数学（問題）

〔問題１から問題３を通じて必要であれば（付表）に記載された数値を用いなさい。〕

問題１．次の（１）～（１２）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。（６０点）

（1）外見からは全く区別のつかない2つの箱がある。1つの箱（R と呼ぶ）には70 個の赤球と 30 個の白球が入っており、もう1つの箱（W と呼ぶ）には30個の赤球と 70 個の白球が入っている。2つの箱から1つを無作為に選び、その箱から復元抽出によって1球ずつ12 回取り出したところ、赤球が8回、白球が4回出現した。このとき、選ばれた箱が R である確率に最も近い数値は［　　　］である。

（A）0.8428　（B）0.8889　（C）0.9037　（D）0.9270

（E）0.9412　（F）0.9499　（G）0.9674　（H）0.9806

（2）確率変数 X , Y , Z は互いに独立で、すべて平均2の指数分布に従うとする。ある円を考え、$W = \min(X,Y,Z)$ をこの円の半径を表す確率変数とする。この円について、円周の長さを表す確率変数を L 、面積を表す確率変数を S とするとき、L の期待値は［　①　］であり、S の期待値は［　②　］である。

（A）$\dfrac{\pi}{18}$　（B）$\dfrac{\pi}{9}$　（C）$\dfrac{\pi}{6}$　（D）$\dfrac{2}{9}\pi$　（E）$\dfrac{\pi}{3}$

（F）$\dfrac{4}{9}\pi$　（G）$\dfrac{2}{3}\pi$　（H）$\dfrac{8}{9}\pi$　（I）π　（J）$\dfrac{4}{3}\pi$

（3）互いに独立な離散的確率変数 X，Y の確率分布をそれぞれ、

$$P(X=x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x \ (x=1,2,\cdots),\quad P(Y=y)=3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^y \ (y=1,2,\cdots)$$

とする。
このとき、確率変数 $3X+2Y+1$ の積率母関数 $M(t)$ は

$$M(t)=\frac{\boxed{①}}{\left(2-e^{3t}\right)\cdot\left(\boxed{②}\right)} \quad \text{（ただし、}t<\frac{1}{3}\log 2\text{）}$$

である。

（A）e^{2t}　（B）e^{3t}　（C）e^{5t}　（D）$3e^{5t}$　（E）$3e^{6t}$

（F）$2-e^{t}$　（G）$2-e^{2t}$　（H）$4-e^{t}$　（I）$4-e^{2t}$　（J）$4-e^{3t}$

（4）確率変数 X_i（$i=1,2,\cdots,n$）は互いに独立で、区間（$-0.5, 0.5$）上の一様分布に従うとする。
このとき、確率変数 X_1+X_2 の絶対値が正数 α を超えない確率が 0.99 となるような α に最も近い数値は $\boxed{①}$ である。また、中心極限定理を適用すると、確率変数 $X_1+X_2+\cdots+X_{75}$ の絶対値が正数 β を超えない確率が 0.95 となるような β に最も近い数値は $\boxed{②}$ である。

（A）0.86　（B）0.90　（C）0.95　（D）0.98　（E）0.99

（F）1.41　（G）4.11　（H）4.90　（I）10.28　（J）12.25

（5）分散の片側検定において、真の分散が帰無仮説において仮定された分散の4倍であったとき、帰無仮説が確率 99%で棄却されるために必要な最小の標本数は$\boxed{}$個である。ただし、平均は未知とし、有意水準は 1%とする。

（A）17　（B）18　（C）19　（D）20

（E）21　（F）22　（G）24　（H）25

（6）6面それぞれの目が1，1，2，3，4，5となっている（2つの面に1の目があり、6の目がない）変則サイコロがある。この変則サイコロについて、次の帰無仮説 H_0 を検定する。

$$H_0 : p_1 = \frac{2}{6}, p_2 = \frac{1}{6}, p_3 = \frac{1}{6}, p_4 = \frac{1}{6}, p_5 = \frac{1}{6}$$ （p_i は i $(i = 1,2,\cdots,5)$ の目の出る確率）

