変更を行なわないことにした。

制度発足後毎年期末に一定率の給与改訂（給与改訂率は予定利率と等しいものとする）がある場合，n年経過後に再計算を行なうものとして再計算前と再計算後の償却率の大小を比較せよ。この場合，加入者集団は定常状態にあり，経験率は予定の基礎率に等しいものとする。

8. 加入期間が t_0 年未満の生存退職者には，x_1 歳支給開始の終身年金を給付し，t_0 年以上の生存退職者には，x_2 歳支給開始の終身年金を給付するものとする。年金年額をすべて1とすれば，加入時（加入年令x_0歳）における給付現価は，次式で表わされることを証明せよ。

$$_{x_1-x_0|}\bar{a}_{x_0} + {}_{(x_2-x_0)|(x_1-x_2)}\bar{a}_{x_0} \quad {}_{t_0}p_{x_0}^{(\omega)}$$

但し，$x_2 < x_1$，かつ，すべての加入者は x_2 歳迄に退職するものとし，また，${}_{t_0}p_{x_0}^{(\omega)}$ は x_0歳の者の生存退職率のみによる t_0 年後の残存率とする。

9. 完全年金制度（Full Pension）において，保険料計算上新規加入者を見込まない綜合保険料方式（クローズド型）による綜合保険料は，期間の経過にしたがつて加入年齢方式による標準保険料に収束することを示せ。
この場合，加入者集団は定常状態にあり，経験率は予定の基礎率に等しいものとする。

昭和 40 年度　（解答）

午前の部

1.
$$\bar{a}_{\overline{\mathring{e}_x}|} = \int_0^{\mathring{e}_x} v^t \, dt$$

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} v^t \, {}_tp_x \, dt$$

$$\therefore \ \bar{a}_{\overline{\mathring{e}_x}|} - \bar{a}_x = \int_0^{\mathring{e}_x} v^t dt \int_0^{\infty} v^t \, {}_tp_x \, dt$$

$$= \int_0^{\mathring{e}_x} v^t dt - \left\{ \int_0^{\mathring{e}_x} v^t \, {}_tp_x \, dt + \int_{\mathring{e}_x}^{\infty} v^t \, {}_tp_x \, dt \right\}$$

$$= \int_0^{\mathring{e}_x} v^t (1 - {}_tp_x) dt - \int_{\mathring{e}_x}^{\infty} v^t \, {}_tp_x \, dt$$

$$> v^{\mathring{e}_x} \int_0^{\mathring{e}_x} (1 - {}_tp_x) \, dt - v^{\mathring{e}_x} \int_{\mathring{e}_x}^{\infty} {}_tp_x \, dt$$

$$(\because \ 0 < v < 1)$$

$$= v^{\mathring{e}_x} (\mathring{e}_x - \int_0^{\infty} {}_tp_x \, dt) = 0$$

$$\therefore \ \bar{a}_{\overline{\mathring{e}_x}|} > \bar{a}_x$$

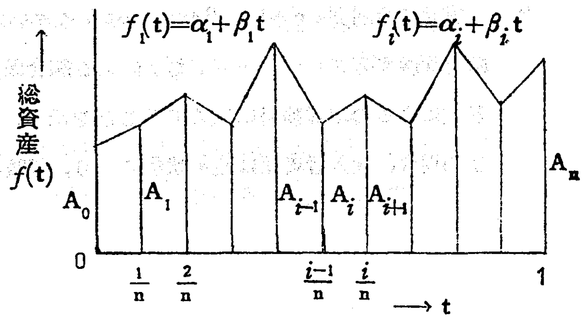
2.　与えられた条件から右図のように仮定することができる。

$$\mathrm{I} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \delta \cdot f_i(t) \, dt$$

$$\therefore \mathrm{I} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \delta (\alpha_i + \beta_i t) \, dt$$

$$= \delta \sum_{i=1}^{n} \left[\alpha_i t + \frac{\beta_i t^2}{2} \right]_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}$$

$$= \delta \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\frac{\alpha_i i}{n} + \frac{\beta_i i^2}{2n^2} \right) - \left(\frac{\alpha_i (i-1)}{n} \right) + \frac{\beta_i (i-1)^2}{2n^2} \right) \right\}$$



$$= \frac{\delta}{2n} \sum_{i=1}^{n} \left(2\alpha_i + \frac{(2i-1)}{n} \beta_i \right)$$

