昭和 39 年度　(問題)

午前の部

1. 死因 i が消滅した場合の完全平均余命を $\mathring{e}_x^{(-i)}$ とすると

$$\mathring{e}_x^{(-i)} - \mathring{e}_x = \int_0^{\omega-x} {}_tp_x \, \mu_{x+t}^{(i)} \, \mathring{e}_{x+t}^{(-i)} \, dt$$

が成立つことを証明せよ。

ただし，$\mu_x^{(i)}$ は死因 i による死力とし，$\mu_x = \mu_x^{(i)} + \mu_x^{(-i)}$ とする。

2. x才加入n年満期で，被保険者が死亡したらその直後の契約応当日から満期まで毎年1の確定年金を支払う保険の全期払純保険料及び純保険料式責任準備金を求めよ。

3. 二つの死亡表 $\{q_x\}$，$\{q'_x\}$ について

$${}_tV_{x:\overline{n|}} = {}_tV'_{x:\overline{n|}} \qquad (t = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ n-1)$$

なるときは，$\{q_x\}$ と $\{q'_x\}$ との間にはいかなる関係があるか。

ただし，保険金期末払とし，予定利率は等しいものとする。

午後の部

次の4問のうち，4, 5の2問または，6, 7の2問のどちらかの組をえらんで解答せよ。

4. 保険期間n年の生存保険で，死亡の際にはその期末に，期末責任準備金のk倍を支払うものとする。この保険の年払純保険料および平準純保険料式責任準備金は一般に次の算式で表わすことができることを証明せよ。

$${}_nP'_x = \frac{v^n \prod_{\tau=0}^{n-1} (p_{x+\tau} + k q_{x+\tau})}{\sum_{t=0}^{n-1} v^t \prod_{\tau=0}^{t-1} (p_{x+\tau} + k q_{x+\tau})}$$

$${}_tV'_x = v^{n-t} \prod_{\tau=0}^{n-t-1} (p_{x+t+\tau} + k q_{x+t+\tau}) - {}_nP'_x \sum_{s=0}^{n-t-1} v^s \prod_{\tau=0}^{s-1} (p_{x+t+\tau} + k q_{x+t+\tau})$$

〔問〕

5. ある死亡表を用いて計算された終身保険年金現価 a_x について，その定差の間に $\triangle^2 a_x > i \triangle a_x$（$i$ は a_x の計算に用いられた利率）がxに関係なく成立する場合，その死亡表により計算される終身保険の危険保険料は経過年数の増加とともに常に増加することを証明せよ。ただし，保険金は期末払とする。

6. 保険料年m回期首払の契約に対し，便宜的に年央1回払で計算した保険料にて代用した。この際の保険料の差額の契約時総現価を計算せよ。
計算は平準純保険料により，かつ定額制年金の場合について行なうものとする。

7. 年金制度発足当初，受給者がないものとし，かつ加入者集団について定常状態を仮定するとき，将来の新規加入者を見込んだ総合保険料方式（Open Aggregate Cost Method）による掛金額と，年金現価積立方式（Terminal Funding Method）による掛金額との関係を求めよ。

昭和 39 年度　（解答）

午前の部

1. $$\int_0^{\omega-x} {}_tp_x \mu_{x+t}^{(i)} \mathring{e}_{x+t}^{(-i)} dt = \int_0^{\omega-x} {}_tp_x (\mu_{x+t} - \mu_{x+t}^{(-i)}) \mathring{e}_{x+t}^{(-i)} dt$$

$$= \int_0^{\omega-x} {}_tp_x \mu_{x+t} \mathring{e}_{x+t}^{(-i)} dt - \int_0^{\omega-x} {}_tp_x \mu_{x+t}^{(-i)} \mathring{e}_{x+t}^{(-i)} dt$$

この２つの積分を I_1, I_2 とし,

$$\frac{d}{dt}\,{}_tp_x = -\,{}_tp_x \mu_{x+t}, \quad \frac{d}{dt} \mathring{e}_{x+t} = \mu_{x+t} \mathring{e}_{x+t} - 1$$

