損保数理（問題）

特に断りがないかぎり、消費税については考慮しないこととする。また、免責金額および支払限度額は１事故あたりのものであり、各クレームは独立であるものとする。

問題１． 次のⅠ～Ⅶの各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。　　Ⅰ、Ⅳ、Ⅴ：各６点　Ⅱ、Ⅲ、Ⅵ、Ⅶ：各７点　（計４６点）

Ⅰ．ある保険商品の営業保険料構成は下表のようになっている。

純保険料	個々のクレーム額 X の平均 μ_X
社費	営業保険料にかかわらず一定額
代理店手数料	営業保険料の 20%
利潤	個々のクレーム額 X の分散 $\sigma_X{}^2$ を用いて、$h\sigma_X{}^2$ （h は定数）とする

このとき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。

（１）個々のクレーム額 X が確率密度関数 $f(x)=3x^{-4}\quad(x>1)$ に従っていることを前提に保険商品を設計したところ、この保険商品の料率構成割合は、純保険料率が 50%、社費率が 25%、代理店手数料率が 20%、利潤率が 5%となった。h の値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（Ａ）0.05　（Ｂ）0.10　（Ｃ）0.15　（Ｄ）0.20　（Ｅ）0.25
（Ｆ）0.30　（Ｇ）0.35　（Ｈ）0.40　（Ｉ）0.45　（Ｊ）0.50

（２）（１）の保険商品の販売後、クレームデータが十分に蓄積されたため、料率検証を行ったところ、この保険商品の個々のクレーム額 X の確率密度関数が以下のとおり変化していることが明らかとなったため、営業保険料を改定することとした。

$$f(x)=4x^{-5}\quad(x>1)$$

（１）で求めた h の値を変更しないとき、営業保険料の減少率に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（Ａ）6.3%　（Ｂ）7.3%　（Ｃ）8.3%　（Ｄ）9.3%　（Ｅ）10.3%
（Ｆ）11.3%　（Ｇ）12.3%　（Ｈ）13.3%　（Ｉ）14.3%　（Ｊ）15.3%

Ⅱ．ある保険契約のクレーム 1 件あたりの損害額分布は、パレート分布 $f(x) = qx^{-(q+1)} \quad (x > 1)$ に従うことが分かっている。この保険契約にはエクセス方式の免責が適用されており、免責金額が 3 のときに支払のあった 15 件のクレーム額（損害額－免責金額）が以下のとおり記録されているとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

3 , 14 , 26 , 7 , 5 , 10 , 45 , 11 , 23 , 4 , 33 , 17 , 15 , 9 , 4

なお、必要があれば $3^{0.1} = 1.116$ 、$5^{0.1} = 1.175$ 、$100^{0.1} = 1.585$ 、$105^{0.1} = 1.593$ を使用すること。

（1）上記 15 件のサンプルデータを用いてモーメント法によりパラメータ q を推定した場合、推定値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）1.10　（B）1.20　（C）1.30　（D）1.40　（E）1.50
（F）1.60　（G）1.70　（H）1.80　（I）1.90　（J）2.00

（2）免責金額を 3 から 5 に変更するとともに、支払限度額として 100 を新設した場合、保険金支払とならない事故も含んだすべての契約に対する支払保険金の期待値の減少率に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。ただし、パラメータ q は（1）で選択した数値を用いることとする。

（A）30%　（B）35%　（C）40%　（D）45%　（E）50%
（F）55%　（G）60%　（H）65%　（I）70%　（J）75%

余白ページ

Ⅲ．事故年度から翌々年度までに保険金支払いが完了する保険商品について、次の実績データを基に 2015 年度末の支払備金（普通支払備金＋ＩＢＮＲ備金）を累計発生保険金により見積もることとする。なお、予測手法はベンクテンダー法を用いることとする。このとき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。

＜事故年度別　経過年度別単年度発生保険金の推移＞

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2013	4,240	530	200
2014	4,530	600	
2015	4,900		

＜事故年度別　既経過保険料と 2015 年度末累計支払保険金＞

事故年度	既経過保険料	2015 年度末累計支払保険金
2013	9,000	4,970
2014	9,800	4,830
2015	11,000	4,550

＜計算の前提＞

・累計発生保険金のロスディベロップメントファクターの予測値には、既知の対応する事故年度別ロスディベロップメントファクターを単純平均した値を用いる。

・インフレ率は考慮しない。

・最終累計発生保険金の当初予測値は、事故年度別既経過保険料に予定損害率（各年度とも 60%とする。）を乗じた値を使用し、信頼係数には 2015 年度末における保険金出現割合（チェインラダー法により推定した事故年度別の最終累計発生保険金に対する 2015 年度末累計発生保険金の割合）を使用する。

・ボーンヒュッターファーガソン法の計算過程において使用するロスディベロップメントファクターには、チェインラダー法により推定したロスディベロップメントファクターと同じ数値を使用する。

なお、計算の途中において、保険金・支払備金については全て小数点以下第 1 位を四捨五入して整数値を用い、ロスディベロップメントファクター、信頼係数および保険金出現割合については全て小数点以下第 4 位を四捨五入して小数点以下第 3 位までの数値を用いることとする。

（1）2015 事故年度の信頼係数に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）0.800　（B）0.810　（C）0.820　（D）0.830　（E）0.840
（F）0.850　（G）0.860　（H）0.870　（I）0.880　（J）0.890

（2）ベンクテンダー法により推定した 2015 年度末支払備金に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）1,710　（B）1,730　（C）1,750　（D）1,770　（E）1,790
（F）1,810　（G）1,830　（H）1,850　（I）1,870　（J）1,890

Ⅳ．複合分類リスクの料率算定手法につき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。

（１）以下の文中の（ア）に当てはまる最も適切な言葉は、【選択肢】のうちどれか。

Jung は、複合分類リスクの構造が「(ア)」で、複合等級リスクが互いに独立でポアソン分布に従うとき、料率係数の決定方法として最尤法を用いることができることを示した。

危険標識をＡ、Ｂの 2 種類とし、その危険度に応じてＡの危険等級を $a_1, a_2, \ldots, a_k$ 、Ｂの危険等級を $b_1, b_2, \ldots, b_l$ に分けるものとする。a_i と b_j とで定められる部分リスク (a_i, b_j) のエクスポージャー数を n_{ij} 、相対クレームコスト指数を r_{ij} 、r_{ij} の推定値を $\hat{r}_{ij}$ で表す。

上記の仮定のもとで尤度関数 L は次のように表される。

$$L = \prod_{i,j} e^{-n_{ij}\hat{r}_{ij}} \frac{(n_{ij}\hat{r}_{ij})^{n_{ij}r_{ij}}}{(n_{ij}r_{ij})!}$$

a_i 、b_j に対応する料率係数をそれぞれ x_i 、y_j とし、その推定値をそれぞれ $\hat{x}_i$ 、$\hat{y}_j$ とすると、尤度関数 L を最大にする $\hat{r}_{ij}$ は次の連立方程式を解くことによって求められる。

$$\frac{\partial \log L}{\partial \hat{x}_i} = 0 \quad 、 \quad \frac{\partial \log L}{\partial \hat{y}_j} = 0$$

タリフ構造が「(ア)」の場合、上記の連立方程式は Minimum Bias 法の連立方程式と一致し、Jung 法と Minimum Bias 法の結果は一致する。

【選択肢】
（Ａ）加法型　　（Ｂ）乗法型　　（Ｃ）指数型　　（Ｄ）ポアソン型

（2）ある保険会社の自動車保険の料率は、年齢（X歳未満かX歳以上）と地域（A地域かB地域）の２つの危険標識で複合的に区分されている。この保険種目に関するある年度の実績統計を分析したところ、各リスク区分の経過台数およびクレーム総額は以下のとおりであった。

＜経過台数＞

	A地域	B地域	計
X歳未満	$E_{11}=200$	$E_{12}=150$	$E_{1\bullet}=350$
X歳以上	$E_{21}=100$	$E_{22}=150$	$E_{2\bullet}=250$
計	$E_{\bullet 1}=300$	$E_{\bullet 2}=300$	$E_{\bullet\bullet}=600$

＜クレーム総額＞

	A地域	B地域	計
X歳未満	$C_{11}=58$	$C_{12}=96$	$C_{1\bullet}=154$
X歳以上	$C_{21}=20$	$C_{22}=126$	$C_{2\bullet}=146$
計	$C_{\bullet 1}=78$	$C_{\bullet 2}=222$	$C_{\bullet\bullet}=300$

① 年齢区分「X歳以上」、地域区分「B地域」に対応する相対クレームコスト指数 r_{22} の値に最も近いものは、選択肢のうちどれか。なお、計算の途中において、クレームコストおよび相対クレームコスト指数は、すべて小数点以下第 4 位を四捨五入して小数点以下第 3 位までの数値を用いることとする。

（A）0.200　（B）0.400　（C）0.584　（D）0.640　（E）0.740
（F）0.840　（G）1.168　（H）1.280　（I）1.480　（J）1.680

② この複合分類リスクの構造は「(ア)」であるものとして、２つの危険標識それぞれについての料率係数を Minimum Bias 法により求めるとき、地域区分のうち「B地域」に対応する料率係数 y_2 の値に最も近いものは、選択肢のうちどれか。なお、年齢区分「X歳未満」に対応する料率係数 x_1 は、それに対応する相対クレームコスト指数に等しいものと仮定する。

（A）0.500　（B）0.520　（C）0.540　（D）0.560　（E）0.580
（F）1.500　（G）1.520　（H）1.540　（I）1.560　（J）1.580

Ｖ．ある保険会社において、Ａ、Ｂ、Ｃの保険商品を取り扱っている。また、商品Ａ、Ｂ、Ｃは、次の特約再保険を有している。

＜商品Ａ＞

項目	金額
保有許容額	10
第 1 次超過額再保険特約の出再限度額	60（6 ライン）
第 2 次超過額再保険特約の出再限度額	50（5 ライン）

保険金額が保有許容額を超える場合は、保有許容額を超過する部分が第 1 次超過額再保険特約に出再される。また、保険金額が保有許容額と第 1 次超過額再保険の出再限度額の合計値を超える場合は、更に第 2 次超過額再保険特約に出再されるものとする。

