〔問〕

昭和37年度　（問題）

午前の部

1. 養老保険で，月払純保険料が毎年 β_t (t＝1, 2,……, $n-1$) だけ増加するように決めたとする。

初年度の月払純保険料 $P_1^{(12)}$

第t年度の月払純保険料 $P_t^{(12)} = P_{t-1}^{(12)} (1+\beta_{t-1})$

としたときの純保険料 $P_1^{(12)}$ を求める計算式を出し，かつ $\dfrac{\partial P_1^{(12)}}{\partial \beta_t} < 0$ であることを証明せよ。

2. 平準純保険料式責任準備金は保険料積立金と未経過保険料に分解されることを示し，日本において充足保険料式責任準備金といわれている責任準備金の未経過保険料についてその算式を記せ。

午後の部

1. x才加入年払全期払込n年満期養老保険の第t保険年度末責任準備金を ${}_{t-1}V_{x+1} + \pi \cdot {}_tU_x$ としたとき，この責任準備金はチルメル式であることを示し，そのチルメル割合を求めよ。

ここに ${}_{t-1}V_{x+1}$ は全期払込終身保険の平準純保険料式責任準備金，${}_tU_x$ は

$$\frac{D_x + D_{x+1} + \cdots + D_{x+t-1}}{D_{x+t}}$$

とし，かつπは $\pi \cdot {}_tU_x = 1 - {}_{n-1}V_{x+1}$ によって求めたものとする。

2. 利源別契約者配当において，現行約款の配当条項のもとで，配当金の計算期間と支払時期との関係からみて，最も理論的と思われる配当率の算式を記せ。

昭和37年度　（解答）

午前の部

1. 収入の現価は

$$12\left[P_1^{(12)}\ddot{a}_{x:\overline{1}|}^{(12)}+P_2^{(12)}{}_{1|1}\ddot{a}_x^{(12)}+P_3^{(12)}{}_{2|1}\ddot{a}_x^{(12)}+\cdots+P_{n-1}^{(12)}\cdot{}_{n-2|1}\ddot{a}_x^{(12)}+P_n^{(12)}{}_{n-1|1}\ddot{a}_x^{(12)}\right]$$

$$=12P_1^{(12)}\sum_{\nu=0}^{n-1}{}_{\nu|1}\ddot{a}_x^{(12)}\cdot(1+\beta_0)(1+\beta_1)(1+\beta_2)\cdots(1+\beta_\nu)\cdots(1)$$

但し$\beta_0=0$とする。

この式を　$12P_1^{(12)}a$とおくと，支出の現価は$\bar{A}_{x:\overline{n}|}$であることから

$$P_1^{(12)}=\frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{12a}\quad となる$$

β_tを大きくすると，(1)式のaの表現中，Σのなかの$\nu<t$なる項は不変，$\nu\geqq t$なる項は大きくなるから，aも大きくなる。

したがって，$P_1^{(12)}$は小さくなる。すなわち

$$\frac{\partial P_1^{(12)}}{\partial\beta_t}<0$$

2. 第t保険年度末の責任準備金を${}_tV$，第t＋1保険年度始の責任準備金を${}_{t+0}V$とし，平準純保険料をPとすれば，

$${}_{t+0}V={}_tV+P$$

である。

一方第t＋1保険年度末の責任準備金を${}_{t+1}V$とし，その間の経過$t+f$（$0\leqq f\leqq 1$）における責任準備金を${}_{t+f}V$であらわすと，

${}_{t+0}V$は${}_{t+1}V$まで連続的に変化するものとみなされ，これを経過fの一次関数と考えれば，

$${}_{t+f}V={}_{t+0}V+f\left({}_{t+1}V-{}_{t+0}V\right)$$

$$=\{{}_tV+f({}_{t+1}V-{}_tV)\}+(1-f)P$$

と分解される。

${}_tV+f({}_{t+1}V-{}_tV)$ を保険料積立金，第2項$(1-f)$ Pを未経過保険料と称する。このPはチルメル式の場合も同様に考えられるが，わが国の場合，維持費の未経過部分も入れて，全期払年k回分割払養老保険を例にとると，次のように計算される。