しかるに

$$f_i\left(\frac{i-1}{n}\right) = \alpha_i + \beta_i \frac{i-1}{n} = A_{i-1}$$

$$f_i\left(\frac{i}{n}\right) = \alpha_i + \beta_i \frac{i}{n} = A_i$$

$$\therefore \quad \beta_i = n(A_i - A_{i-1})$$

$$\alpha_i = A_i - \beta_i \frac{i}{n}$$

$$= A_i - i(A_i - A_{i-1})$$

$$\therefore \quad 2\alpha_i + \frac{(2i-1)}{n} \beta_i = A_i + A_{i-1}$$

$$\therefore \quad I = \frac{\delta}{2n} \left\{ (A_1 + A_0) + (A_2 + A_1) + \cdots + (A_i + A_{i-1}) + \cdots + (A_n + A_{n-1}) \right\}$$

$$= \frac{\delta}{2n} \left\{ A_0 + 2(A_1 + \cdots + A_{n-1}) + A_n \right\}$$

$$\therefore \quad \delta = \frac{2n\,I}{A_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} A_i + A_n}$$

$$\therefore \quad i = e^{\delta} - 1 = \delta + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \cdots \fallingdotseq \delta \cdot \frac{1}{1 - \frac{\delta}{2}}$$

$$= \frac{2n\,I}{A_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} A_i + A_n} \left(1 - \frac{n\,I}{A_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} A_i + A_n} \right)^{-1}$$

$$= \frac{2n\,I}{A_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} A_i + A_n - n\,I}$$

3.　$n=k$に対して成立つものとし，このことの論理的結論として，$n=k+1$に対して成立つことを証明し，最後にこの式に於て $n=2$ について成立つことを証明して全体の証明を終了させる。

先づ$n=k$に対して成立つものと仮定する。

$$\sum_{i=0}^{k-1}\frac{C_{x+i}}{D_{x+i}}>k\frac{\sum_{i=0}^{k-1}C_{x+i}}{\sum_{i=0}^{k-1}D_{x+i}}=k\frac{M_x-M_{x+k}}{N_x-N_{x+k}}=k\frac{A}{B}$$

この場合，$A=M_x-M_{x+k}$ および $B=N_x-N_{x+k}$ なりとする。これは証明式を簡略にするためである。

$$\sum_{i=0}^{k-1}\frac{C_{x+i}}{D_{x+i}}>k\frac{A}{B}$$

なるときは，$\sum_{i=0}^{k}\frac{C_{x+i}}{D_{x+i}}>(k+1)\frac{A+C_{x+k}}{B+D_{x+k}}$ が証明されればよい。このことは，

$$\sum_{i=0}^{k}\frac{C_{x+i}}{D_{x+i}}-(k+1)\frac{A+C_{x+k}}{B+D_{x+k}}>0$$

なることが証明されればよい。

$C_{x+k}=C$，$D_{x+k}=D$ とすると，

$$\sum_{i=0}^{k}\frac{C_{x+i}}{D_{x+i}}-(k+1)\frac{A+C_{x+k}}{B+D_{x+k}}=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{C_{x+i}}{D_{x+i}}+\frac{C}{D}-k\frac{A+C}{B+D}-\frac{A+C}{B+D}$$

$$=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{C_{x+i}}{D_{x+i}}+\frac{C}{D}-\frac{A+C}{B+D}-k\left[\frac{AB+AD}{B(B+D)}+\frac{BC-AD}{B(B+D)}\right]$$

$$=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{C_{x+i}}{D_{x+i}}+\frac{C}{D}-\frac{A+C}{B+D}-k\left[\frac{A}{B}+\frac{BC-AD}{B(B+D)}\right]$$

$$=\left[\sum_{i=0}^{k-1}\frac{C_{x+i}}{D_{x+i}}-k\frac{A}{B}\right]+\left[\frac{C}{D}-\frac{A+C}{B+D}-k\frac{BC-AD}{B(B+D)}\right]$$

$$=\left[\sum_{i=0}^{k-1}\frac{C_{x+i}}{D_{x+i}}-k\frac{A}{B}\right]+\frac{CB(B+D)-(A+C)BD-k(BC-AD)D}{BD(B+D)}$$