＜商品Ｂ＞

特約再保険の種類	出再割合
比例再保険特約	40%

＜商品Ｃ＞

特約再保険の種類	カバーリミット	エクセスポイント
超過損害額再保険特約	20	5

商品Ａ、Ｂ、Ｃに対して、契約が 1 件ずつ締結されたとする。ここで、商品Ａの保険金額は 100、元受純保険料は 30、商品ＢおよびＣの年間クレーム件数、個々のクレーム額の分布は下表のとおりとする。なお、各クレームとクレーム額は独立とし、クレーム額ゼロであるクレームは発生しないとする。

クレーム件数	発生確率
0	0.1
1	0.3
2	0.6

クレーム額	発生確率
5	0.45
10	0.10
15	0.45

再保険料については、付加保険料を考慮しないこととするとき、次の（1）～（3）の各問に答えなさい。

（1）商品Aの契約にかかる再保険料（第 1 次超過額再保険特約にかかる再保険料と第 2 次超過額再保険特約にかかる再保険料の合計額）に最も近いものは、選択肢のうちどれか。

（A）3.0	（B）8.0	（C）10.0	（D）12.0	（E）15.0
（F）18.0	（G）21.0	（H）24.0	（I）27.0	（J）30.0

（2）商品Cの契約にかかる再保険料に最も近いものは、選択肢のうちどれか。

（A）3.0	（B）8.0	（C）10.0	（D）12.0	（E）15.0
（F）18.0	（G）21.0	（H）24.0	（I）27.0	（J）30.0

（3）商品A、B、Cの契約にかかる再保険料の最大値と最小値の差に最も近いものは、選択肢のうちどれか。

（A）3.0	（B）8.0	（C）10.0	（D）12.0	（E）15.0
（F）18.0	（G）21.0	（H）24.0	（I）27.0	（J）30.0

Ⅵ. 中途返れい金のある年払契約の積立型基本特約において、満期返れい金をW、中途返れい金をR、保険期間をn年、保険始期から中途返れい金の支払までの期間をj年、予定利率をi、現価率を$v(=1/(1+i))$、予定消滅率qを考慮した現価率を$\phi(=(1-q)v)$とする。このとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

（1）$t \geq j$での第t保険年度末払戻積立金は、選択肢のうちのどれか。

（A）$\left(W\phi^{n-t}+R\phi^{j-t}\right)\dfrac{1-\phi^t}{1-\phi}-R\phi^{j-t}$　（B）$\left(W\phi^{n-t}+R\phi^{j-t}\right)\dfrac{1-\phi^t}{1-\phi}$

（C）$\left(W\phi^{n-t}+R\phi^{j-t}\right)\dfrac{1-\phi}{1-\phi^n}-R\phi^{j-t}$　（D）$\left(W\phi^{n-t}+R\phi^{j-t}\right)\dfrac{1-\phi}{1-\phi^n}$

（E）$\left(W\phi^{n-t}+R\phi^{j-t}\right)\dfrac{1-\phi^n}{1-\phi^t}-R\phi^{j-t}$　（F）$\left(W\phi^{n-t}+R\phi^{j-t}\right)\dfrac{1-\phi^n}{1-\phi^t}$

（G）$\left(W\phi^{n-t}+R\phi^{j-t}\right)\dfrac{1-\phi^t}{1-\phi^n}-R\phi^{j-t}$　（H）$\left(W\phi^{n-t}+R\phi^{j-t}\right)\dfrac{1-\phi^t}{1-\phi^n}$

（I）$\left(W\phi^{n-t}+R\phi^{j-t}\right)\dfrac{1}{1-\phi^n}-R\phi^{j-t}$　（J）$\left(W\phi^{n-t}+R\phi^{j-t}\right)\dfrac{1}{1-\phi^n}$

（K）いずれにも該当しない

（2）払戻積立金がすべての保険年度において負にならないために満たすべき関係式として正しいものは、選択肢のうちのどれか。

（A）$R \leq W\phi^{n-j}\dfrac{1-\phi^j}{\phi^j-\phi^n}$　（B）$R \geq W\phi^{n-j}\dfrac{1-\phi^j}{\phi^j-\phi^n}$　（C）$R \leq W\phi\dfrac{1-\phi^j}{\phi^j-\phi^n}$

（D）$R \geq W\phi\dfrac{1-\phi^j}{\phi^j-\phi^n}$　（E）$R \leq W\phi^{n-j}\dfrac{1-\phi^j}{\phi-\phi^n}$　（F）$R \geq W\phi^{n-j}\dfrac{1-\phi^j}{\phi-\phi^n}$

（G）$R \leq W\phi^{n-j}\dfrac{1-\phi}{\phi^j-\phi^n}$　（H）$R \geq W\phi^{n-j}\dfrac{1-\phi}{\phi^j-\phi^n}$　（I）$R \leq W\phi^{n-j}$

（J）$R \geq W\phi^{n-j}$　（K）いずれにも該当しない

Ⅶ．ある保険商品の年間支払保険金 X は平均 $1/\beta$ の指数分布に従うことがわかっている。このとき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。なお、必要があれば $\log 2 = 0.693$、$\log 3 = 1.099$、$\log 5 = 1.609$ を使用すること。

（１） $\beta = 0.5$ のとき、この保険商品の年間支払保険金 X の 95%VaR の値は $\boxed{\quad ① \quad}$ となり、95%$TVaR$ の値は $\boxed{\quad ② \quad}$ となる。①、②に当てはまる数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

（Ａ）4.0　（Ｂ）4.5　（Ｃ）5.0　（Ｄ）5.5　（Ｅ）6.0
（Ｆ）6.5　（Ｇ）7.0　（Ｈ）7.5　（Ｉ）8.0　（Ｊ）8.5

（２）この保険商品を n 年間販売したときの毎年の年間支払保険金 $X_1, X_2, \cdots, X_n$（互いに独立に平均 $1/\beta$ の指数分布に従う）について、最大支払保険金 $M_n = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ を考える。

このとき、$Z_n = (M_n - d_n)/c_n$, $c_n = 1/\beta$, $d_n = (\log n)/\beta$ とすると、Z_n の分布関数 $F_{Z_n}(x)$ は以下のとおりとなる。

$$F_{Z_n}(x) \xrightarrow{n\to\infty} \left(\boxed{\ ③\ }\right)^{-\left(\boxed{\ ④\ }\right)^{\boxed{\ ⑤\ }}} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

また、$\beta = 0.5, n = 100$ のとき、上記の近似分布を用いて最大支払保険金 M_n を計算すると、M_n の 90%VaR の値は log（$\boxed{\quad ⑥ \quad}$）となる。

③～⑤に当てはまるものおよび⑥に当てはまる数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

【③～⑤の選択肢】
（Ａ）β　（Ｂ）$-\beta$　（Ｃ）$1/\beta$　（Ｄ）$-1/\beta$　（Ｅ）x
（Ｆ）$-x$　（Ｇ）$-\log x$　（Ｈ）e　（Ｉ）$-e$
（Ｊ）いずれにも該当しない

【⑥の選択肢】
（Ａ）20,000　（Ｂ）120,000　（Ｃ）220,000　（Ｄ）320,000　（Ｅ）420,000
（Ｆ）520,000　（Ｇ）620,000　（Ｈ）720,000　（Ｉ）820,000　（Ｊ）920,000

問題２． 次のⅠ～Ⅴの各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。　　　　　　　Ⅰ、Ⅲ、Ⅳ:各８点　Ⅱ:７点　Ⅴ:６点　（計３７点）

Ⅰ．ある保険商品（保険期間１年、保険始期は各月の１日）は発売開始から 6 年が経過しており、直近 4 年間の実績は下表のとおりとなっている（事業年度は 4 月～3 月とする。）。

事業年度	既経過保険料	既発生保険金
2012 年度	2,035	1,000
2013 年度	□	1,080
2014 年度	□	1,090
2015 年度	□	1,125

※　□部分は設問の関係で数値を伏せている。

この保険商品では保険料の払込方法は一括払のみであり、すべての契約者に一律の保険料が適用されるものとする。また、各月の契約者数は同一であったとする。

この保険商品に関して、過去に次のような料率改定が行われた。

2012 年 10 月 1 日以降保険始期　12%引上げ

2014 年 4 月 1 日以降保険始期　 9%引下げ

このとき、次の（1）～（3）の各問に答えなさい。

（1）2013 年度の既経過期間に占める 2012 年 10 月以降に始期を有する契約の既経過期間の割合に最も近いものは、選択肢のうちどれか。なお、既経過期間については保険始期を各月月初とする 12 分の 1 法で算出すること。

（A）$\frac{6}{12}$　（B）$\frac{10}{12}$　（C）$\frac{10.25}{12}$　（D）$\frac{10.5}{12}$　（E）$\frac{10.75}{12}$

（F）$\frac{11}{12}$　（G）$\frac{11.25}{12}$　（H）$\frac{11.5}{12}$　（I）$\frac{11.75}{12}$　（J）$\frac{12}{12}$

（2）2012 年度から 2015 年度までの過去 4 年間合計の実績のアーンドベーシス損害率に最も近いものは、選択肢のうちどれか。

（A）50.0%　（B）50.2%　（C）50.4%　（D）50.6%　（E）50.8%

（F）51.0%　（G）51.2%　（H）51.4%　（I）51.6%　（J）51.8%

（３）各年度の既経過保険料を直近の料率水準で算出したものに置き換えた場合の 2012 年度から 2015 年度までの過去 4 年間のアーンドベーシス損害率のトレンドを用いて、線形回帰によって 2016 年度のアーンドベーシス損害率を推定した場合、推定値に最も近いものは、選択肢のうちどれか。なお、2016 年度には料率改定を実施しないことを前提とする。