1. 初年度

$$\frac{1}{2k}\left\{\left(P+\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}+\gamma'\right)-\alpha'\right\} と \frac{1}{2}v^{\frac{1}{2}}q_x \left(又は\frac{1}{2}(v^{\frac{1}{2}}q_x+\gamma')\right)$$

のいずれか大きい方。

2. 次年度以降チルメル期間中

$$\frac{1}{2k}\left(P+\frac{\alpha'}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}+\gamma'\right)$$

3. チルメル期間経過後

$$\frac{1}{2k}\left(P+\gamma'\right)$$

ただし，初年度は，左の項が右の項より小さい場合には保険金支払と事業費支出に不充分である理由から，そのうちの大きい方をとっているわけである。

上式中のいわゆる充足保険料$P+\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}+\gamma'-\alpha'$，$P+\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}+\gamma'$，$P+\gamma'$ は，(チルメル純保険料)+(維持費の一部)として説明される。すなわち，営業保険料中，チルメル純保険料および維持費の一部γ' だけが年間(保険料分割払の場合はその分割された期間)をとおして一様に支出されてゆき，残りの部分は収入があると同時に保険年度始(保険料分割払の場合は保険料払込のあるたび)に一時に支出されるので，残りの部分は責任準備金に全然影響を及ぼさないとみるのである。

この場合，新契約費α'(かならずしも営業保険料算定に用いるαとは一致しない。)も，収入があると同時に支出されたとみて，計算上無視したわけである。しかし，実際に保険料積立金の算式では，新契約当初に支出されて，保険料積立金が$-\alpha'$ になるとしている。この場合は，収入側の保険料でも，α' を無視するわけにゆかないから，収入はチルメル純保険料$+\gamma'+\alpha'$，すなわち

$$\left\{P+\frac{\alpha'}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}+\gamma'-\alpha'\right\}+\alpha'=P+\frac{\alpha'}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}+\gamma'$$

としなければならない。したがって初年度未経過保険料は，

$$\frac{1}{2k}\left(P+\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}+\alpha'\right)$$

となる。

しかし，日本では Negative Reserve を認めず，経過0の保険料積立金は$-\alpha'$でなく0とするので，この式は使われないわけである。

午 後 の 部

1.

$$ {}_tU_x=\frac{D_x+D_{x+1}+D_{x+2}+\cdots+D_{x+t-1}}{D_{x+t}}$$

$$=\frac{N_x-N_{x+t}}{D_{x+t}}=\frac{N_x-N_{x+n}}{D_{x+t}}-\frac{N_{x+t}-N_{x+n}}{D_{x+t}}$$

$$=\frac{D_x}{D_{x+t}}\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|}-\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

$$ {}_nU_x=\frac{D_x+D_{x+1}+\cdots+D_{x+n-1}}{D_{x+n}}=\frac{N_x-N_{x+n}}{D_{x+n}}$$

$$=\frac{D_x}{D_{x+n}}\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

と変形される。

$$\pi\ {}_nU_x=1-{}_{n-1}V_{x+1}=1-\left(1-\frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x+1}}\right)=\frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x+1}}$$

であることから

$$\pi=\frac{D_{x+n}}{D_x}\ \frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\cdot\ddot{a}_{x+1}}$$