$$=\left[\qquad〃\qquad\right]+\frac{B^2C-ABD+kAD^2-kBCD}{BD(B+D)}$$

$$=\left[\qquad〃\qquad\right]+\frac{B(BC-AD)+kD(AD-BC)}{BD(B+D)}$$

第1項は仮定により>0であるから，第2項が>0なることが証明されればよい。

しかるに，仮説により

$$v\,q_{x+k}=\overset{*}{C}_{x+k}=\frac{C_{x+k}}{D_{x+k}}>\frac{C_{x+k-1}}{D_{x+k-1}}>\frac{C_{x+k-2}}{D_{x+k-2}}>\cdots\cdots>\frac{C_x}{D_x}$$

なる故，　$M_x-M_{x+k}<\overset{*}{C}_{x+k}\,(N_x-N_{x+k})$　即ち

$$\frac{M_x-M_{x+k}}{N_x-N_{x+k}}<\frac{C_{x+k}}{D_{x+k}}$$

すなわち，

$$\frac{C}{D}>\frac{A}{B}\qquad CB-AD>0$$

更に，$B-kD=(N_x-N_{x+k})-kD_{x+k}$

$$=(D_x-D_{x+k})+(D_{x+1}-D_{x+k})+(D_{x+2}-D_{x+k})+\cdots\cdot+$$

$$(D_{x+k-1}-D_{x+k})>0$$

よつて，

$$\sum_{i=0}^{k}\frac{C_{x+i}}{D_{x+i}}-(k+1)\frac{A+C_{x+k}}{B+D_{x+k}}>0$$

次に$n=2$に対し成立つことを証明する。

$$\frac{C_x}{D_x}+\frac{C_{x+1}}{D_{x+1}}-2\frac{C_x+C_{x+1}}{D_x+D_{x+1}}=\frac{v\,d_x}{\ell_x}+\frac{v\,d_{x+1}}{\ell_{x+1}}-2\frac{v\,d_x+v^2d_{x+1}}{\ell_x+v\ell_{x+1}}$$

$$=\frac{vd_x\ell_{x+1}(\ell_x+v\ell_{x+1})+vd_{x+1}\ell_x(\ell_x+v\ell_{x+1})-2\ell_x\ell_{x+1}(vd_x+v^2d_{x+1})}{\ell_x\ell_{x+1}(\ell_x+v\ell_{x+1})}$$

$$=\frac{v^2\ell_{x+1}(d_x\ell_{x+1}-d_{x+1}\ell_x)+v\ell_x(d_{x+1}\ell_x-d_x\ell_{x+1})}{\ell_x\ell_{x+1}(\ell_x+v\ell_{x+1})}$$

$$=\frac{v(\ell_x-v\ell_{x+1})(d_{x+1}\ell_x-d_x\cdot\ell_{x+1})}{\ell_x\ell_{x+1}(\ell_x+v\ell_{x+1})}$$

$$=\frac{v(\ell_x-v\ell_{x+1})\left(\frac{d_{x+1}}{\ell_{x+1}}-\frac{d_x}{\ell_x}\right)}{\ell_x+v\ell_{x+1}}$$

$$=\frac{v(\ell_x-v\ell_{x+1})(q_{x+1}-q_x)}{\ell_x+v\ell_{x+1}}$$

しかるに　$\ell_x-v\ell_{x+1}>0$　　$q_{x+1}-q_x>0$

なる故

$$\frac{C_x}{D_x}+\frac{C_{x+1}}{D_{x+1}}>2\,\frac{C_x+C_{x+1}}{D_x+D_{x+1}}$$

〔別　解〕

q_x が単調増加の場合 ${}_tV^1_{x:\overline{n}|}$ （t＝1, 2, …・n－1）は正である。　（＊1）

責任準備金の再帰公式より

$${}_tV^1_{x:\overline{n}|}+P^1_{x:\overline{n}|}-v\cdot q_{x+t}=v\cdot p_{x+t}\cdot{}_{t+1}V^1_{x:\overline{n}|}$$

$$\sum_{t=0}^{n-1}(P^1_{x:\overline{n}|}-v\cdot q_{x+t})=\sum_{t=0}^{n-1}(v\cdot p_{x+t}\cdot{}_{t+1}V^1_{x:\overline{n}|}-{}_tV^1_{x:\overline{n}|})$$