いま、変則サイコロを60回振った結果が、次のとおりであった。

目の数	1	2	3	4	5
出現回数	30	8	8	7	7

このとき、

有意水準 1%の場合、帰無仮説 H_0 は$\boxed{①}$される。

有意水準 5%の場合、帰無仮説 H_0 は$\boxed{②}$される。

有意水準 10%の場合、帰無仮説 H_0 は$\boxed{③}$される。

（A）採択　（B）棄却

（7）ある電気製品の寿命は指数分布に従うことがわかっている。この電気製品の平均寿命 μ_0 を調べるために、n 個（n は 26 以上の整数）の製品を抽出して寿命を測定した。その結果、寿命が 600 時間未満であった製品の個数は 25 個であり、それらの平均寿命は 475 時間であった。また、残りの（$n-25$）個の製品の寿命は 600 時間以上であった（600 時間で測定を打ち切った）。

この電気製品の平均寿命 μ_0 を有意水準 5%で両側検定して、帰無仮説 $H_0 : \mu_0 = 500$（時間）が採択されたとする。このとき、抽出した製品の個数 n の取りうる最小値に最も近い数値は $\boxed{\quad ① \quad}$ であり、取りうる最大値に最も近い数値は $\boxed{\quad ② \quad}$ である。

（A）26　（B）27　（C）28　（D）31　（E）32

（F）33　（G）34　（H）36　（I）37　（J）38

（8）ある屋外イベントにおいて、入場希望者が多いため、1 番から N 番まで通し番号をつけて整理券を配布した。いま、配布した整理券の枚数を知らない第三者が、その枚数を調べるために、整理券を受け取った入場希望者から無作為に 30 人を抽出してそれらの 30 枚の整理券の番号の和を求めたところ 132,000 であった。この配布した整理券の枚数について、その枚数が十分に大きいものとして信頼係数 95%で区間推定を行ったとき、信頼区間の下限に最も近い数値は $\boxed{\quad ① \quad}$ であり、上限に最も近い数値は $\boxed{\quad ② \quad}$ である。

（A）6,229　（B）6,410　（C）6,906　（D）6,982　（E）7,226

（F）10,372　（G）10,616　（H）10,692　（I）11,188　（J）11,369

（9）ある農作物について、同時期に収穫された X 農園の農作物 6 個と Y 農園の農作物 5 個の重さを測定したところ、次のとおりであった。

（単位：グラム）

X 農園：	125	140	133	112	130	152
Y 農園：	118	123	135	117	132	

X 農園と Y 農園の農作物の重さの分散比（＝（Y 農園の農作物の重さの分散）÷（X 農園の農作物の重さの分散））について信頼係数 95%で区間推定を行ったとき、信頼区間の下限に最も近い数値は $\boxed{①}$ であり、上限に最も近い数値は $\boxed{②}$ である。ただし、X 農園および Y 農園の農作物の重さはそれぞれ正規分布に従うものとする。

（A）0.0387　（B）0.0471　（C）0.0491　（D）0.0581　（E）0.0605

（F）2.4262　（G）2.5273　（H）2.6759　（I）3.2561　（J）3.3918

（１０）２種類のデータ x, y の n 個の観測値 (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \cdots, n)$ について、$x_1, x_2, \cdots, x_n$ の平均値を $\bar{x}$ 、$y_1, y_2, \cdots, y_n$ の平均値を $\bar{y}$ とする。y を x で回帰した回帰直線は $y = ax + 3$ 、x を y で回帰した回帰直線は $x = \dfrac{y}{3} + b$ であり、$(\bar{x}, \bar{y}) = (8, 6)$ であった。このとき $a =$ ① 、$b =$ ② 、x と y の相関係数 r_{xy} に最も近い数値は ③ である。

[①の選択肢]

（A）$-\dfrac{7}{8}$　（B）$-\dfrac{5}{8}$　（C）$-\dfrac{3}{8}$　（D）$-\dfrac{1}{8}$

（E）$\dfrac{1}{8}$　（F）$\dfrac{3}{8}$　（G）$\dfrac{5}{8}$　（H）$\dfrac{7}{8}$

[②の選択肢]

（A）-8　（B）-6　（C）-4　（D）-2

（E）2　（F）4　（G）6　（H）8

[③の選択肢]

（A）-0.791　（B）-0.612　（C）-0.456　（D）-0.354

（E）0.354　（F）0.456　（G）0.612　（H）0.791

（１１）$AR(2)$ モデル $Y_t = 2.0 + 0.4Y_{t-1} + 0.2Y_{t-2} + \varepsilon_t$ （$E(\varepsilon_t) = 0$）について、偏自己相関 ϕ_{11}, ϕ_{22}, ϕ_{33} はそれぞれ、$\phi_{11} =$ ① 、$\phi_{22} =$ ② 、$\phi_{33} =$ ③ である。