（Ａ）56.0%　（Ｂ）56.2%　（Ｃ）56.4%　（Ｄ）56.6%　（Ｅ）56.8%
（Ｆ）57.0%　（Ｇ）57.2%　（Ｈ）57.4%　（Ｉ）57.6%　（Ｊ）57.8%

Ⅱ．Bühlmann モデルに関して、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。

（１）モデルとなる分布によらない、ノンパラメトリックな方法によるパラメータの推定について考察する。契約者 $i(i=1,\dots,r)$ に関する過去 n 年のロスデータを $X_{i1},X_{i2},\dots,X_{in}$ とする（n 年間の各年のエクスポージャは同一である）。$\Theta_i=\theta_i$ の条件付きの X_{ij} はある分布 $\Pi(\mu(\theta_i),\sigma^2(\theta_i))$ に従うとする。$\Theta_i=\theta_i$ の条件付きの下で、$X_{i1},X_{i2},\dots,X_{in}$ は互いに独立で、また、異なる契約者間のロスデータは互いに独立であるとする。

以上の前提のとき、契約者集団の期待値 μ 、条件付きの分散の期待値 $v=E[V(X_i\mid\Theta)]$、条件付き期待値の分散 $w=V[E(X_i\mid\Theta)]$ の不偏推定量 $\hat{\mu}$ 、$\hat{v}$ 、$\hat{w}$ を求める。

$\overline{X}_i=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}X_{ij}$ 、 $\overline{X}=\dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\overline{X}_i$ とすると、

$$E(\overline{X})=\frac{1}{rn}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}E(X_{ij})=\frac{1}{rn}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}E(E(X_{ij}\mid\Theta_i))$$

$$=\frac{1}{rn}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}E(\mu(\Theta_i))=\frac{1}{rn}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}\mu=\mu$$

より、$\hat{\mu}=\overline{X}$ となる。

$v_i=$ $\boxed{\quad ① \quad}$ という統計量を想定すると、この統計量は $\Theta_i=\theta_i$ の条件付きの下で $\sigma^2(\theta_i)$ の不偏推定量となるので、

$$E(v_i)=E(E(v_i\mid\Theta_i))=E(\sigma^2(\Theta_i))=v$$

が成立する。したがって、$\hat{v}$ を v_i の全契約者における平均値で推定すると、

$$\hat{v}=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}v_i=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\boxed{\quad ① \quad}$$ となる。

$\overline{X}_i$ は $\Theta_i=\theta_i$ の条件付きの下で $\mu(\theta_i)$ の不偏推定量となるので、

$$E(\overline{X}_i)=E(E(\overline{X}_i\mid\Theta_i))=E(\mu(\Theta_i))=\mu$$

$$V(\overline{X}_i)=V(E(\overline{X}_i\mid\Theta_i))+E(V(\overline{X}_i\mid\Theta_i))$$

$$=V(\mu(\Theta_i))+E(\boxed{\quad ② \quad}\times\sigma^2(\Theta_i))=w+\boxed{\quad ② \quad}\times v$$

$\overline{X}_i\ (i=1,\ldots,r)$ は互いに独立で、かつ、同一の期待値 μ 、分散 $w+$ ② $\times v$ をもつ分布に従うことから、$\overline{X}_i$ の標本不偏分散は、母数 $w+$ ② $\times v$ の不偏推定量である。したがって、

$\hat{w}=$ ③ $-$ ② $\times\hat{v}$ となる。

①～③に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

（A）$\dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2$　（B）$\dfrac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2$　（C）$\dfrac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2$

（D）$\dfrac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}(\overline{X}_i-\overline{X})^2$　（E）$\dfrac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}(\overline{X}_i-\overline{X})^2$　（F）$\dfrac{1}{r+1}\sum_{i=1}^{r}(\overline{X}_i-\overline{X})^2$

（G）n　（H）$(n-1)$　（I）$(n+1)$

（J）$\dfrac{1}{n}$　（K）$\dfrac{1}{n-1}$　（L）$\dfrac{1}{n+1}$

（M）1　（N）いずれにも該当しない

（2）ある保険会社は、2 人の契約者に対して保険を販売しており、過去 3 年間の契約年度別クレームコストの実績は下表のとおりであった。

	1 年目	2 年目	3 年目
契約者 1	10	6	8
契約者 2	12	18	15

Bühlmann モデルを用いて実績データに対する信頼度を推定し、4 年目のクレームコストを推定する場合、契約者 1 の 4 年目のクレームコストの推定値に最も近いものは、選択肢のうちどれか。なお、（1）の前提が成立しているものとする。

（A）8.0　（B）8.1　（C）8.2　（D）8.3　（E）8.4
（F）8.5　（G）8.6　（H）8.7　（I）8.8　（J）8.9

Ⅲ．効用関数が $u(x)=-e^{-0.05x}$ である契約者が、期初に c の富を持っている。この契約者が保有するリスク X は、クレーム件数 N は $\Pr(N=n)=0.2(0.8)^n \quad (n=0,1,2\cdots)$ の幾何分布、1 事故あたりのクレーム額は平均 2 の指数分布に従うものとする。なお、クレーム件数と各クレーム額は互いに独立であるとする。このとき、次の（1）～（3）の各問に答えなさい。

（1）この契約者がリスク X を移転するために支払う保険料の上限に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、必要な場合は、$\log 2=0.693$、$\log 3=1.099$、$\log 5=1.609$ を使用すること。

（A）6.0　（B）7.0　（C）8.0　（D）9.0　（E）10.0
（F）11.0　（G）12.0　（H）13.0　（I）14.0　（J）15.0

（2）保険会社が分散原理（$P(X)=\mu_X+h{\sigma_X}^2$）で保険料を算出する場合、この契約者が当該保険に加入するために、保険会社が設定できるパラメータ h の上限値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、この契約者がリスク X を移転するために支払う保険料の上限は（1）で選択した解答の数値を使用すること。また、予定事業費等の付加保険料については考慮しないものとする。

（A）0.004　（B）0.008　（C）0.012　（D）0.016　（E）0.020
（F）0.024　（G）0.028　（H）0.032　（I）0.036　（J）0.040

（3）保険会社がエッシャー原理（$P(X)=E(Xe^{hX})/E(e^{hX})$）で保険料を算出する場合、この契約者が当該保険に加入するために、保険会社が設定できるパラメータ h の上限値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、この契約者がリスク X を移転するために支払う保険料の上限は（1）で選択した解答の数値を使用すること。また、パラメータ h は $0<h<0.1$ の範囲のみで考えることとし、予定事業費等の付加保険料については考慮しないものとする。

（A）0.004　（B）0.008　（C）0.012　（D）0.016　（E）0.020
（F）0.024　（G）0.028　（H）0.032　（I）0.036　（J）0.040

余白ページ

Ⅳ. ある保険事故が発生した場合に、保険金 X と保険金 Y をそれぞれ支払う保険商品がある。保険金 X と保険金 Y はそれぞれ次の確率密度関数に従うことが分かっている。

・保険金 X ： $f(x)=\dfrac{1}{20}e^{-\frac{1}{20}x}\quad(x\geq 0)$

・保険金 Y ： $f(y)=\dfrac{1}{10}e^{-\frac{1}{10}y}\quad(y\geq 0)$

この保険商品において、直近に観察された保険金 X と保険金 Y は下表のとおりであった。

事故番号	1	2	3	4	5	6
保険金 X の観察値	9	13	27	22	18	30
保険金 Y の観察値	4	18	15	9	7	12

このとき、次の（１）～（３）の各問に答えなさい。

（１）保険金 X と保険金 Y の観察値からケンドールの τ を算出した場合、ケンドールの τ の値に最も近いものは、選択肢のうちどれか。

（Ａ）$-\dfrac{2}{3}$　（Ｂ）$-\dfrac{3}{5}$　（Ｃ）$-\dfrac{2}{5}$　（Ｄ）$-\dfrac{1}{3}$　（Ｅ）$-\dfrac{1}{5}$

（Ｆ）$\dfrac{1}{5}$　（Ｇ）$\dfrac{1}{3}$　（Ｈ）$\dfrac{2}{5}$　（Ｉ）$\dfrac{3}{5}$　（Ｊ）$\dfrac{2}{3}$

（２）保険金 X と保険金 Y の同時分布は、生成作用素を $\phi(t)=\left(\dfrac{1}{t}-1\right)^{\theta}$ とするアルキメデス型コピュラ $C(u_1,u_2)=\left[1+\left\{\left(\dfrac{1}{u_1}-1\right)^{\theta}+\left(\dfrac{1}{u_2}-1\right)^{\theta}\right\}^{\frac{1}{\theta}}\right]^{-1}$ $(\theta\geq 1)$ で構成されることが分かっている。ケンドールの τ が、観察値から算出された値（（１）の解）と一致するように、コピュラのパラメータ θ を定めるとき、保険金 X と保険金 Y がともに 10 以上となる確率に最も近いものは、選択肢のうちどれか。なお、アルキメデス型コピュラのケンドールの τ は、$\tau=4\int_0^1\dfrac{\phi(u)}{\phi'(u)}du+1$ と表される。また、必要があれば、$e=2.718$ を使用すること。

（Ａ）0.20　（Ｂ）0.22　（Ｃ）0.24　（Ｄ）0.26　（Ｅ）0.28

（Ｆ）0.30　（Ｇ）0.32　（Ｈ）0.34　（Ｉ）0.36　（Ｊ）0.38

（３）（２）のコピュラを持つ同時分布の右裾従属係数λ_uに最も近いものは、選択肢のうちどれか。なお、コピュラのパラメータθは（２）で定めたものを使用することとする。