$$\sum_{t=0}^{n-1}(P^1_{x:\overline{n}|}-v\cdot q_{x+t})=\sum_{t=0}^{n-2}(v\cdot p_{x+t}\cdot{}_{t+1}V^1_{x:\overline{n}|}-{}_{t+1}V^1_{x:\overline{n}|})-{}_0V^1_{x:\overline{n}|}$$

$$+v\cdot p_{x+n-1}\cdot {}_{n}V^{1}_{x:\overline{n}|}$$

ここで，${}_{0}V^{1}_{x:\overline{n}|}={}_{n}V^{1}_{x:\overline{n}|}=0$（＊2），および，$v\,p_{x+t}-1<0$，${}_{t}V^{1}_{x:\overline{n}|}$ >0より

$$\sum_{t=0}^{n-1}(P^{1}_{x:\overline{n}|}-v\,q_{x+t})<0$$

$$n\cdot P^{1}_{x:\overline{n}|}<vq_{x}+v\cdot q_{x+1}+\cdots+vq_{x+n-1}$$

$$\frac{C_x}{D_x}+\frac{C_{x+1}}{D_{x+1}}+\cdots+\frac{C_{x+n-1}}{D_{x+n-1}}>n\cdot\frac{C_x+C_{x+1}+\cdots+C_{x+n-1}}{D_x+D_{x+1}+\cdots+D_{x+n-1}}$$

（＊1）の証明

$${}_{t}V^{1}_{x:\overline{n}|}=A^{1}_{x+t:\overline{n-t}|}-P^{1}_{x:\overline{n}|}\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$$=(P^{1}_{x+t:\overline{n-t}|}-P^{1}_{x:\overline{n}|})\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

${}_{t}V^{1}_{x:\overline{n}|}>0$ を証明するためには，$P^{1}_{x+t:\overline{n-t}|}-P^{1}_{x:\overline{n}|}>0\ (t=1,2,\cdots n-1)$ を証明すればよい。

$q_x<q_{x+1}\cdots\cdots<q_{x+n-1}$ より

$\dfrac{C_x}{D_x}<\dfrac{C_{x+1}}{D_{x+1}}<\cdots<\dfrac{C_{x+n-1}}{D_{x+n-1}}$ となる。

$\dfrac{C_{x+n-1}}{D_{x+n-1}}>\dfrac{C_{x+n-2}}{D_{x+n-2}}$ より $\dfrac{C_{x+n-1}}{C_{x+n-2}}+1>\dfrac{D_{x+n-1}}{D_{x+n-2}}+1$

$$\frac{C_{x+n-1}+C_{x+n-2}}{D_{x+n-1}+D_{x+n-2}}>\frac{C_{x+n-2}}{D_{x+n-2}}$$

又 $\dfrac{D_{x+n-1}}{C_{x+n-1}}<\dfrac{D_{x+n-2}}{C_{x+n-2}}$ より $\dfrac{C_{x+n-1}+C_{x+n-2}}{D_{x+n-1}+D_{x+n-2}}<\dfrac{C_{x+n-1}}{D_{x+n-1}}$

故に

$$\frac{C_{x+n-1}}{D_{x+n-1}} > \frac{C_{x+n-1}+C_{x+n-2}}{D_{x+n-1}+D_{x+n-2}} > \frac{C_{x+n-2}}{D_{x+n-2}}$$ が成立する。

同様にして

$$\frac{C_{x+n-1}}{D_{x+n-1}} > \frac{C_{x+n-1}+C_{x+n-2}}{D_{x+n-1}+D_{x+n-2}} > \frac{C_{x+n-3}}{D_{x+n-3}}$$ より

$$\frac{C_{x+n-1}}{D_{x+n-1}} > \frac{C_{x+n-1}+C_{x+n-2}}{D_{x+n-1}+D_{x+n-2}} > \frac{C_{x+n-1}+C_{x+n-2}+C_{x+n-3}}{D_{x+n-1}+D_{x+n-2}+D_{x+n-3}} >$$

$$\frac{C_{x+n-3}}{D_{x+n-3}}$$

同様に

$$\frac{C_{x+n-1}}{D_{x+n-1}} > \frac{C_{x+n-1}+C_{x+n-2}}{D_{x+n-1}+D_{x+n-2}} > \cdots > \frac{C_{x+n-1}+\cdots+C_{x+1}+C_x}{D_{x+n-1}+\cdots+D_{x+1}+D_x} > \frac{C_x}{D_x}$$