これを用いると

$$
{}_{t-1}V_{x+1} + \pi \cdot {}_{t}U_x = \left(1 - \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_{x+1}}\right) + \frac{D_{x+n}}{D_x} \frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}} \cdot \ddot{a}_{x+1}} \times \left(\frac{D_x}{D_{x+t}} \ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}\right)
$$

$$
= 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_{x+1}} + \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} \cdot \frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x+1}} - \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot \frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x+1}} \times \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}
$$

$$
= 1 - \frac{1}{\ddot{a}_{x+1}} \left(\ddot{a}_{x+t} - \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} \ddot{a}_{x+n}\right) - \frac{D_{x+n}}{D_x} \frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x+1}} \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}
$$

$$
= 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x+1}} - \frac{D_{x+n}}{D_x} \frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x+1}} \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}
$$

$$
= 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \left(\ddot{a}_{x:\overline{n|}} + \frac{D_{x+n}}{D_x} \ddot{a}_{x+n}\right) \frac{1}{\ddot{a}_{x+1}}
$$

$$
= 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x+1}}
$$

$$
= 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} - \left(\frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x+1}} - 1\right) \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}
$$

$$
= {}_{t}V_{x:\overline{n|}} - \left(\frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x+1}} - 1\right) \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}
$$

したがって，与えられた式は全期チルメル式であり，そのチルメル歩合は

$\dfrac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x+1}} - 1$ である。

2. 現行約款によると，事業年度末に契約締結後1年をこえている有効契約に割り当て，次の年度の契約応当日に支払うことが原則である。

事業年度と保険年度が一致するときは，第t回目の剰余をB_tとすれば保険金年度末払の場合，利源式方式によれば

$$B_t = ({}_{t-1}V + P' - L)\Delta i + (1 + i')\Delta L - \Delta q \cdot (1 - {}_tV)$$

ただし，P'は営業保険料，Lは予定経費，i'は実際利廻りである。

一般には事業年度と保険年度は一致せず，経過f $(0 < f < 1)$で契約したものについては

$$f \cdot B_{t-1} + (1-f) B_t$$

を支払うのが理論的であると思われる。しかし，実際には事務の能率性，簡便性から

$$B_t = \Delta i \cdot {}_tV + \Delta L + \Delta q\,(1 - {}_tV)$$

が使用される。

1の別解

$W_t = {}_{t-1}V_{x+1} + \pi \cdot {}_tU_x$ とおく。

$v\,p_{x+t} \cdot {}_tV_{x+1} = {}_{t-1}V_{x+1} + P_{x+1} - v\,q_{x+t} \quad (1 \leqq t \leqq n-1)$

(保険金即時払なら，最後の$-v\,q_{x+t}$を$-v^{\frac{1}{2}}q_{x+t}$とする)

両辺にD_{x+t}をかけて

$$D_{x+t+1} \cdot {}_tV_{x+1} = D_{x+t} \cdot {}_{t-1}V_{x+1} + P_{x+1}\,D_{x+t} - C_{x+t} \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

(保険金即時払なら最後の$-C_{x+t}$は$-\overline{C}_{x+t}$とする。以下同様)

一方 $\pi\,D_{x+t} = \pi(N_{x+t} - N_{x+t+1}) = \pi(N_x - N_{x+t+1}) - \pi(N_x - N_{x+t})$

$$= \pi\,{}_{t+1}U_x D_{x+t+1} - \pi\,{}_tU_x\,D_{x+t} \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

(1)−(2)を整頓すると，

$$D_{x+t+1}({}_tV_{x+1} + \pi\,{}_{t+1}U_x) = D_{x+t}({}_{t-1}V_{x+1} + \pi \cdot {}_tU_x)$$
$$+ (P_{x+1} + \pi)D_{x+t} - C_{x+t} \quad (1 \leqq t \leqq n-1)$$

すなわち

$$D_{x+t+1}\,W_{t+1} = D_{x+t}\,W_t + (P_{x+1} + \pi)\,D_{x+t} - C_{x+t} \quad (1 \leqq t \leqq n-1) \cdots\cdots (3)$$

πのきめ方から， $W_n = 1$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (4)

W_t（$t=0$，1，……，n）は(3)，(4)から，x才加入n年養老のチルメル式責任準備金であることが明らかである。

そのチルメル歩合αは，

$$P_{x:\overline{n}|}+\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}=P_{x+1}+\pi$$