（A）0.00　（B）0.10　（C）0.20　（D）0.26　（E）0.30

（F）0.40　（G）0.48　（H）0.50　（I）0.60　（J）1.00

（１２）ある会は正会員、準会員、研究会員の3種の会員で構成されており、以下のことがわかっている。

・X0年12月末、正会員、準会員、研究会員はそれぞれ1,000人ずついる。
・12月末に研究会員だった者は、翌年6月末に30％の確率で準会員になり、70％の確率で研究会員のままである。
・12月末に準会員だった者は、翌年6月末に20％の確率で正会員になり、80％の確率で準会員のままである。
・正会員は、翌年も正会員である。
・研究会員は毎年6月末に400人増える。
・上記以外に会員の異動はない。

例えば、X1年12月末の研究会員の人数は、1,000人×70％＋400人＝1,100人ということになる。

このとき、X2年12月末の正会員の人数は$\boxed{\quad ① \quad}$人、準会員の人数は$\boxed{\quad ② \quad}$人、研究会員の人数は$\boxed{\quad ③ \quad}$人である。

また、X5年12月末の正会員の人数は$\boxed{\quad ④ \quad}$人である。

ただし、毎年の会員数の計算において、途中の端数処理は行わないものとする。

［①～③の選択肢］

（A）1,100　（B）1,170　（C）1,210　（D）1,260　（E）1,280

（F）1,360　（G）1,370　（H）1,420　（I）1,460　（J）1,530

［④の選択肢］

（A）1,926　（B）2,025　（C）2,175　（D）2,186

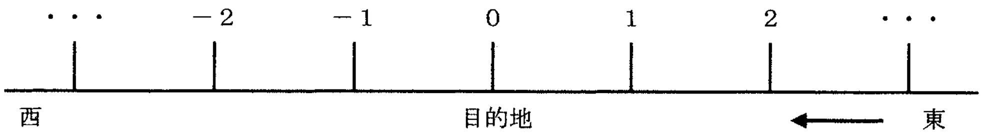
（E）2,210　（F）2,287　（G）2,315　（H）2,352

問題2． ある運転手が東西に伸びる大通りに面した目的地へ向かって東側から自動車を走らせている。この大通りには、目的地から東西へ向かって、目的地も含め等間隔にコインパーキングが存在している。この運転手が目的地に到着するためには、駐車可能なコインパーキングに駐車し、そこから目的地まで歩いて行くことになるが、運転手は歩く距離を少しでも短くしたいと考えている。そのため、ある仮定のもとで歩く距離の期待値について調べることとした。
このとき、次の（1）、（2）について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれ選択肢の中から1つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

（２０点）

本問において、次のことを仮定する。

・下図のように大通りを数直線に見立て、目的地を原点、東側を正、西側を負とし、各コインパーキングの間隔を 1 とする。すなわち、位置 j（数直線上の j の位置、$j=0,\pm1,\pm2$・・・）にコインパーキングが存在することになる。なお、大通りは東西に無限に続いているものとする。



・各コインパーキングは営業している場合と営業していない場合があり、営業している場合は、一定の確率 $p(0<p<1)$ で駐車することができる。
・各コインパーキングに駐車できるかどうかは、互いに独立である。
・運転手は各コインパーキングが営業しているか営業していないかを知っている。
・自動車は東側から西側に向かってのみ進行する。
・各 $k(=1,2,\cdots)$ に対し、次のルール S_k に従って自動車を駐車する。

S_k：位置 k まで自動車を走らせ、位置 $k-1$ 以降の駐車可能な最初のコインパーキングに駐車する。

（1）すべてのコインパーキングが営業している場合
まず、S_k のもとで運転手が歩く距離の期待値 E_k を求める。
S_k のもとで駐車するコインパーキングの位置を表す確率変数を J とすると、J の確率分布 $P(J=j)$ は

$$P(J=j)=\left(\boxed{\quad ① \quad}\right)^{\boxed{②}}\cdot\left(\boxed{\quad ③ \quad}\right) \qquad (j\leq k-1)$$

で与えられる。なぜなら、$J=j$ は位置 $k-1,k-2,\cdots,j+1$ は営業しているが駐車不可能で、位置 j が駐車可能であることを意味するからである。