故に

$$P^{\ 1}_{x+n-1:\overline{1}|} > P^{\ 1}_{x+n-2:\overline{2}|} > \cdots > P^{\ 1}_{x:\overline{n}|} > v\,q_x$$

$$P^{\ 1}_{x+t:\overline{n-t}|} - P^{\ 1}_{x:\overline{n}|} > 0$$

（＊2）の証明

(2)式に　$t=0$　を代入　${}_0V^{\ 1}_{x:\overline{n}|} = (P^{\ 1}_{x:\overline{n}|} - P^{\ 1}_{x:\overline{n}|})\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 0$

(1)式に　$t=n$　を代入　${}_nV^{\ 1}_{x:\overline{n}|} = A^{\ 1}_{x+n:\overline{0}|} - P^{\ 1}_{x:\overline{n}|}\ \ddot{a}_{x+n:\overline{0}|} = 0$

午 後 の 部

4. $$ {}_tV^{(m)}_{x:\overline{n}|} = A_{x+t:\overline{n-t}|} - P^{(m)}_{x:\overline{n}|}\ \ddot{a}^{(m)}_{x+t:\overline{n-t}|} $$

$$ = A_{x+t:\overline{n-t}|} - P^{(m)}_{x:\overline{n}|}\left\{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - \frac{m-1}{2m}\left(1-\frac{D_{x+n}}{D_{x+t}}\right)\right\} $$

$$ = A_{x+t:\overline{n-t}|} - \left\{P_{x:\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m}P^{(m)}_{x:\overline{n}|}\left(P_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} + d\right)\right\}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} $$

$$ + \frac{m-1}{2m}P^{(m)}_{x:\overline{n}|}\left(1-\frac{D_{x+n}}{D_{x+t}}\right) $$

$$ = \left(A_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{x:\overline{n}|}\ \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}\right) + \frac{m-1}{2m}P^{(m)}_{x:\overline{n}|} $$

$$ \left(1-d\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - A_{x+t:\overset{\ \ 1}{\overline{n-t}|}} - P_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}\ \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}\right) $$

$$ \left(\because \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} = A_{x+t:\overset{\ \ 1}{\overline{n-t}|}}\right) $$

$$ = {}_tV_{x:\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m}P^{(m)}_{x:\overline{n}|}\ {}_tV_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} $$

$$ \left(\because 1-d\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - A_{x+t:\overset{\ \ 1}{\overline{n-t}|}} \right. $$

$$ \left. = A_{x+t:\overline{n-t}|} - A_{x+t:\overset{\ \ 1}{\overline{n-t}|}} = A_{\overset{1}{x+t}:\overline{n-t}|}\right) $$

しかるに一般には,

$$ \frac{m-1}{2m}P^{(m)}_{x:\overline{n}|}\ {}_tV_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} > 0 $$

$$ \therefore\ {}_tV^{(m)}_{x:\overline{n}|} > {}_tV_{x:\overline{n}|} $$

ただし, ${}_tV_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} < 0$ の場合は(たとえば $q_x > q_{x+1} > \cdots\cdots$ のような)

$$ {}_tV^{(m)}_{x:\overline{n}|} < {}_tV_{x:\overline{n}|} $$

となる。

5. (1) 削減法　契約後k年間の削減支払率を $S_1, S_2, \cdots, S_k$ ($S_1 \leqq S_2 \leqq \cdots \leqq S_k < 1$) とすると標準体に対する死亡指数は $(1-{}_tV_{x:\overline{n}|})/(S_t-{}_tV_{x:\overline{n}|}) \doteqdot 1/S_t$ になる。ここに，定期保険の場合には，${}_tV_{x:\overline{n}|}$ は ${}_tV^{1}_{x:\overline{n}|}$ に読み替える（以下同じ。）ものとし，$t=1, 2, \cdots, k$ とする。又，表現を簡略にするため，保険金は年度末払とする（以下同じ。）。