（Ａ）0	（Ｂ）$\frac{1}{4}$	（Ｃ）$\frac{1}{2}$	（Ｄ）$\frac{3}{4}$	（Ｅ）1
（Ｆ）$\frac{5}{4}$	（Ｇ）$\frac{3}{2}$	（Ｈ）$\frac{7}{4}$	（Ｉ）2	（Ｊ）$\frac{9}{4}$

Ｖ．次の（1）～（3）の各問に答えなさい。

（1）以下のイ～ハのうち正しいものの組み合わせとして最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。

イ．一般化線形モデルでは、目的変数の期待値は説明変数の線形結合を要素としたリンク関数で表され、目的変数は指数型分布族に従い、その分散は平均の関数で表せる。このため、損害保険で取り扱う正規分布がなじみにくいクレーム頻度やクレーム額の分布もモデル化が可能となる。

ロ．支払備金の見積手法の一つである個別見積法は、既報告損害に係る個々の支払見込額を積算する方法であり、既発生未報告損害の見積もりに用いる。

ハ．元受保険金を X 、再保険金を Y とするとき、保有保険金の分散 $V(X-Y)$ が等しい再保険の中で、比例再保険が再保険金の分散 $V(Y)$ の最小値を与える再保険である。

（A）全て正しい　　（B）イ、ロのみ正しい
（C）イ、ハのみ正しい　　（D）ロ、ハのみ正しい
（E）イのみ正しい　　（F）ロのみ正しい
（G）ハのみ正しい　　（H）全て誤り

（2）以下のニ～ヘのうち正しいものの組み合わせとして最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。

ニ. 左裾従属係数 $\lambda_l > 0$ および右裾従属係数 $\lambda_u > 0$ のときそれぞれ左裾および右裾において裾従属性を持つといい、$\lambda_l = 0$ および $\lambda_u = 0$ のときそれぞれ左裾および右裾において漸近的に独立であるという。

ホ．歪みリスク尺度はコヒーレント・リスク尺度が満たすべき 4 つの公理のうち、少なくとも平行移動不変性、単調性および正の同次性の 3 つの公理を満たす。

ヘ．支払備金の予測手法である確率論的アプローチにおいては、リスクと不確実性に関する調整額の算出に将来キャッシュフローの確率分布または複数シナリオを用いる。この手法では、高度の数理的手続きを必要とするが、将来キャッシュフローの確率分布を明示的に予測しているという点で、透明性の高い手法と言える。

（A）全て正しい　　（B）ニ、ホのみ正しい
（C）ニ、ヘのみ正しい　　（D）ホ、ヘのみ正しい
（E）ニのみ正しい　　（F）ホのみ正しい
（G）ヘのみ正しい　　（H）全て誤り

（3）以下のト～リのうち正しいものの組み合わせとして最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。

ト．当年度アーンドプレミアムおよび当年度インカードロスはそれぞれ次式で算出される。
当年度アーンドプレミアム
＝当年度リトンプレミアム＋前年度末未経過保険料－当年度末未経過保険料
当年度インカードロス
＝当年度ペイドロス＋前年度末支払備金－当年度末支払備金

チ．確率変数 X_1 が標準正規分布に従い、確率変数 X_2 が $X_2 = X_1^2$ を満たすとき、X_2 は X_1 により完全に決定されるが、X_1 と X_2 のピアソンの積率相関係数は 0 となる。このように、X_1 と X_2 の間に完全な従属性があっても、ピアソンの積率相関係数が大きいとは限らない。

リ．ポアソン過程は加法過程（独立増分過程）の一種であり、マルコフ性を持つ。

（A）全て正しい
（B）ト、チのみ正しい
（C）ト、リのみ正しい
（D）チ、リのみ正しい
（E）トのみ正しい
（F）チのみ正しい
（G）リのみ正しい
（H）全て誤り

問題３． 次のⅠ、Ⅱの各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。　Ⅰ：９点　Ⅱ：８点　（計１７点）

Ⅰ．ある保険商品では、保険期間１年間の保険請求の有無により翌年度契約の保険料が割増または割引となる等級制度を導入している。具体的には、等級１（保険料割増率 40%)、等級２（保険料割増引率 0%)、等級３（保険料割引率 40%）の３つの等級から構成され、１年間クレーム請求の無かった契約者の等級は１つ上がり、１件以上クレーム請求があった契約者の等級は１つ下がる。なお、等級１でクレーム請求があった場合の翌年度契約の等級は１、等級３でクレーム請求が無かった場合の翌年度契約の等級は３であるとする。

また、各契約者の年間事故件数は、等級によらず平均 0.5 件のポアソン分布に従い、１件あたりの損害額は下表に従うことが判明している。

損害額	発生確率
10	0.2
20	0.5
30	0.3

この保険商品には２つの契約集団（契約集団Ａ、契約集団Ｂ）が存在し、それぞれの契約集団の契約者数は、常に同数かつ一定（つまり、新規契約の流入、既存契約の流出が発生しない）であるものと仮定したとき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。なお、必要があれば$e^{-0.5}=0.607$を使用すること。

（１）契約集団Ａが定常状態（つまり、契約者分布の増減がない状態）に達したとき、この契約集団の損害率は 60%であった。このとき、等級２に属する契約者の保険料は $\boxed{①}$ となる。①に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。ただし、事故が起きた場合、必ず契約者はクレーム請求すると仮定する。

（Ａ） 17.6　**（Ｂ）** 17.9　**（Ｃ）** 18.2　**（Ｄ）** 18.5　**（Ｅ）** 18.8
（Ｆ） 19.1　**（Ｇ）** 19.4　**（Ｈ）** 19.7　**（Ｉ）** 20.0　**（Ｊ）** 20.3

（2）契約集団Ｂが定常状態に達したとき、各等級の契約者割合を確認したところ、契約集団Ａの定常状態と異なる割合となっていることがわかった。理由を調査するため損害調査担当部署にヒアリングしたところ、下記のように、事故が起きても次年度以降の保険料割増を考慮してクレーム請求を行わない場合があることが判明した。

【契約集団Ｂのクレーム請求の判断基準】

条件	クレーム請求
保険料差額 ＞ 損害額	行わない
保険料差額 ≦ 損害額	行う

＜保険料差額について＞

表中の保険料差額とは、下記（ｉ）と（ⅱ）の差額を両者の等級が一致するまで通算したものである。

（ｉ）　クレーム請求を行う場合の次年度以降の保険料

（ⅱ）　クレーム請求を行わない場合の次年度以降の保険料

なお、保険料差額を求める際は、以下を仮定する。

- 次年度以降、事故は発生しない。
- 次年度以降、保険料改定は発生しない。
- 次年度以降の保険料は現価に直さない。

＜１年間に事故が２件以上発生した場合＞

クレーム請求の判断は、１年間の合計損害額で判断することとし、かつ、全事故に対して同一の判断を行うものとする。

各等級の契約者に対して（1）で求めた契約集団Ａの定常状態における保険料と同じ保険料を適用した場合、契約集団Ｂの年間総保険料は、契約集団Ａの年間総保険料に比べて ② ％少なくなる。

また、契約集団Ｂの年間総支払保険金の期待値は、契約集団Ａの年間総支払保険金の期待値に比べて ③ ％少なくなる。②、③に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

（A） 11.0	**（B）** 11.3	**（C）** 11.6	**（D）** 11.9	**（E）** 12.2
（F） 12.5	**（G）** 12.8	**（H）** 13.1	**（I）** 13.4	**（J）** 13.7

Ⅱ．ある保険会社の時点$n\,(=1,2,\cdots)$におけるサープラスU_nを

$U_n = u_0 + nc - S_n$

u_0 ：期首サープラス

S_n ：最初のn期間中の支払保険金の総額

c ：各期間の収入保険料

とする。

期間iにおける支払保険金の総額をW_iとして、$W_1, W_2, \cdots, W_n$は互いに独立で同じ分布に従う確率変数とし、S_nは$S_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$と表されるものとする。また、各期間の収入保険料は安全割増率θを用いて、$c = (1+\theta)E(W_i)$として表されるものとする。

この保険会社の契約は危険度の異なるものが混ざり合っており、各期間のクレーム件数はポアソン分布に従い、そのパラメータλはガンマ分布$f(x) = b/\Gamma(a)e^{-bx}(bx)^{a-1}$ $(0 \le x < \infty)$に従うものとし、各クレームのクレーム額は独立で、ある同一の分布に従うとする。確率過程の性質を利用してこの保険会社の破産確率を考えるとき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。

（１）個々のクレーム額の平均値$E(X)$、および積率母関数$M_X(t)$を用いて調整係数rの満たすべき方程式を書くと、以下のとおりとなる。①～③に当てはまる最も適切なものは【選択肢】のうちのどれか。

$$r(1+\theta)E(X)\frac{\boxed{\quad ① \quad}}{\boxed{\quad ② \quad}} = \log\frac{\boxed{\quad ② \quad}}{1-\boxed{\quad ① \quad}\times\boxed{\quad ③ \quad}}$$

（２）元受クレーム額の分布が平均μの指数分布に従うとし、そのときの（１）の方程式の解をr_0とする。この保険会社のポートフォリオ全体に、再保険付加率 100%の100α %比例再保険$(0 < \alpha < 1)$を付した場合の調整方程式の解を$r = r_0 + \Delta r$と表し、$\alpha \ll 1$および$\Delta r / r_0 \ll 1$を仮定して、テイラー展開によりαと$\Delta r / r_0$の関係式を両者の１次の項までで書くと以下のとおりとなる。④～⑦に当てはまる最も適切なものは【選択肢】のうちのどれか。

$$\alpha\left\{\frac{\boxed{\quad ④ \quad}}{\boxed{\quad ⑤ \quad}-1}\cdot\frac{1}{\boxed{\quad ④ \quad}-\boxed{\quad ⑤ \quad}}+\boxed{\quad ⑥ \quad}\right\}$$

$$=\frac{\Delta r}{r_0}\left\{\frac{\boxed{\quad ④ \quad}}{\boxed{\quad ⑤ \quad}-1}\cdot\frac{1}{\boxed{\quad ④ \quad}-\boxed{\quad ⑤ \quad}}+\boxed{\quad ⑦ \quad}\right\}$$

【選択肢】（問題３ Ⅱで共通。同じ選択肢を複数回用いてもよい。）

（Ａ）1	（Ｂ）2	（Ｃ）$(1+\theta)$	（Ｄ）a	（Ｅ）b
（Ｆ）$\dfrac{a}{a+1}$	（Ｇ）$\dfrac{b}{b+1}$	（Ｈ）μr_0	（Ｉ）$\dfrac{1}{a+1}$	（Ｊ）$\dfrac{1}{b+1}$
（Ｋ）θ	（Ｌ）$\dfrac{1}{\theta}$	（Ｍ）$M_X(r)$	（Ｎ）いずれにも該当しない	

以上

損保数理（解答例）

問題１

Ⅰ.