また、位置 $J=j$ に駐車したとき、運転手の歩く距離 $g(j)$ は

$$g(j)=\boxed{\quad ④ \quad} \qquad (j \le k-1)$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}
E_k &= E(g(J)) \\
&= \sum_{j<k} g(j)\cdot P(J=j) \\
&= \sum_{j\le -1} g(j)\cdot P(J=j) + \sum_{j=0}^{k-1} g(j)\cdot P(J=j) \\
&= \frac{\boxed{\quad ⑤ \quad}\cdot\left(\boxed{\quad ① \quad}\right)^{\boxed{⑥}} + \boxed{\quad ⑦ \quad} - \boxed{\quad ⑧ \quad}}{p}
\end{aligned}$$

となる。

次に、運転手が歩く距離の期待値 E_k が最も小さくなる k を求めるために、E_{k+1} と E_k の差を調べると、

$$E_{k+1}-E_k = \boxed{\quad ⑨ \quad} - \boxed{\quad ⑤ \quad}\cdot\left(\boxed{\quad ① \quad}\right)^{\boxed{⑥}}$$

となり、$E_{k+1}-E_k$ の値が正となるのは、

$$k > -\frac{\log_e \boxed{\quad ⑩ \quad}}{\log_e(1-p)}$$

のときに限られる。$E_{k+1}-E_k$ は単調増加であるから、上式を満足する最小の k を k^* と定義すると、$k=k^*$ で E_k は最小となる。したがって、運転手が歩く距離の期待値が最も小さくなるのは、位置 k^* まで自動車を走らせ、それ以降の駐車可能な最初のコインパーキングに駐車するときである。

（2）位置 j が正の奇数 $(j=1,3,5,\cdots)$ のコインパーキングは節電のため営業しておらず、その他のコインパーキングは営業している場合

k が正の偶数とすると、$j=k-1$ の位置のコインパーキングでは駐車することはできない。すなわち、この場合 S_k のもとで駐車しても S_{k-1} のもとで駐車しても、いずれも歩く距離の期待値は同じであり、$E_k=E_{k-1}$ となる。したがって、以下では、k が正の偶数の場合を考えることとする。

まず、次の（i）～(iii)の場合に分けて J の確率分布 $P(J=j)$ を求める。

(i) $j \geq 0$ かつ j が奇数のとき

$J=j$ は、営業しておらず、駐車できないため、

$$P(J=j)=\boxed{⑪} \qquad (j=1,3,5,\cdots)$$

となる。

(ii) $j \geq 0$ かつ j が偶数のとき

$J=j$ は、位置 $k-1,k-3,\cdots,j+1$ が営業しておらず、位置 $k-2,k-4,\cdots,j+2$ は営業しているが駐車不可能で、位置 j で初めて駐車可能であることを意味するため、

$$P(J=j)=\left(\boxed{①}\right)^{\boxed{⑫}}\cdot\left(\boxed{③}\right) \qquad (j=0,2,4,\cdots)$$

となる。

(iii) $j<0$ のとき

$J=j$ は、位置 $k-1,k-3,\cdots,1$ が営業しておらず、位置 $k-2,k-4,\cdots,0$ は営業しているが駐車不可能、位置 $-1,-2,\cdots,j+1$ も営業しているが駐車不可能で、位置 j で初めて駐車可能であることを意味するため、

$$P(J=j)=\left(\boxed{①}\right)^{\boxed{⑬}}\cdot\left(\boxed{③}\right) \qquad (j=-1,-2,-3,\cdots)$$

となる。

よって、

$$E_k=E(g(J))=\frac{\boxed{⑭}\cdot\left(\boxed{①}\right)^{\boxed{⑮}}+\boxed{⑦}-\boxed{⑯}}{p}$$

となる。

（1）と同様に、E_{k+2} と E_k の差を調べると、$E_{k+2}-E_k$ の値が正となるのは、

$$k > \frac{\boxed{\quad ⑰ \quad}\cdot\left(\log_e \boxed{\quad ⑱ \quad} - \log_e \boxed{\quad ⑲ \quad}\right)}{\log_e(1-p)}$$

のときに限られる。$E_{k+2}-E_k$ は単調増加であり、また、正の偶数 k に対し $E_k = E_{k-1}$ であるため、上式を満足する最小の偶数 k を k^{**} と定義すると、$k = k^{**}$ および $k = k^{**}-1$ で E_k は最小となる。したがって、運転手が歩く距離の期待値が最も小さくなり、かつ、k が最小となるのは、位置 $k^{**}-1$ まで自動車を走らせ、それ以降の駐車可能な最初のコインパーキングに駐車するときである。