従つて，このような逓減性危険，とくに契約直後のみ死亡指数の高い特別危険を有する者を契約対象とすべきである。

(2) 年増法　k年年増による死亡指数は，標準体に対して q_{x+k+t}/q_{x+t} であるから，著増性危険，とくに高年齢到達時にその傾向が激化する危険に適合する。従つて，一般欠陥体に適用される特別条件である。

一般大衆の理解しやすい条件であるが，歳満期契約には適用が困難である。

年増法による保険料増加分は，$v(q_{x+k+t}-q_{x+t})(1-{}_tV_{x+k:\overline{n}|})$ であるから，養老保険では必ずしも著増せず，料増法と大差のない場合が多い。定期保険ではこのような調整はできないから，逓増性危険については年増法によるべきである。

(3) 料増法　特別保険料kを徴収する場合に対応する死亡指数は，$k/(1-{}_tV_{x:\overline{n}|})$ であるから，養老保険では逓増し，定期保険では定常的である。

従つて，定期保険や短期料増法（一定期間に限定して料増法を条件とする特別条件）による養老保険では定常性危険の担保に適する。

(4) その他の注意　各条件による超過給付の現価がそれぞれ一致する場合に，たとえば年増法対象者に削減支払法を適用することには問題があるが，その程度により受け入れやすい場合が考えられる。たとえば，削減法でも不慮の事故死亡には全額支払をするため，死亡指数の面では必ずしも著減するとは言えないから，定常的な危険を削減法によることも可能であるが，その範囲は限定される。

6.
$$P' = P + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + \beta + P' \times \gamma$$

$$= P + \alpha(P+d) + \beta + P' \times \gamma$$

$$P'(1-\gamma) = (1+\alpha)P + \alpha d + \beta$$

$$P = \frac{1-\gamma}{1+\alpha}P' - \frac{\alpha d+\beta}{1+\alpha}$$

α，βについて $\frac{1}{1000}$ を省略して以下式を変形すると，全期チルメル式では，

$$\text{初年度}\quad P' = \left(P + \frac{25}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - 25\right) + \left(25+4+\frac{5}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}} + P' \times \gamma\right)$$

$$\text{初年度}\quad L = 29 + 5(P+d) + P' \times \gamma$$

$$= 29 + 5d + 5\left(\frac{1-\gamma}{1+\alpha}P' - \frac{\alpha d+\beta}{1+\alpha}\right) + P' \times \gamma$$

$$\text{初年度}\ \overset{(\text{S比例})}{L} = \frac{29}{1000} + \frac{5}{1000}d - \frac{5}{1000}\,\frac{\alpha d+\beta}{1+\alpha}$$

$$= \frac{29}{1000} + \frac{5}{1000} \times \frac{0.04}{1.04} - \frac{5}{1000}\left(\frac{30}{1000} \times \frac{0.04}{1.04} + \frac{4}{1000}\right) \Big/ 1 + \frac{30}{1000}$$

$$\fallingdotseq 0.029 + 0.000192 - 0.000025$$

$$= 0.029167$$

$$\text{初年度}\ \overset{(\text{P比例})}{L} = \left(\frac{5}{1000}\,\frac{1-\gamma}{1+\alpha} + \gamma\right)P'$$

$$= \left(\frac{5}{1000}\,\frac{1-0.03}{1+\frac{30}{1000}} + 0.03\right)P'$$

$$= \left(\frac{5 \times 0.97}{1030} + \frac{3}{100}\right)P'$$

$$= \left(\frac{4.85}{1030} + \frac{30.9}{1030}\right) \times \frac{41.20}{1000}$$

$$= \frac{35.79}{1030} \times \frac{41.20}{1000}$$

$$= \frac{1472.900}{1030000}$$

$$= 0.00143$$

次年度 $\overset{(S比例)}{L}$ ＝ 初年度 $\overset{(S比例)}{L}$ － $\frac{25}{1000}$

次年度 $\overset{(P比例)}{L}$ ＝ 初年度 $\overset{(P比例)}{L}$

答〕 保険金対千について

初年度L（S比例） ＝ 29円17銭

初年度L（P比例） ＝ 1円43銭

次年度L（S比例） ＝ 4円17銭

次年度L（P比例） ＝ 1円43銭

7. 初期P，S，Lを V_0 とする。

発足後γ年度のベアによる後発P，S，Lは$i(1+i)^{\gamma-1}V_0$

よつて，償却が行なわれなかつた場合のn年度末P，S，L累積残は

$$V_0(1+i)^n+i\sum_{\gamma=0}^{n-1}(1+i)^{\gamma}V_0(1+i)^{n-1-\gamma}=V_0(1+i)^n+niV_0(1+i)^{n-1}$$

$$=\left\{1+(n+1)i\right\}(1+i)^{n-1}V_0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