（１）（D）　（２）（F）　　［（１） ２点　（２） ４点］

（１）

パレート分布の確率密度関数を $f(x)=\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha+1}$ $(x>\beta)$ とすると、平均 μ_X は $\frac{\alpha\beta}{\alpha-1}$ 、分散 σ_X^2 は

$\frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}=\frac{\beta}{(\alpha-1)(\alpha-2)}\mu_X$ となる。

問題文より、$\alpha=3$、$\beta=1$、$h{\sigma_X}^2=0.1\mu_X$ となるので、

$$\mu_X=\frac{3\times1}{3-1}=\frac{3}{2}$$

$$h=\frac{0.1\mu_X}{{\sigma_X}^2}=\frac{0.1(\alpha-1)(\alpha-2)}{\beta}=0.1\times(3-1)\times(3-2)=0.2$$

（２）

確率密度関数変化後の平均 $\mu_{X(変化後)}$ と $h\sigma^2_{X(変化後)}$ は、以下のとおりとなる。

$$\mu_{X(変化後)}=\frac{4}{4-1}=\frac{4}{3}=\frac{8}{9}\mu_X$$

$$h\sigma^2_{X(変化後)}=0.2\times\frac{1}{(4-1)(4-2)}\mu_{X(変化後)}=\frac{4}{135}\mu_X$$

したがって、料率改定前の営業保険料を P 、純保険料を p 、料率改定後の営業保険料を P' とすると、$p=\mu_X=0.5P$ なので、料率改定後の営業保険料は以下のとおりとなる。

$$P'=\frac{8}{9}\times0.5P+0.25P+0.2P'+\frac{4}{135}\times0.5P$$

$$\Leftrightarrow P'=\frac{\frac{4}{9}+0.25+\frac{2}{135}}{1-0.2}P$$

$$\Leftrightarrow P'=0.887P$$

したがって、減少率は$1-0.887=11.3\%$

Ⅱ.

（1）**（B）**　（2）**（G）**　　　［（1）４点　（2）３点］

（1）

損害額を X 、その確率密度関数を $f(x)$ 、そして免責金額が a の場合のクレーム額を Y であらわすと、Y の期待値 $E(Y)$ は、

$$E(Y)=\frac{\int_0^\infty yf(y+a)dy}{\int_0^\infty f(y+a)dy}=\frac{a}{q-1}$$

（テキスト 2-39）

となる。題意より $a=3$ を代入し、$E(Y)=\frac{\sum_{i=1}^{15} y_i}{15}=15.0666\ldots$ を解くと、$q=1.20$

（2）

免責金額 3 の場合、保険金支払いとならない事故も含んだすべての契約に対する保険会社の平均支払額は、

$$E(Y)=\int_3^\infty (x-3)f(x)dx=\int_3^\infty xf(x)dx-3\int_3^\infty f(x)dx$$

$$=\left[-\frac{q}{q-1}x^{-(q-1)}\right]_3^\infty-3\left[-x^{-q}\right]_3^\infty$$

$$=\frac{q}{q-1}3^{-(q-1)}-3\cdot 3^{-q}=4.0146$$

一方、免責金額 5、支払限度額 100 の場合は、

$$E(Y)=\int_5^{105}(x-5)f(x)dx+\int_{105}^\infty (105-5)f(x)dx$$

$$=\left[-\frac{q}{q-1}x^{-(q-1)}\right]_5^{105}-5\left[-x^{-q}\right]_5^{105}+100\left[-x^{-q}\right]_{105}^\infty$$

$$=-\frac{q}{q-1}\left[105^{-(q-1)}-5^{-(q-1)}\right]-5\left[-105^{-q}+5^{-q}\right]+100\cdot 105^{-q}=1.6512$$

したがって、減少率は $1-1.6512\div 4.0146=59\%$

Ⅲ.

（１）**（F）**　（２）**（C）**　　［（１）３点　（２）４点］

（１）

①ロスディベロップメントファクター

事故年度	経過年度	
	1→2	2→3
2013	1.125	1.042
2014	1.132	1.042
2015	1.129	1.042

②チェインラダー法による累計発生保険金の推定と信頼係数

事故年度	経過年度			信頼係数
	1	2	3	
2013	4,240	4,770	4,970	1.000
2014	4,530	5,130	5,345	0.960
2015	4,900	5,532	5,764	**0.850**

（２）

③ボーンヒュッターファーガソン法による累計発生保険金の推定

事故年度	既経過保険料	予定損害率	当初予測値	2015 年度末累計発生保険金	信頼係数	最終発生保険金
2013	9,000	60%	5,400	4,970	1.000	4,970
2014	9,800	60%	5,880	5,130	0.960	5,365
2015	11,000	60%	6,600	4,900	0.850	5,890

④ベンクテンダー法による累計発生保険金の推定

事故年度	累計発生保険金	2015 年度末累計支払保険金	2015 年度末支払備金
2013	4,970	4,970	0
2014	5,346	4,830	516
2015	5,783	4,550	1,233
合計	16,099	14,350	**1,749**

Ⅳ.

（１）（Ｂ）　（２）①（Ｊ）②（Ｊ）　　［（１）２点　（２）①２点 ②２点］

（１）

テキスト 4-13 より、（ア）に当てはまるのは、「乗法型」である。

（２）

①各リスク区分のクレームコスト $R_{ij}=\dfrac{C_{ij}}{E_{ij}}$ および相対クレームコスト指数 $r_{ij}=\dfrac{R_{ij}}{R_{\bullet\bullet}}$ を計算すると、

＜クレームコスト R_{ij} ＞

	Ａ地域	Ｂ地域	計
Ｘ歳未満	0.290	0.640	0.440
Ｘ歳以上	0.200	0.840	0.584
計	0.260	0.740	0.500

＜相対クレームコスト指数 r_{ij} ＞

	Ａ地域	Ｂ地域	計
Ｘ歳未満	0.580	1.280	0.880
Ｘ歳以上	0.400	1.680	1.168
計	0.520	1.480	1.000

したがって、$r_{22}=1.680$

②各リスク区分の経過台数を E_{ij} 、相対クレームコスト指数の推定値を $\hat{r}_{ij}$ としたとき、Minimum Bias 法

における満たすべき条件は、次の連立方程式のようになる。

$$E_{11}(r_{11}-\hat{r}_{11})+E_{12}(r_{12}-\hat{r}_{12})=0$$
$$E_{21}(r_{21}-\hat{r}_{21})+E_{22}(r_{22}-\hat{r}_{22})=0$$
$$E_{11}(r_{11}-\hat{r}_{11})+E_{21}(r_{21}-\hat{r}_{21})=0$$
$$E_{12}(r_{12}-\hat{r}_{12})+E_{22}(r_{22}-\hat{r}_{22})=0$$

この連立方程式において、C を定数として、

$$E_{11}(r_{11}-\hat{r}_{11})=E_{22}(r_{22}-\hat{r}_{22})=C$$
$$E_{21}(r_{21}-\hat{r}_{21})=E_{12}(r_{12}-\hat{r}_{12})=-C$$

と表すことができる。

（１）より、この複合分類リスクの構造が乗法型であることから、各相対クレームコスト指数の推定値

は料率係数を用いて、$\hat{r}_{ij} = x_i \cdot y_j \quad (i = 1,2 \quad j = 1,2)$ と表される。

これを、上記連立方程式に代入して整理すると、

$$x_1 \cdot y_1 = r_{11} - C / E_{11} \ldots (a) \ , \qquad x_1 \cdot y_2 = r_{12} + C / E_{12} \ldots (b)$$
$$x_2 \cdot y_1 = r_{21} + C / E_{21} \ldots (c) \ , \qquad x_2 \cdot y_2 = r_{22} - C / E_{22} \ldots (d)$$

となる。$(a) \times (d) = (b) \times (c)$ より、

$$(r_{11} - \frac{C}{E_{11}})(r_{22} - \frac{C}{E_{22}}) = (r_{12} + \frac{C}{E_{12}})(r_{21} + \frac{C}{E_{21}})$$
$$(0.58 - \frac{C}{200})(1.68 - \frac{C}{150}) = (1.28 + \frac{C}{150})(0.4 + \frac{C}{100})$$
$$(116 - C)(252 - C) = 2(192 + C)(40 + C)$$
$$C^2 + 832C - 13872 = 0$$

C について解くと、$C = 16.352, -848.352$ 。
ここで、$C = -848.352$ では、負となる料率係数があるので不適。
したがって、$C = 16.352$

これを代入して、$y_2 = \dfrac{r_{12} + \dfrac{C}{E_{12}}}{x_1} = \dfrac{1.28 + \dfrac{16.352}{150}}{0.88} = 1.578$

Ｖ.