なることを用いて, I_1 を変形する。

$$I_1 = \int_0^{\omega-x} \left\{\frac{d}{dt}(-\,{}_tp_x)\right\} \mathring{e}_{x+t}^{(-i)} dt = \left[-\,{}_tp_x \mathring{e}_{x+t}^{(-i)}\right]_0^{\omega-x} - \int_0^{\omega-x} (-\,{}_tp_x) \frac{d}{dt} \mathring{e}_{x+t}^{(-i)} dt$$

$$= \mathring{e}_x^{(-i)} + \int_0^{\omega-x} {}_tp_x (\mu_{x+t}^{(-i)} \mathring{e}_{x+t}^{(-i)} - 1) dt$$

$$= \mathring{e}_x^{(-i)} + \int_0^{\omega-x} {}_tp_x \mu_{x+t}^{(-i)} \mathring{e}_{x+t}^{(-i)} dt - \int_0^{\omega-x} {}_tp_x dt$$

$$= \mathring{e}_x^{(-i)} + I_2 - \mathring{e}_x$$

よって, $\displaystyle\int_0^{\omega-x} {}_tp_x \mu_{x+t}^{(i)} \mathring{e}_{x+t}^{(-i)} dt = I_1 - I_2 = \mathring{e}_x^{(-i)} - \mathring{e}_x$

2. 求める保険料をP, t年経過の責任準備金を ${}_tV$ で表わせば, ${}_tV$ に関する漸化式により,

$$v\,\ell_{x+\tau+1} \cdot {}_{\tau+1}V = \ell_{x+\tau}({}_\tau V + P) - v\,d_{x+\tau} \cdot \ddot{a}_{\overline{n-\tau|}}$$

基数を用いて

$$D_{x+\tau+1} \cdot {}_{\tau+1}V = D_{x+\tau}({}_\tau V + P) - C_{x+\tau} \cdot \ddot{a}_{\overline{n-\tau|}}$$

ここで, $\tau = t$, $t+1$, ‥‥, $n-1$ とし, 辺々相加えて, ${}_nV = 0$ に注意すれば,

$$0 = D_{x+t} \cdot {}_tV + P(N_{x+t} - N_{x+n}) - \sum_{\tau=t}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{n-\tau}|} C_{x+\tau}$$

$$\therefore \quad {}_tV = \frac{\displaystyle\sum_{\tau=t}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{n-\tau}|} C_{x+\tau}}{D_{x+t}} - P\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

$t=0$とし，${}_0V=0$ に注意すれば

$$P = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \cdot \frac{\displaystyle\sum_{\tau=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{n-\tau}|} C_{x+\tau}}{D_x}$$

$$\sum_{\tau=t}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{n-\tau}|} C_{x+\tau} = \sum_{\tau=t}^{n-1} \frac{1-v^{n-\tau}}{iv} C_{x+\tau} = \frac{1}{iv}(M_{x+t} - M_{x+n})$$

$$-\frac{1}{i}(v^{n-t} D_{x+t} - D_{x+n})$$

を用いて変形すれば，

$$P = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\left(\frac{A^{1}_{x:\overline{n}|}}{iv} - \frac{v^n - {}_nE_x}{i}\right)$$

$${}_tV = \frac{A^{1}_{x+t:\overline{n-t}|}}{iv} - \frac{1}{i}\left(v^{n-t} - {}_{n-t}E_{x+t}\right) - P\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

3. 責任準備金の漸化式により　$t=0, 1, 2, \cdots, n-1$ について

$$({}_tV_{x:\overline{n}|} + P)(1+i) = q_{x+t}(1 - {}_{t+1}V_{x:\overline{n}|}) + {}_{t+1}V_{x:\overline{n}|} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$$({}_tV'_{x:\overline{n}|} + P')(1+i) = q'_{x+t}(1 - {}_{t+1}V'_{x:\overline{n}|}) + {}_{t+1}V'_{x:\overline{n}|} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