を解くことによって求まる。すなわち，

$$\alpha=\left(P_{x+1}+\pi-P_{x:\overline{n}|}\right)\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

特に，問題の養老保険が保険金期末払の場合は，このαは次のように，簡単な形になる。

$$\pi=\frac{1}{{}_nU_x}\left(1-{}_{n-1}V_{x+1}\right)=\frac{D_{x+n}}{D_x}\ \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\ \frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x+1}}$$

$$P_{x+1}-P_{x:\overline{n}|}=\left(\frac{1}{\ddot{a}_{x+1}}-d\right)-\left(\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}-d\right)=\frac{1}{\ddot{a}_{x+1}}-\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

$$\therefore\ \alpha=\frac{D_{x+n}}{D_x}\ \frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x+1}}+\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x+1}}-1=\frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x+1}}-1$$

2の別解

年掛契約に限って解答する。

B_t：時点tで支払われる通常の配当（$2\leqq t\leqq n$，tは整数）

B_t^d：区間（t，t＋1）で支払われる死亡後配当（死亡保険金と一緒に支払われる。）

B_n^m：満期後配当（満期保険金と一緒に支払われる。）

G_t：区間（t，t＋1）で発生する剰余（危険準備金繰入額等は必要経費とみなして予め控除する。）

l_x^T：実際経験による残存数で

$$l_{x+1}^T=l_x^T-d_x^d-d_x^w$$

ここに，d_x^dは死亡者数，d_x^wは解約者数とする。

また，$D_x^T=v'^x l_x^T$，$\overline{C}_x^d=v'^{x+\frac{1}{2}}d_x^d$とする。ここに，$v'$は$i'$を実際利回りとして，

$$v'=\frac{1}{1+i'}$$

以上の記号を使うと，契約者の群団と保険会社との間の公平性は，

$$\sum_{t=0}^{n-1}\frac{D^T_{x+t+1}}{D^T_x}G_t=\sum_{t=2}^{n}\frac{D^T_{x+t}}{D^T_x}B_{x+t}+\sum_{t=1}^{n-1}\frac{\overline{C}^d_{x+t}}{D^T_x}B^d_{x+t}+\frac{D^T_{x+n}}{D^T_x}B^m_{x+n}$$

のように表現される。

これに，さらに脱退してゆく時点のことなる契約者相互間の公平性を加えてみる。発生した剰余はできるかぎりはやく返すのがよいが，現行約款では初年度配当をしないことになっている。初年度剰余 G_0 は，

1° B_2 に含ませて払う。他の G_i は，その年度末に払う。

2° 全期間または，ある期間に分割して払う。他の G_i は，その年度末に払う。

3° $G_0 \to B_2$ ，$G_1 \to B_3$ ，……，$G_{n-2} \to B_n$ ，$G_{n-1} \to B^m_n$ のように，剰余はすべて1年すえおいてから払う。

等の配当方式が考えられる。ただ，満期後配当 B^m_n ，死亡後配当 B^d_t を出すためには，通常の配当をけずっておく必要がある。

満期後配当 B^m_n が，大体 B_n と匹敵するぐらいのものを出すためには，3° の方式によるのが最も自然であるので，以下これにしたがう。すると，G_t を，B_{t+2} ，B^d_{t+1} で（$0 \leqq t \leqq n-2$），G_{n-1} を B^m_n で処分することになるから

$$\begin{cases} D^T_{x+t+1}\cdot G_t = D_{x+t+2}\,B_{t+2}+\overline{C}^d_{x+t+1}\,B^d_{t+1} & (0\leqq t\leqq n-2) \\ G_{n-1}=B^m_n & \end{cases} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

普通 $B^d_{t+1}=B_{t+2}$ としているので，この条件を入れると，(1)式から配当が一意的に求まることになる。