（１）**（Ｉ）**　（２）**（Ｂ）**　（３）**（Ｇ）**　　［（１）２点　（２）２点　（３）２点］

（１）

保険金額が 100 であり、保有許容額が 10 であるため、まず第 1 次超過額再保険契約に出再する。第 1 次超過額再保険契約の出再限度額は 60 であるため、残りの$30(=100-10-60)$については、第 2 次超過額再保険契約に出再する。

割合は、以下のとおりとなる。

	保有	第 1 次超過額再保険契約	第 2 次超過額再保険契約
保険金額	10	60	30
割合	0.1	0.6	0.3

再保険料は

第 1 次超過額再保険契約：$30\times 0.6=18$

第 2 次超過額再保険契約：$30\times 0.3=9$

再保険料の合計額は$18+9=27$

（２）

超過損害額再保険は１クレームごとに適用される（テキスト 9-12)。

クレーム件数の期待値は

$0\times 0.1+1\times 0.3+2\times 0.6=1.5$

１クレームあたりの超過損害額再保険による回収額の期待値は

$(5-5)\times 0.45+(10-5)\times 0.10+(15-5)\times 0.45=5.0$

であることから、再保険料は$1.5\times 5.0=7.5$

（３）

商品Ｂにかかる元受純保険料は、クレーム件数の期待値が

$0\times 0.1+1\times 0.3+2\times 0.6=1.5$

クレーム１件あたりのクレーム額の期待値が

$5\times 0.45+10\times 0.10+15\times 0.45=10$

であることから、$1.5\times 10=15$となる。

商品Ｂの比例再保険特約の出再割合は 40％より、再保険料は$15\times 0.4=6$となる。

再保険料の最大は 27（商品Ａ）、最小は 6（商品Ｂ）より、この差は 21 となる。

VI.

（１）**（G）**　（２）**（A）**　　［（１）４点　（２）３点］

（１）

年払契約の積立保険料 P_s は、

$$P_s = \frac{W\phi^n + R\phi^j}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}$$

したがって、過去法を用いて第 t 保険年度末払戻積立金 ${}_tV \quad (t \geq j)$ を計算すると、

$${}_tV = P_s\phi^{-t}\frac{1-\phi^t}{1-\phi} - R\phi^{j-t} = (W\phi^{n-t} + R\phi^{j-t})\frac{1-\phi^t}{1-\phi^n} - R\phi^{j-t}$$

（２）

$t < j$ での第 t 保険年度末払戻積立金は、

$${}_tV = P_s\phi^{-t}\frac{1-\phi^t}{1-\phi} = (W\phi^n + R\phi^j)\phi^{-t}\frac{1-\phi^t}{1-\phi^n}$$

となることから、第 t 保険年度末払戻積立金は $t < j$ では単調増加し、$t = j$ の直後で

$${}_jV = (W\phi^n + R\phi^j)\phi^{-j}\frac{1-\phi^j}{1-\phi^n} - R$$

まで減少し、その後 $j < t < n$ の間は再び単調増加し、$t = n$ の直前で W 、$t = n$ の直後で 0 となる。

したがって、求める関係式は、

$${}_jV = (W\phi^n + R\phi^j)\phi^{-j}\frac{1-\phi^j}{1-\phi^n} - R \geq 0$$

$$W\phi^{n-j}\frac{1-\phi^j}{1-\phi^n} - R\frac{\phi^j - \phi^n}{1-\phi^n} \geq 0$$

$$R \leq W\phi^{n-j}\frac{1-\phi^j}{\phi^j - \phi^n}$$

Ⅶ.

（1）①（E）②（I）　（2）③（H）④（H）⑤（F）⑥（J）（③～⑤は完答）

［（1）①1点 ②2点　（2）③～⑤2点 ⑥2点］

（1）

$VaR_{0.95}(X)=A$ とすると、Aは以下のとおり求められる。

$$\int_0^A 0.5e^{-0.5x}dx=0.95$$

$$\Leftrightarrow \left[-e^{-0.5x}\right]_0^A=0.95$$

$$\Leftrightarrow 1-e^{-0.5A}=0.95$$

$$\Leftrightarrow A=-2\log 0.05=2\log 20=2\times(2\times 0.693+1.609)=6.0$$

また、$TVaR_{0.95}(X)=B$ とすると、Bは以下のとおり求められる。

$$\begin{aligned}
B&=A+\frac{1}{1-0.95}ES_{0.95}(X)\\
&=A+20\times E\left[\max(X-A,0)\right]\\
&=A+20\times\int_A^\infty (x-A)0.5e^{-0.5x}dx\\
&=A+20\times 2e^{-0.5A}\\
&=6.0+20\times 2\times 0.05=8.0
\end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned}
F_{Z_n}(x)&=P((M_n-d_n)/c_n\le x)=P(M_n\le c_nx+d_n)\\
&=P(\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)\le c_nx+d_n)\\
&=P(X_1\le c_nx+d_n,X_2\le c_nx+d_n,\cdots,X_n\le c_nx+d_n)\\
&=\{P(X_1\le c_nx+d_n)\}^n\\
&=(1-e^{-x-\log n})^n=(1-e^{-x}/n)^n\xrightarrow{n\to\infty}e^{-e^{-x}}\ (-\infty<x<\infty)
\end{aligned}$$

したがって、M_n の $90\%VaR$ の値を Y とすると、$n=100,\beta=0.5$ より、

$$\begin{aligned}
P(M_{100}\ge Y)&=P\left(\frac{M_{100}-d_{100}}{c_{100}}\ge\frac{Y-d_{100}}{c_{100}}\right)\\
&=P\left(\frac{M-2\log 100}{2}\ge\frac{Y-2\log 100}{2}\right)\\
&=1-F_{Z_{100}}\left(\frac{Y-2\log 100}{2}\right)\\
&\approx 1-\exp\left(-\exp\left(-\frac{Y-2\log 100}{2}\right)\right)\\
&\approx 1-\exp(-100\exp(-Y/2))
\end{aligned}$$

この値が 1－0.90=0.10 となればよいので、

$$
\begin{aligned}
&0.10 = 1 - \exp(-100\exp(-Y/2)) \\
&\Leftrightarrow \exp(-100\exp(-Y/2)) = 0.90 \\
&\Leftrightarrow -100\exp(-Y/2) = \log 0.90 \\
&\Leftrightarrow \exp(-Y/2) = -(2\log 3 - \log 2 - \log 5)/100 \\
&\Leftrightarrow -Y/2 = \log(-(2\times 1.099 - 0.693 - 1.609)/100) \\
&\Leftrightarrow Y = -2\log(0.00104) = \log 920{,}000
\end{aligned}
$$

問題２

Ｉ.

（1）**（E）**　（2）**（F）**　（3）**（H）**　　　［（1）２点　（2）３点　（3）３点］

（1）

2013 年度の既経過期間は保険始期ごとに下表のとおりである。

保険始期	2013 年度の既経過期間
2012 年 5 月	2013 年 4 月の 1 か月間
2012 年 6 月	2013 年 4 月～2013 年 5 月の 2 か月間
・・・	・・・
2012 年 9 月	2013 年 4 月～2013 年 8 月の 5 か月間
2012 年 10 月	2013 年 4 月～2013 年 9 月の 6 か月間
・・・	・・・
2013 年 4 月	2013 年 4 月～2014 年 3 月の 12 か月間
2013 年 5 月	2013 年 5 月～2014 年 3 月の 11 か月間
・・・	・・・
2014 年 2 月	2014 年 2 月～2014 年 3 月の 2 か月間
2014 年 3 月	2014 年 3 月の 1 か月間

各月の契約者数は同一であるから、2013 年度の既経過期間に占める 2012 年 10 月以降に始期を有する契約の既経過期間の割合は以下のとおりとなる。

$$\frac{6+\cdots+12+11+\cdots+2+1}{1+2+\cdots+12+11+\cdots+2+1}=\frac{129}{144}=\frac{10.75}{12}$$

（2）

各事業年度について（1）と同様に計算を行うと各事業年度の既経過期間は以下のとおりとなる。

事業年度＼保険始期	2012 年 9 月以前	2012 年 10 月～2014 年 3 月	2014 年 4 月以降
2012 年度	10.25/12	1.75/12	―
2013 年度	1.25/12	10.75/12	―
2014 年度	―	5.5/12	6.5/12
2015 年度	―	―	12/12

2012 年 9 月以前の保険料率を 1 とした場合の各期間の適用料率は以下のとおりとなる。

・2012 年 10 月～2014 年 3 月始期契約：$1\times1.12=1.12$

・2014 年 4 月以降始期契約：$1\times1.12\times0.91=1.0192$

各月の契約者数は同一であり、すべての契約者に一律の保険料が適用されることから、料率改定がなかった場合の 2012 年度の既経過保険料は

$$\frac{2035}{1\times\frac{10.25}{12}+1.12\times\frac{1.75}{12}}=2000$$

となる。したがって、各事業年度の経過保険料は以下のとおりとなる。

2013 年度：$2000\times\left(1\times\frac{1.25}{12}+1.12\times\frac{10.75}{12}\right)=2215$

2014 年度：$2000\times\left(1.12\times\frac{5.5}{12}+1.0192\times\frac{6.5}{12}\right)=2130.8$

2015 年度：$2000\times1.0192=2038.4$

以上から、2012 年度から 2015 年度までの過去 4 年間合計の実績のアーンドベーシス損害率は

$$\frac{1000+1080+1090+1125}{2035+2215+2130.8+2038.4}=51.0\%$$

（3）

保険料を直近の料率水準に置き換えた場合、2012 年度から 2015 年度までの既経過保険料はすべて 2038.4 であり、各年度のアーンドベーシス損害率（直近の料率水準に読み替え）は以下のとおりとなる。

2012 年度：$\frac{1000}{2038.4}=49.058\%$　　2013 年度：$\frac{1080}{2038.4}=52.983\%$

2014 年度：$\frac{1090}{2038.4}=53.473\%$　　2015 年度：$\frac{1125}{2038.4}=55.190\%$

この損害率を線形回帰すると以下のとおりとなる。

事業年度	2012 年度	2013 年度	2014 年度	2015 年度	2016 年度
x	1	2	3	4	5
y	49.058	52.983	53.473	55.190	

回帰式：$\hat{y}=1.889x+47.954$

2016 年度のアーンドベーシス損害率の推定値は $1.889\times5+47.954=57.399$ より、57.4%

【別解】

保険料を直近の料率水準に置き換えた場合、2012 年度から 2015 年度までの既経過保険料はすべて 2038.4 である。そのため、既発生保険金を線形回帰によって推定し、2038.4 で除すことによって 2016 年度の損害率を推定することができる。既発生保険金の線形回帰結果は以下のとおりとなる。

事業年度	2012 年度	2013 年度	2014 年度	2015 年度	2016 年度
x	1	2	3	4	5
y	1000	1080	1090	1125	

回帰式：$\hat{y}=38.5x+977.5$

2016 年度のアーンドベーシス損害率の推定値は

$$\frac{38.5\times5+977.5}{2038.4}=\frac{1170}{2038.4}=57.4\%$$

Ⅱ.