ところが　${}_0V_{x:\overline{n}|} = {}_0V'_{x:\overline{n}|} = 0$

${}_nV_{x:\overline{n}|} = {}_nV'_{x:\overline{n}|} = 1$

なることと，題意とから，

$${}_tV_{x:\overline{n}|} = {}_tV'_{x:\overline{n}|} \quad (t=0, 1, 2, \cdots, n)$$

したがって (1)−(2) から

$$(P-P')(1+i)=(q_{x+t}-q'_{x+t})(1-{}_{t+1}V_{x:\overline{n|}}) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

$$(t=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ n-1)$$

ここで　$t=n-1$とすれば　${}_{t+1}V_{x:\overline{n|}}=1$　なることから

$$P-P'=0$$

ゆえに (3)式は

$$(q_{x+t}-q'_{x+t})(1-{}_{t+1}V_{x:\overline{n|}})=0$$

$$t=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ n-1$$

ここで　$t\fallingdotseq n-1$　なるときは　${}_{t+1}V_{x:\overline{n|}}\fallingdotseq 1$　であるから

$$q_{x+t}=q'_{x+t}$$

ただし　$t=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots,\ n-2$

午 後 の 部

4. 責任準備金の漸化式は，次の様にあらわされる。

$$v\,p_{x+t}\ {}_{t+1}V'_x={}_tV'_x+{}_nP'_x-k\,v\,q_{x+t}\ {}_{t+1}V'_x$$

これを整頓して

$${}_nP'_x=v\,(p_{x+t}+k\,q_{x+t})\,{}_{t+1}V'_x-{}_tV'_x \quad (t=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ n-1)\cdots\cdots\cdots(1)$$

これに ${}_0V'_x=0$，${}_nV'_x=1$ を付加すると，P′，V′ に関する連立一次方程式となり，これを解く事によってP′，V′ が求まる。但しこの解法では行列式の展開に手間どるので次の方法に依るのが簡潔であろう。

(i)　${}_nP'_x$

(1)式の両辺に $v^t\prod_{\tau=0}^{t-1}(p_{x+\tau}+k\,q_{x+\tau})$ を乗じ，$t=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ n-1$　に応ずる各式を辺辺相加え，${}_0V'_x=0$，${}_nV'_x=1$ を代入すると，右辺は消去し合い，結局次の式を得る

$${}_nP'_x\sum_{t=0}^{n-1}v^t\prod_{\tau=0}^{t-1}(p_{x+\tau}+k\,q_{x+\tau})=v^n\prod_{\tau=0}^{n-1}(p_{x+\tau}+k\,q_{x+\tau})$$

$$\therefore\ {}_nP'_x = \frac{v^n \prod_{\tau=0}^{n-1}(p_{x+\tau}+k\,q_{x+\tau})}{\sum_{t=0}^{n-1} v^t \prod_{\tau=0}^{t-1}(p_{x+\tau}+k\,q_{x+\tau})}$$

(ii) ${}_tV'_x$

(1)式の両辺に $v^{t-t'}\prod_{\tau=t'}^{t-1}(p_{x+\tau}+k\,q_{x+\tau})$ を乗じ，$t=t'$，$t'+1$，....，$n-1$ に応ずる各式を辺辺相加え，${}_nV'_x=1$ を代入すれば

$${}_nP'_x\sum_{t=t'}^{n-1} v^{t-t'}\prod_{\tau=t'}^{t-1}(p_{x+\tau}+k\,q_{x+\tau}) = v^{n-t'}\prod_{\tau=t'}^{n-1}(p_{x+\tau}+k\,q_{x+\tau}) - {}_{t'}V'_x$$

t' を新らたに t と書きかえ，${}_tV'_x$ につきまとめれば，

$${}_tV'_x = v^{n-t}\prod_{\tau=0}^{n-t-1}(p_{x+t+\tau}+k\,q_{x+t+\tau})$$

$$-\ {}_nP'_x\sum_{s=0}^{n-t-1} v^s\prod_{\tau=0}^{s-1}(p_{x+t+\tau}+k\,q_{x+t+\tau})$$