つぎに，P，S，L償却率uは題意により

$u=d\ {}^{V_0}/G_0$ （G_0；発足時給与総額）

よつて，n年度末までのP，S，L累積残は

$$u\times\sum_{\gamma=0}^{n-1}(1+i)^{\gamma}G_0(1+i)^{n-\gamma}=nuG_0(1+i)^n=in(1+i)^{n-1}V_0 \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

故に，n年度末未償却残は

$$(1)-(2)=\left\{1+(n+1)i\right\}(1+i)^{n-1}V_0-in(1+i)^{n-1}V_0=(1+i)^nV_0$$

よつて，見直し後におけるP，S，L償却率 u′ は

$$u' = \frac{d(1+i)^n V_0}{(1+i)^n G_0} = d \cdot \frac{V_0}{G_0}$$

すなわち，見直しの前後において償却率は変らない。

8. 今死亡を原因とする脱退力を $\mu_x^{(1)}$，死亡以外の原因による脱退力を $\mu_x^{(2)}$ であらわすものとし，総脱退力を μ_x であらわすものとすれば，

$$\mu_x = \mu_x^{(1)} + \mu_x^{(2)}$$

次に ℓ_x，$\ell_x^{(1)}$ を次式で定義する。

$$\ell_x = \ell_{x_0} \ e^{-\int_{x_0}^{x} \mu_x dx}, \quad \ell_x^{(1)} = \ell_{x_0}^{(1)} \ e^{-\int_{x_0}^{x} \mu_x^{(1)} dx}$$

又，便宜上 $\ell_{x_0} = \ell_{x_0}^{(1)}$ とおくことにし，D_x，$D_x^{(1)}$ を次式により定義する。

$$D_x = v^x \ell_x \qquad D_x^{(1)} = v^x \ell_x$$

年金年額1に対する給付現価を a で表わせば

$$a = \frac{1}{D_{x_0}} \int_0^{t_0} D_{x_0+t} \ \mu_{x_0+t}^{(2)} \cdot {}_{x_1-x_0-t|}\overline{a}_{x_0+t} \ dt$$

$$+ \frac{1}{D_{x_0}} \int_{t_0}^{r-t_0} D_{x_0+t} \ \mu_{x_0+t}^{(2)} \cdot {}_{x_2-x_0-t|}\overline{a}_{x_0+t} \ dt$$

$$= \frac{1}{D_{x_0}} \int_0^{r-x_0} D_{x_0+t} \ \mu_{x_0+t}^{(2)} \cdot {}_{x_1-x_0-t|}\overline{a}_{x_0+t} \ dt$$

$$+ \frac{1}{D_{x_0}} \int_{t_0}^{r-x_0} D_{x_0+t} \ \mu_{x_0+t}^{(2)} \cdot {}_{(x_2-x_0-t)\cdot|(x_1-x_2)}\overline{a}_{x_0+t} \ dt$$

$$= {}_{x_1 - x_0|}\bar{a}_{x_0} \int_0^{r-x_0} \frac{\ell_{x_0+t}}{\ell^{(1)}_{x_0+t}} \mu^{(2)}_{x_0+t}\, dt + {}_{(x_2-x_0)|(x_1-x_2)}\bar{a}_{x_0} \int_{t_0}^{r-x_0} \frac{\ell_{x_0+t}}{\ell^{(1)}_{x_0+t}}$$

$$\cdot \mu^{(2)}_{x_0+t}\, dt$$

上式における不定積分を I とおけば

$$\mathrm{I} = \int \frac{e^{-\int_0^t \mu_{x_0+s}\,ds}}{e^{-\int_0^t \mu^{(1)}_{x_0+s}\,ds}} \mu^{(2)}_{x_0+t}\,dt = \int e^{-\int_0^t \mu^{(2)}_{x_0+s}ds} \mu^{(2)}_{x_0+t}\,dt$$