（１）①（B）②（J）③（E）　（２）（D）　　［（１）各１点　（２）４点］

（１）

テキスト 3-39～40 参照。

（２）

r ：契約者数、n_i ：契約者 i ごとのロス実績年数、X_{ij} ：契約者 i の j 年目のクレームコストとすると、契約集団全体のクレームコスト期待値（μ）、条件付きのクレームコストの分散の期待値（$v = E[V(X_i | \Theta)]$）、条件付きのクレームコストの期待値の分散（$w = V[E(X_i | \Theta)]$）の不偏推定量は（１）よりそれぞれ以下のとおりとなる。

$$\hat{\mu} = \overline{X}$$

$$\hat{v} = \frac{1}{r(n-1)} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} (X_{ij} - \overline{X}_i)^2$$

$$\hat{w} = \frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^{r} (\overline{X}_i - \overline{X})^2 - \frac{\hat{v}}{n}$$

よって、

$$\hat{\mu} = \frac{10+6+8+12+18+15}{6} = \frac{23}{2}$$

$$\hat{v} = \frac{(10-8)^2 + (6-8)^2 + (8-8)^2 + (12-15)^2 + (18-15)^2 + (15-15)^2}{2 \cdot (3-1)} = \frac{13}{2}$$

$$\hat{w} = \frac{\left(8 - \frac{23}{2}\right)^2 + \left(15 - \frac{23}{2}\right)^2}{2-1} - \frac{\frac{13}{2}}{3} = \frac{67}{3}$$

と推定される。ゆえに、信頼度は、

$$Z = \frac{n}{n + \frac{\hat{v}}{\hat{w}}} = \frac{3}{3 + \frac{\frac{13}{2}}{\frac{67}{3}}} = 0.912$$

となり、契約者１の４年目のクレームコストは以下のように推定される。

$$0.912 \times 8 + (1 - 0.912) \times \frac{23}{2} = 8.31$$

Ⅲ.

<u>（１）**（Ｇ）**　（２）**（Ｊ）**　（３）**（Ｇ）**</u>　　　［（１）４点　（２）２点　（３）２点］

（１）

純保険料をPとすると、求める値は、保険を購入する場合の効用$u(c-P)$と保険を購入しない場合の期待効用$E(u(c-X))$が一致する場合である。

$$E(u(c-X)) = E\left(-e^{-0.05(c-X)}\right)$$
$$= -e^{-0.05c} \times M_X(0.05)$$

$$u(c-P) = -e^{-0.05c} \times e^{0.05P}$$

より、求める純保険料Pは以下のとおりとなる。

$$-e^{-0.05c} \times M_X(0.05) = -e^{-0.05c} \times e^{0.05P}$$
$$P = 20 \times \log(M_X(0.05))$$

１事故あたりのクレーム額をYとすると、

$M_X(t)$は、$M_X(t) = M_N(\log M_Y(t))$であるため、

$$M_N(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 0.2(0.8 \times e^t)^n = \frac{0.2}{1-0.8e^t}$$

$$M_Y(t) = \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}+ty} dy = \frac{1}{1-2t}$$

$$M_X(t) = \frac{0.2}{1-\frac{0.8}{1-2t}} = \frac{1-2t}{1-10t}$$、$M_X(0.05) = 1.8$となる。

よって、求めるPは、

$$P = 20 \times \log(M_X(0.05))$$
$$= 20 \times \log 1.8$$
$$= 20 \times \{(2\log 3 + \log 2) - (\log 2 + \log 5)\}$$
$$= 11.78$$

（２）

分散原理は$P = \mu_X + h\sigma_X{}^2$である。

$$\mu_X = E(Y)E(N) = 2 \times \frac{0.8}{0.2} = 8$$

$$\sigma_X{}^2 = V(Y)E(N) + E(Y)^2 V(N) = 4 \times \frac{0.8}{0.2} + 4 \times \frac{0.8}{0.2^2} = 96$$ より、

$12 \geq P = 8 + 96h$ を解いて、$h \leq 0.0417$となる。

したがって、パラメータhの上限値に最も近いものは 0.040 である。

（３）

エッシャー原理は$P(X)=\dfrac{E(Xe^{hX})}{E(e^{hX})}=\dfrac{M'_X(h)}{M_X(h)}$である。

（１）より、$M_X(h)=\dfrac{1-2h}{1-10h}$であるから、

$$M'_X(h)=\frac{8}{(1-10h)^2}$$

$$P(X)=\frac{8}{(1-10h)^2}\cdot\frac{1-10h}{1-2h}=\frac{8}{(1-10h)(1-2h)}$$

$12\geq P(X)=\dfrac{8}{(1-10h)(1-2h)}$を$0<h<0.1$の範囲で解いて、$0<h\leq 0.0292$となる。

したがって、パラメータhの上限値に最も近いものは0.028である。

Ⅳ.

(１)**(G)**　(２)**(F)**　(３)**(A)**　　　［(１) ２点　(２) ４点　(３) ２点］

(１)

保険金 X と保険金 Y の観察値をそれぞれ x と y とする。

事故番号が $i > j$ であるようなすべての $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$ の組に対して、$(x_i - x_j, y_i - y_j)$ の符号を調べると以下のとおりとなる。

		x_i	9	13	27	22	18	30
		y_i	4	18	15	9	7	12
x_j	y_j							
9	4			(+,+)	(+,+)	(+,+)	(+,+)	(+,+)
13	18				(+,−)	(+,−)	(+,−)	(+,−)
27	15					(−,−)	(−,−)	(+,−)
22	9						(−,−)	(+,+)
18	7							(+,+)
30	12							

これにより $sign\left((x_i - x_j)(y_i - y_j)\right)$ を計算すると、以下のとおりとなる。

		x_i	9	13	27	22	18	30
		y_i	4	18	15	9	7	12
x_j	y_j							
9	4			1	1	1	1	1
13	18				−1	−1	−1	−1
27	15					1	1	−1
22	9						1	1
18	7							1
30	12							

よって、ケンドールの τ は以下のとおり算出される。

$$\frac{2}{6 \cdot 5} \sum_{i>j} sign\left((x_i - x_j)(y_i - y_j)\right) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

(２)

生成作用素を $\phi(t) = \left(\frac{1}{t} - 1\right)^{\theta}$ とするアルキメデス型コピュラのケンドールの τ は

$$\tau = 4\int_0^1 \frac{\phi(u)}{\phi'(u)}du + 1 = 1 + 4\int_0^1 \frac{\left(\frac{1}{t}-1\right)^{\theta}}{-\theta\frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{\theta-1}}dt = 1-\frac{4}{\theta}\int_0^1 t(1-t)dt = 1-\frac{2}{3\theta}$$

となることから、$1-\dfrac{2}{3\theta}=\dfrac{1}{3}$ より、$\theta = 1$

以上から、$C(u_1,u_2) = \left(\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}-1\right)^{-1}$

続いて、

$$P(X \le 10) = \int_0^{10} \frac{1}{20}e^{-\frac{x}{20}}dx = \left[-e^{-\frac{x}{20}}\right]_0^{10} = 1-e^{-\frac{1}{2}} = 0.3934$$

$$P(Y \le 10) = \int_0^{10} \frac{1}{10}e^{-\frac{y}{10}}dy = \left[-e^{-\frac{y}{10}}\right]_0^{10} = 1-e^{-1} = 0.6321$$

保険金 X と保険金 Y がともに 10 以上となる確率はコピュラを用いて以下のとおり表すことができる。

$$C(1,1) - C(1,0.6321) - C(0.3934,1) + C(0.3934,0.6321)$$
$$= 1-\left(\frac{1}{0.6321}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{0.3934}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{0.3934}+\frac{1}{0.6321}-1\right)^{-1}$$
$$= 0.2946$$

（３）

$C(u,u) = \left(\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{u}-1\right)^{-1} = \dfrac{u}{2-u}$ より、右裾従属係数は以下のとおりとなる。

$$\lambda_u = 2-\lim_{u\to 1-0}\frac{1-C(u,u)}{1-u} = 2-\lim_{u\to 1-0}\frac{1-\frac{u}{2-u}}{1-u} = 2-\lim_{u\to 1-0}\frac{1}{1-u}\frac{2(1-u)}{2-u} = 2-\lim_{u\to 1-0}\frac{2}{2-u} = 2-2 = 0$$

Ⅴ.

（1）**（C）**　（2）**（A）**　（3）**（D）**　　　［（1）２点　（2）２点　（3）２点］

（1）

イ　正しい（テキスト 4-18）。

ロ　誤：既発生未報告損害の見積もりに用いる

　　正：既報告未払損害の見積もりに用いる（テキスト 5-4）。

ハ　正しい（テキスト 9-19）。

（2）

ニ　正しい（テキスト 10-37）。

ホ　正しい（テキスト 10-51）。

ヘ　正しい（テキスト 5-36）。

（3）

ト　誤：当年度インカードロス＝当年度ペイドロス＋前年度末支払備金－当年度末支払備金

　　正：当年度インカードロス＝当年度ペイドロス＋当年度末支払備金－前年度末支払備金

　　（テキスト 1-11）。

チ　正しい（テキスト 10-25）。

リ　正しい（テキスト 8-13～16, 58, 63）。

問題３

Ⅰ.