5. x才加入終身保険の才(t+1)保険年度の危険保険料 ${}_t\pi_x$ は，

$${}_t\pi_x = v\,q_{x+1}(1-{}_{t+1}V_x) = P_x - \{v\,{}_{t+1}V_x - {}_tV_x\}$$

$$\therefore\ (1+i)\,{}_t\pi_x = P_x(1+i) - {}_{t+1}V_x + (1+i)\,{}_tV_x$$

$$= P_x(1+i) - ({}_tV_x + \triangle\,{}_tV_x) + (1+i)\,{}_tV_x$$

$$= P_x(1+i) + i\,{}_tV_x - \triangle\,{}_tV_x$$

同様にして，

$$(1+i)\,{}_{t+1}\pi_x = P_x(1+i) + i\,{}_{t+1}V_x - \triangle\,{}_{t+1}V_x$$

以上の2つの式より

$$(1+i)\Delta\,{}_t\pi_x = i\,\Delta\,{}_tV_x - \Delta^2\,{}_tV_x$$

ところが

$${}_tV_x = 1-\frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x} = 1-\frac{1+a_{x+t}}{1+a_x}$$

であるから

$$\Delta\,{}_tV_x = -\frac{\Delta a_{x+t}}{1+a_x} = -(P_x+d)\,\Delta a_{x+t}$$

$$\Delta^2\,{}_tV_x = -(P_x+d)\,\Delta^2 a_{x+t}$$

$$\therefore\quad (1+i)\Delta\,{}_t\pi_x = (P_x+d)(\Delta^2 a_{x+t} - i\,\Delta a_{x+t})$$

従って，xのいかんにかかわらず

$$\Delta^2 a_x - i\,\Delta a_x > 0$$

が成立するならば，すべてのtについて　$\Delta\,{}_t\pi_x > 0$　が成立する。

6. $P_x^{(m)}$ ；年m回期首払保険料

$\bar{P}_x$ ；年央1回払保険料

n ；払込期間

とすれば，明らかに

$$P_x^{(m)}\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{(m)} \doteqdot \bar{P}_x\cdot\bar{a}_{x:\overline{n|}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (1)$$

である。

つぎに，保険料差額現価は題意により

$$(P_x^{(m)} - \bar{P}_x)\,\ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{(m)}$$

なるゆえ，これに(1)式より得られる　$P_x^{(m)} \doteqdot \bar{P}_x\cdot\dfrac{\bar{a}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{(m)}}$ を代入すれば

$$\doteqdot \bar{P}_x\,(\bar{a}_{x:\overline{n|}} - \ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{(m)}) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (2)$$

なお，

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n|}} \doteqdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \frac{m-1}{2m}\left(1-\frac{D_{x+n}}{D_x}\right)$$

$$\overline{a}_{x:\overline{n|}} \doteqdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{D_{x+n}}{D_x}\right)$$

を(2)式に代入し整頓すれば

$$\doteqdot -\frac{1}{2m}\overline{P}_x\left(1-\frac{D_{x+n}}{D_x}\right)$$

となる。

7. 定常状態とは加入者集団の年令別加入期間別の人員給与の分布が一定であり，したがって毎年一定の新規加入者および脱退者がそれぞれ一定の給与または給付が与えられて，加入または脱退する状態をいうものとする。オープン型総合保険料方式による初年度掛金額は次のように して与えられる。ただし，問題の本質を見失なわない程度に簡略化する。