$$= -e^{-\int_0^t \mu^{(2)}_{x_0+s}\,ds}$$

よつて

$$[\,\mathrm{I}\,]_0^{r-x_0} = 1 - e^{-\int_0^{r-x} \mu^{(2)}_{x_0+s}\,ds} = 1$$

$$[\,\mathrm{I}\,]_{t_0}^{r-x_0} = e^{-\int_0^{t_0} \mu^{(2)}_{x_0+s}\,ds} - e^{-\int_0^{r-x_0} \mu^{(2)}_{x_0+s}\,ds} = e^{-\int_0^{t_0} \mu^{(2)}_{x_0+s}\,ds} = {}_{t_0}p^{(\omega)}_{x_0}$$

従つて

$$a = {}_{x_1-x_2|}\bar{a}_{x_0} + {}_{(x_2-x_0)|(x_1-x_2)}\bar{a}_{x_0} \cdot {}_{t_0}p^{(\omega)}_{x_0}$$

9. 記号を次のように定義する。また本質的でない点は簡略化する。

A_t： 加入期間 t 年の脱退者の総給付現価（期末脱退を仮定）

B_t： 加入期間 t 年の加入者の総給与（期初拠出を仮定）

C ： 加入年令方式標準保険料

C_T： T年度の綜合保険料

F_T： 加入者集団のためのT年度末基金総額

n ： 最長加入期間

$$C = \frac{\sum_{t=0}^{n-1} A_t v^{t+1}}{\sum_{t=0}^{n-1} B_t v^t} \sum_{t=0}^{n-1} B_t$$

$$C_T = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{n-1-k} A_{t+k} \ v^{t+1} - F_{T-1}}{\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{n-1-k} B_{t+k} \ v^t} \sum_{t=0}^{n-1} B_t$$

ここで,

$$\left.\begin{aligned} A &\equiv \sum_{t=0}^{n-1} A_t \\ a &\equiv \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{n-1-k} A_{t+k} \ v^{t+1} \\ b &\equiv \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{n-1-k} B_{t+k} \ v^t}{\sum_{t=0}^{n-1} B_t} \end{aligned}\right\} \text{とおくと,}$$

$$C_T = \frac{a - F_{T-1}}{b}$$

$$F_T = (F_{T-1} + C_T)(1+i) - A$$

$$= \left\{ \left(1 - \frac{1}{b}\right) F_{T-1} + \left(\frac{a}{b} - vA\right) \right\} (1+i)$$

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = \left(\frac{a}{b} - vA\right)(1+i)$$

$$F_2 = \left(\frac{a}{b} - vA\right)(1+i)\left\{\left(1 - \frac{1}{b}\right)(1+i) + 1\right\} = \left(\frac{a}{b} - vA\right)(1+i)(1+S)$$

ここで

$$S \equiv \left(1-\frac{1}{b}\right)(1+i)$$

$$F_T = \left(\frac{a}{b}-vA\right)(1+i)(1+S+S^2+\cdots+S^{T-1}) = \left(\frac{a}{b}-vA\right)(1+i)\frac{1-S^T}{1-S}$$

明らかに

$$1<b<\sum_{t=0}^{\infty} v^t \equiv \frac{1}{d}$$

$$\therefore \quad 0<S<1$$

$$\therefore \quad \lim_{T\to\infty} F_T = \left(\frac{a}{b}-v\cdot A\right)(1+i)\frac{1}{1-S}$$

$$\therefore \quad \lim_{T\to\infty} C_T = \frac{a-\left(\frac{a}{b}-vA\right)(1+i)\frac{1}{1-S}}{b}$$

$$= \frac{v\cdot A-d\cdot a}{1-d\cdot b}$$

$$= \frac{v\cdot\sum_{t=0}^{n-1} A_t - d\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{t=0}^{n-1-k} A_{t+k}\, v^{t+1}}{\sum_{t=0}^{n-1} B_t - d\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{t=0}^{n-1-k} B_{t+k}\, v^{t}} \cdot \sum_{t=0}^{n-1} B_t$$

$$= \frac{\sum_{t=0}^{n-1} A_t\, v^{t+1}}{\sum_{t=0}^{n-1} B_t\, v^t} \sum_{t=0}^{n-1} B_t$$

$$= C$$