〔問〕

昭和 37 年度　（問題）

午前の部

1. X，Yを，それぞれ2項分布B（3，p），B（2，p'）（$0<p<1$，$0<p'<1$）に従うたがいに独立な確率変数とするとき，次の確率を計算せよ。

$$P(X-Y \neq 1 \mid X+Y \neq 3)$$

すなわち，$X+Y \neq 3$の条件のもとで，$X-Y \neq 1$となる確率。

2. さいころを，それまでに出た目の数の和が3の倍数になるまで振りなおす。平均して何回振ることになるか。

3. $f(x)$を，

$$f(3)=7.5$$
$$f(2)+f(4)=20$$
$$f(1)+f(5)=23$$

を満足する第4次定差が，定数である関数とするとき，

$$f(0)+f(6)$$

を求めよ。

午後の部

1. 男5人女5人をランダムに横に一列に並べて，左から5人をグループA，右の5人をグループBとする。

a）グループAの中に，男がr人いる確率を求めよ。（$0 \leqq r \leqq 5$）

b）男の最年長者がグループAにはいったことを知って，男の最年少者もグループAにはいる確率を求めよ。（最年長者，最年少者は，それぞれ1人ずつしかいないとする。）

c）次の文章は a）の問題を$r=5$の場合について解いたものであるが，実はまちがいである（結果がちがってくる）。まちがえたわけを述べよ。

「この男女をA，B両グループにふり分けた過程をみると，結局男がどうふり分けられたかをみれば十分である。なぜなら，女のふり分け方は，男のふり分け方がきまるとA，

B両グループの人数がどちらも５人になるようにということで必然的にきまるから。
さて，男５人をランダムにＡ,Ｂ両グループにふり分けて，５人ともＡグループの方に行くという確率は$\left(\frac{1}{2}\right)^5$ 。これが求める確率である。」

2.
$$
\begin{aligned}
u_0+u_1+u_2+u_3+u_4 &= 207\\
\Delta u_0+\Delta u_1+\Delta u_2+\Delta u_3 &= 12\\
\Delta^2 u_0+\Delta^2 u_1+\Delta^2 u_2 &= -19\\
\Delta^3 u_0+\Delta^3 u_1 &= -6\\
\Delta^4 u_0 &= 92
\end{aligned}
$$

である。u_0 を求めよ。

昭和37年度　（解答）

午前の部

1. X，Yは独立であるから，

$$P(X=i,\ Y=j)=P(X=i)P(Y=j)=\binom{3}{i}p^i q^{3-i}\cdot\binom{2}{j}p'^j q'^{2-j}$$

（ここに，$q=1-p$，$q'=1-p'$）

したがって，$P(X=i,\ Y=j)$（$i=0,\cdots,3$；$j=0,1,2$）は，次の表のようになる。

	$P(Y=j)$	q'^2	$2p'q$	p'^2
	$i \backslash j$	0	1	2
q^3	0	*	*	*
$3pq^2$	1	$3pq^2q'^2$	*	$3pq^2p'^2$
$3p^2q$	2	*	$6p^2qp'q'$	*
p^3	3	$p^3q'^2$	*	$p^3p'^2$

これを使って，

$$P(X+Y=3)=P(X=3,\ Y=0)+P(X=2,\ Y=1)+P(X=1,\ Y=2)$$
$$=p^3q'^2+6p^2qp'q'+3pq^2p'^2$$

$$P(X-Y=1,\ X+Y\neq 3)=P(X=1,\ Y=0)+P(X=3,\ Y=2)$$
$$=3pq^2q'^2+p^3p'^2$$

$$P(X-Y\neq 1\mid X+Y\neq 3)=1-P(X-Y=1\mid X+Y\neq 3)$$

$$=1-\frac{P(X-Y=1,\ X+Y\neq 3)}{1-P(X+Y=3)}$$

$$=1-\frac{3pq^2q'^2+p^3p'^2}{1-p^3q'^2-6p^2qp'q'-3pq^2p'^2}$$

2. n 回ふりなおしても，それまでに出た目の和が１回も３の倍数にならない事象を A_n，
n 回ふってはじめて３の倍数になる事象を B_n とする。
A_n は次のような２つの排反な事象 $A_n^{(1)}$，$A_n^{(2)}$ の和事象となる。
$A_n^{(i)}$：n 回ふりなおしても，それまでに出た目の和が１回も３の倍数にならず，その n 回全部の目の合計は，３で割って i 余る。
C_i を，さいころをふって，i または $i+3$ の目が出る事象とすると，

$$P(A_1)=P(C_3^c)=\frac{2}{3}$$

$$P(A_n)=P\left(A_{n-1}^{(1)}\ C_2^c\right)+P\left(A_{n-1}^{(2)}\ C_1^c\right)$$ （$A_{n-1}^{(i)}$ と C_j は独立だから）

$$=P\left(A_{n-1}^{(1)}\right)P\left(C_2^c\right)+P\left(A_{n-1}^{(2)}\right)P\left(C_1^c\right)$$

$$=\frac{2}{3}P\left(A_{n-1}^{(1)}\right)+\frac{2}{3}P\left(A_{n-1}^{(2)}\right)=\frac{2}{3}P\left(A_{n-1}\right)$$

$$\therefore\ P(A_n)=\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

一方，$B_n=A_{n-1}A_n^c$，$A_n\subset A_{n-1}$ だから

$$P(B_n)=P(A_{n-1})-P(A_n)=\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