<u>（１）①（Ｈ）　（２）②（Ｄ）③（Ａ）</u>　　　［（１）①３点　（２）②３点 ③３点］

（１）

各契約の年間事故件数がポアソン分布 $P(X=k)=e^{-0.5}\dfrac{0.5k}{k!}$ に従うことから、

１年間事故が発生しない確率　$p_0=e^{-0.5}=0.607$

１年間に１回以上事故が発生する確率 $p_1=1-p_0=0.393$

である。事故が起きた場合、必ず契約者はクレーム請求するので、

推移行列は $\begin{pmatrix} p_1 & p_0 & 0 \\ p_1 & 0 & p_0 \\ 0 & p_1 & p_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.393 & 0.607 & 0 \\ 0.393 & 0 & 0.607 \\ 0 & 0.393 & 0.607 \end{pmatrix}$ と表される。

したがって、定常状態にあるときの等級 i の契約構成割合を x_i とすると、次の式が成り立つ。

$$\begin{cases} x_1=0.393x_1+0.393x_2 \\ x_2=0.607x_1+0.393x_3 \\ x_3=0.607x_2+0.607x_3 \\ \quad x_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$$

これを解くと、各等級の契約構成割合は以下のとおりとなる。

$x_1=0.203$、$x_2=0.313$、$x_3=0.484$

ここで、定常状態における保険料と保険金の収支相等を考える。

①保険料収入

　等級２の年間保険料を P とすると、定常状態でこの契約集団Ａから得られる契約１件あたり保険料の平均は、$1.4P\times0.203+P\times0.313+0.6P\times0.484=0.8876P$ となる。

②保険料支出

　１クレーム請求の平均値は $0.2\times10+0.5\times20+0.3\times30=21$ となり、年間クレーム請求件数の平均値は 0.5 となるので、契約１件あたり保険金の期待値は $21\times0.5=10.5$ となる。

損害率が 60%であることから、$0.8876P\times0.6=10.5$ となり、$P=19.7$ となる。

（２）

各等級におけるクレーム請求の有無による保険料差額は以下のとおりとなる。

①等級１

経過年度	請求する場合	請求しない場合	差引計
1	1.4 P	P	0.4 P
2	P	0.6 P	0.4 P
３以降	0.6 P	0.6 P	0
差引計			0.8 P =15.76

②等級２

経過年度	請求する場合	請求しない場合	差引計
1	1.4 P	0.6 P	0.8 P
2	P	0.6 P	0.4 P
３以降	0.6 P	0.6 P	0
差引計			1.2 P =23.64

③等級３

経過年度	請求する場合	請求しない場合	差引計
1	P	0.6 P	0.4 P
２以降	0.6 P	0.6 P	0
差引計			0.4 P =7.88

そのため、保険料差額＞損害額となる下表の場合においては事故が発生してもクレーム請求は行われない。

等級１	事故件数１件：損害額 10 の場合
等級２	事故件数１件：損害額 10 または 20 の場合 事故件数２件：２件とも損害額 10 の場合
等級３	なし

以上より、各等級におけるクレーム請求を行わない確率は以下のとおりとなる。

等級１　$e^{-0.5}+0.2\times\frac{0.5}{1!}\times e^{-0.5}=1.1e^{-0.5}=0.668$

等級２　$e^{-0.5}+(0.2+0.5)\times\frac{0.5}{1!}\times e^{-0.5}+0.2^2\times\frac{0.5^2}{2!}\times e^{-0.5}=1.355e^{-0.5}=0.822$

等級３　$e^{-0.5}=0.607$

したがって、定常状態にあるときの等級 i の契約構成割合を y_i とすると、次の式が成り立つ。

$$\begin{cases} y_1 = 0.332y_1 + 0.178y_2 \\ y_2 = 0.668y_1 + 0.393y_3 \\ y_3 = 0.822y_2 + 0.607y_3 \\ \quad y_1 + y_2 + y_3 = 1 \end{cases}$$

これを解くと、各等級の契約構成割合は以下のとおりとなる。

$y_1 = 0.079$ 、 $y_2 = 0.298$ 、 $y_3 = 0.623$

定常状態において契約集団Ｂから得られる契約１件あたり平均保険料は、

$1.4P \times 0.079 + P \times 0.298 + 0.6P \times 0.623 = 0.7824P$ となるため、契約集団Ｂの契約集団Ａに対する年間総保険料の減少率は以下のとおりとなる。

$(0.7824P - 0.8876P) / 0.8876P = -11.9\%$

次に、各等級における契約１件あたり保険金の期待値は以下のとおりとなる。

等級１　$10.5 - 10 \times (0.2 \times \frac{0.5}{1!} \times e^{-0.5}) = 10.5 - e^{-0.5} = 9.893$

等級２　$10.5 - 10 \times (0.2 \times \frac{0.5}{1!} \times e^{-0.5}) - 20 \times (0.5 \times \frac{0.5}{1!} \times e^{-0.5}) - 20 \times (0.2^2 \times \frac{0.5^2}{2!} \times e^{-0.5})$

$= 10.5 - 6.1e^{-0.5} = 6.797$

等級３　10.5

したがって、契約集団Ｂの契約集団Ａに対する年間総支払保険金の減少率は以下のとおりとなる。

$$\frac{(9.893 \times 0.079 + 6.797 \times 0.298 + 10.5 \times 0.623) - 10.5}{10.5} = -11.0\%$$

Ⅱ.

（１）①（**J**）②（**G**）③（**M**）（①～③は完答）

（２）④（**G**）⑤（**H**）⑥（**B**）⑦（**C**）（④～⑦は完答）　　［（１） ４点 （２） ４点］

（１）

テキスト 8-33 より、調整係数の満たす方程式は、

$$\log M_W(r) = rc = r(1+\theta)E(W_i)$$

題意より各期間のクレーム件数は、負の二項分布 $NB(a, b/(1+b))$ に従うことがわかり（テキスト 2-9）、この複合負の二項分布に従うクレーム総額の平均および積率母関数は、

$$E(W) = a\frac{1-b/(1+b)}{b/(1+b)}E(X)$$

$$M_W(t) = \left[\frac{b/(1+b)}{1-(1-b/(1+b))M_X(t)}\right]^a$$

と書ける（テキスト 2-14）。

これらを上記の方程式に代入して整理すると、

$$r(1+\theta)E(X)\frac{1-b/(1+b)}{b/(1+b)} = \log\left[\frac{b/(1+b)}{1-(1-b/(1+b))M_X(r)}\right]$$

$$r(1+\theta)E(X)\frac{1/(1+b)}{b/(1+b)} = \log\left[\frac{b/(1+b)}{1-1/(1+b)M_X(r)}\right]$$

（２）

正味の収入保険料は、

$$c' = (1+\theta)E(W_i) - 2\alpha E(W_i)$$

正味保険金の額 X' の積率母関数は、

$$M_{X'}(t) = M_{(1-\alpha)X}(t) = M_X((1-\alpha)t) = \frac{1}{1-\mu(1-\alpha)t}$$

したがって、出再後の調整係数の満たす方程式は、

$$r(1+\theta-2\alpha)E(X)\frac{1/(1+b)}{b/(1+b)} = \log\left[\frac{b/(1+b)}{1-(1-b/(1+b))\dfrac{1}{1-\mu(1-\alpha)r}}\right] \quad ・・・（A）$$

また、 r_0 が満たす方程式は、上式で $\alpha = 0$ とおいた、

$$r_0(1+\theta)E(X)\frac{1/(1+b)}{b/(1+b)}=\log\left[\frac{b/(1+b)}{1-(1-b/(1+b))\dfrac{1}{1-\mu r_0}}\right]$$ ・・・（B）

である。

上の（A）式に $r=r_0+\Delta r$ を代入して、テイラー展開により α と $\Delta r/r_0$ の１次の項までで展開すると、

$$r_0(1+\theta)E(X)\frac{1/(1+b)}{b/(1+b)}+r_0\frac{\Delta r}{r_0}(1+\theta)E(X)\frac{1/(1+b)}{b/(1+b)}-2\alpha r_0E(X)\frac{1/(1+b)}{b/(1+b)}+o\left(\frac{\Delta r}{r_0},\alpha\right)$$

$$=\log\left[\frac{b/(1+b)}{1-(1-b/(1+b))\dfrac{1}{1-\mu(1-\alpha)r_0\left(1+\Delta r/r_0\right)}}\right]$$

$$=\log\left[\frac{b/(1+b)}{1-(1-b/(1+b))\dfrac{1}{1-\mu r_0(1-\alpha+\Delta r/r_0)}}\right]+o\left(\frac{\Delta r}{r_0},\alpha\right)$$

$$=\log\left[\frac{b/(1+b)}{1-(1-b/(1+b))\dfrac{1}{1-\mu r_0}}\right]+\mu r_0\frac{1}{(1+b)}\frac{1}{1-\mu r_0}\frac{1}{b/(1+b)-\mu r_0}\left(-\alpha+\Delta r/r_0\right)+o\left(\frac{\Delta r}{r_0},\alpha\right)$$

・・・（C）

ここで、

$o\left(\dfrac{\Delta r}{r_0},\alpha\right)$は、$\alpha$ および $\Delta r/r_0$ の１次より高次の項とする。

（C）式から、（B）式を減じて整理すると、

$$\alpha\left\{\frac{b/(1+b)}{\mu r_0-1}\cdot\frac{1}{b/(1+b)-\mu r_0}+2\right\}=\frac{\Delta r}{r_0}\left\{\frac{b/(1+b)}{\mu r_0-1}\cdot\frac{1}{b/(1+b)-\mu r_0}+(1+\theta)\right\}$$

を得る。