$$C_1^{\mathrm{open\ Agg}} = \frac{\sum_{x=x_0}^{x_r-1}\left\{\sum_{t=0}^{x_r-x-1} d^{(w)}_{x+t}\cdot b_{x+t}\cdot v^{t+\frac{1}{2}}\cdot \alpha^{(w)}_{x-x_0+t}\cdot a^{(w)}_{x+t+\frac{1}{2}}\right.}{\sum_{x=x_0}^{x_r-1}\sum_{t=0}^{x_r-x-1}\ell_{x+t}\cdot b_{x+t}\cdot v^{t}+\left\{\sum_{x=x_0}^{x_r-1}\ell_x\cdot b_x\, v^{x-x_0}\right\}a_\infty}$$

$$\frac{\left.+\ell_{x_r}\cdot b_{x_r-1}\, v^{x_r-x}\cdot \alpha^{(r)}_{x_r-x_0}\cdot a^{(r)}_{x_r}\right\}+\left\{\sum_{x=x_0}^{x_r-1} d^{(w)}_x\cdot b_x\, v^{x-x_0+\frac{1}{2}}\cdot \alpha^{(w)}_{x-x_0}\cdot a^{(w)}_{x+\frac{1}{2}}\right.}{}$$

$$\frac{\left.+\ell_{x_r}\cdot b_{x_r-1}\cdot v^{x_r-x_0}\cdot \alpha^{(r)}_{x_r-x_0}\cdot a^{(r)}_{x_r}\right\}a_\infty}{}\times\left\{\sum_{x=x_0}^{x_r-1}\ell_x\cdot b_x\right\}$$

上式中の記号は次のように定義されたものである。

ℓ_x，x才の加入者数

$d^{(w)}_x$，x才の脱退者数

b_x ，χ才の給与

（以上の ℓ_x , $d_x^{(w)}$, b_x は実数と指数とを同一視する。）

$\alpha_t^{(w)}$， t年の中途脱退支給率

$\alpha_t^{(r)}$， t年の定年退職支給率

$a_x^{(w)}$，χ才の中途脱退年金現価率

$a_{x_r}^{(r)}$，χ_r才の定年退職年金現価率

χ_0　加入年令

χ_r　定年年令

$C_1^{\text{open Agg}}$ の定義式中の分子，分母の第一項は簡単な計算によってそれぞれ次のように変形することができる。

$$\text{分子第1項} = \frac{v}{d}\{\sum_{x=x_0}^{x_r-1} d_x^{(w)} \cdot b_x \cdot \alpha_{x-x_0}^{(w)} \cdot a_{x+\frac{1}{2}}^{(w)} \cdot (1+i)^{\frac{1}{2}} + \ell_{x_r} \cdot b_{x_r-1} \cdot \alpha_{x_r-x_0}^{(r)} \cdot a_{x_r}^{(r)}$$

$$- (\sum_{x=x_0}^{x_r-1} d_x^{(w)} \cdot b_x \cdot v^{x-x_0+\frac{1}{2}} \cdot \alpha_{x-x_0}^{(w)} \cdot a_{x+\frac{1}{2}}^{(w)} + \ell_{x_r} \cdot b_{x_r-1} \cdot v^{x_r-x_0} \cdot \alpha_{x_r-x_0}^{(r)} \cdot a_{x_r}^{(r)})\}$$

$$\text{分母第1項} = \frac{1}{d}\{\sum_{x=x_0}^{x_r-1} \ell_x b_x - v \sum_{x=x_0}^{x_r-1} \ell_x b_x v^{x-x_0}\}$$

これらを $C_1^{\text{open Agg}}$ の定義式に代入し $a_\infty = \dfrac{v}{d}$ を用いて整頓すれば，

$$C_1^{\text{open Agg}} = \sum_{x=x_0}^{x_r-1} d_x^{(w)} \cdot b_x \cdot \alpha_{x-x_0}^{(w)} \cdot a_{x+\frac{1}{2}}^{(w)} \cdot v^{\frac{1}{2}} + \ell_{x_r} \cdot b_{x_r-1} \cdot \alpha_{x_r-x_0}^{(r)} \cdot a_{x_r}^{(r)} \cdot v$$

これは年金現価積立方式による掛金額に等しい。したがってまた，上記定義式は次年度以降についても全く同様に妥当する。