（これは $n\geqq 2$ の場合だが，$n=1$ の場合は，$P(B_1)=\frac{1}{3}$ で，上の式がやはり成り立つ。）

したがって，求める平均は，

$$\sum_{n-1}^{\infty}n\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\sum_{n-1}^{\infty}n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

一般に，$|x|<1$ なら

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

両辺を微分して，

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}n\ x^{n-1}$$

$$\therefore\ \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\ \frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}\ 3^2=3$$

3. $g(x)=f(x+3)+f(-x+3)$

とおくと，$f(x)$ が高々4次式であるから，$g(x)$ も高々4次式である。

$g(0)$，$g(\pm 1)$，$g(\pm 2)$ が既知となるから，$g(3)=f(0)+f(6)$ は次のようにして求められる。

x	$g(x)$	$\Delta g(x)$	$\Delta^2 g(x)$	$\Delta^3 g(x)$	$\Delta^4 g(x)$
-2	23				
		-3			
-1	20		-2		
		-5		12	
0	15		10		-24
		5		-12	
1	20		-2		
		3			
2	23				

$$\therefore\quad g(x)=15+\frac{10}{2}x^2-\frac{24}{4!}x^2(x^2-1)\qquad (\text{Stirling})$$

$$=15+6x^2-x^4$$

$$\therefore\quad g(3)=-12$$

(注) $f(x)$ は5次式でもさしつかえない。なぜなら，$g(x)$ は高々5次の偶関数（$g(x)=g(-x)$）になるが，偶関数であるからには，奇数次の項は消えるので，高々4次式となるから。

別解） $\Delta^6 f(x)=0$

$$\therefore\quad 0=(E-1)^6 f(0)=(E^6-6E^5+15E^4-20E^3+15E^2-6E+1)f(0)$$

$$\therefore\quad \{f(0)+f(6)\}-6\{f(1)+f(5)\}+15\{f(2)+f(4)\}-20f(3)=0$$

$$\therefore\quad f(0)+f(6)=6\times 23-15\times 20+20\times 7.5$$

$$=138-300+150=-12$$

午 後 の 部

1.

a） これは，この男女の中から5人とった組み合わせが，r 人の男を含む確率である。そのような組み合わせの数は $\binom{10}{5}$。 そのうち，男 r 人を含むものは，5人の男から r

人を，5人の女から$5-r$人を選ぶ方法の数になるから，$\binom{5}{r}\binom{5}{5-r}=\binom{5}{r}^2$

したがって求める確率は，$\binom{5}{r}^2\div\binom{10}{5}$

b） 5人選び出したうち，男の最年長者がはいっている組み合わせの数は$\binom{9}{4}$。そのうち男の最年少者も選び出されている組み合わせの数は$\binom{8}{3}$。したがって，求める確率は，

$$\binom{8}{3}\div\binom{9}{4}=\frac{8!}{3!5!}\div\frac{9!}{4!5!}=\frac{4}{9}$$

c） 男5人をランダムにA，Bグループにふり分けるというのは，男の各人をつねに確率$\frac{1}{2}$でグループAにふり分けると解釈しているわけだが，b）の結果をみてわかるように，ある男がグループAにふり分けられる確率は，すでに男が何人かどちらかのグループにはいっているということで変ってくるので，それをつねに$\frac{1}{2}$としたのがまちがいである。

2. $u_\nu=(1+\triangle)^\nu u_0$ だから

$u_1=(1+\triangle)u_0$

$u_2=(1+2\triangle+\triangle^2)u_0$

$u_3=(1+3\triangle+3\triangle^2+\triangle^3)u_0$

$u_4=(1+4\triangle+6\triangle^2+4\triangle^3+\triangle^4)u_0$

$-6=\triangle^3u_0+\triangle^3u_1=2\triangle^3u_0+\triangle^4u_0=2\triangle^3u_0+92$

$\therefore\ \triangle^3u_0=-49$

同様に，$-19=\triangle^2u_0+\triangle^2u_1+\triangle^2u_2=3\triangle^2u_0+3\triangle^3u_0+\triangle^4u_0$

$=3\triangle^2u_0+3\times(-49)+92=3\triangle^2u_0-55$

$\therefore\ \triangle^2u_0=12$

また，$12=\triangle u_0+\cdots+\triangle u_3=4\triangle u_0+6\triangle^2u_0+4\triangle^3u_0+\triangle^4u_0$

$=4\triangle u_0+6\times12+4\times(-49)+92=4\triangle u_0-32$

$\therefore\ \triangle u_0=11$

また，　$207 = u_0 + \cdots + u_4 = 5u_0 + 10\triangle u_0 + 10\triangle^2 u_0 + 5\triangle^3 u_0 + \triangle^4 u_0$

$= 5u_0 + 10 \times 11 + 10 \times 12 + 5 \times (-49) + 92 = 5\triangle u_0 + 77$

$\therefore\ u_0 = 26$