[①、③、⑦の選択肢]

（A）p　（B）$1-p$　（C）kp　（D）$1-kp$

（E）$(k+1)p$　（F）$1-(k+1)p$　（G）$(k-1)p$　（H）$1-(k-1)p$

（I）p^k　（J）$1-p^k$　（K）p^{k-1}　（L）$1-p^{k-1}$

[②、⑥、⑫、⑬、⑮の選択肢]

（A）k　（B）$k+1$　（C）$\dfrac{k}{2}$　（D）$\dfrac{k+1}{2}$

（E）$k+j$　（F）$k-1+j$　（G）$k-j$　（H）$k-1-j$

（I）$\dfrac{k-2+j}{2}$　（J）$\dfrac{k-2+2j}{2}$　（K）$\dfrac{k-2-j}{2}$　（L）$\dfrac{k-2-2j}{2}$

[④の選択肢]

（A）j　（B）$|j|$　（C）$2j$　（D）$2|j|$

（E）kj　（F）$|kj|$　（G）pj　（H）$|pj|$

[⑤、⑧、⑨、⑩、⑪、⑭、⑯、⑰、⑱、⑲の選択肢]

（A）0　（B）1　（C）2　（D）3

（E）k　（F）$(k+1)$　（G）$(k-1)$　（H）p

（I）$(1-p)$　（J）j　（K）$(j+1)$　（L）$(j-1)$

問題3． ある投資信託の平均収益率を測定するために、この投資信託の月次収益率を n ヶ月間観測し、記録した。この観測標本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ は正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの独立の標本とし、その母平均を推定することにより平均収益率を推測したい。このとき、次の（1）、（2）について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれ選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。（２０点）

（1）まず、母平均の推定量として、標本の線形結合である線形推定量 T をとりあげ、その中から不偏性、有効性、充足性、一致性を満たす推定量を見つけだすこととする。
標本変量を $X_i \left(i = 1,2,\cdots,n\right)$ としたとき、T は

$$T = \sum_{i=1}^{n} \omega_i X_i$$

となる。この T が母平均 μ の不偏推定量となるためには、

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = \boxed{\quad ① \quad}$$

を満たす必要がある。さらに、T の分散は $\sum_{i=1}^{n} \boxed{\quad ② \quad} \times \sigma^2$ であるので、この不偏推定量の分散を最小にするためには、

$$\omega_i = \boxed{\quad ③ \quad}$$

を満たせばよい。よって、これらの条件を満たす線形推定量 S は、$\sum_{i=1}^{n} \boxed{\quad ③ \quad} \times X_i$ であることがわかった。

次に、線形推定量 S が有効推定量であるかを調べるために、クラーメル・ラオの不等式

$$\boxed{\quad ④ \quad} \geq \frac{1}{nE\left(\left\{\frac{\partial \log f(X;\mu)}{\partial \mu}\right\}^2\right)}$$

の下限を満たすかを計算することにした。なお、$f(x;\mu)$ は母集団分布の確率密度関数である。クラーメル・ラオの不等式の右辺は、

$$\frac{1}{nE\left(\left\{\frac{\partial \log f(X;\mu)}{\partial \mu}\right\}^2\right)} = \frac{1}{nE\left(\left\{\frac{\left(X - \boxed{\quad ⑤ \quad}\right)}{\boxed{\quad ⑥ \quad}}\right\}^2\right)}$$
$$= \boxed{\quad ⑦ \quad}$$

であり $\boxed{\quad ④ \quad}$ と等しくなるため、線形推定量 S はクラーメル・ラオの不等式の下限を満たし、有効推定量であることがわかった。

次に、S が充足推定量であるかを調べることにした。正規分布の再生性より、S は平均 $\boxed{⑧}$、分散 $\boxed{⑨}$ の正規分布に従うことから、S の確率密度関数を $g(t;\mu)$、$t=\sum_{i=1}^{n}\boxed{③}\times t_i$ とおくと、$X_1,X_2,\cdots,X_n$ の同時確率密度関数は、

$$\prod_{i=1}^{n} f(t_i;\mu)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \times \exp\left\{-\frac{\boxed{⑩}}{2\sigma^2}\right\}$$

である。ここで、ある $\hat{s}$ について、

$$\boxed{⑩}=n\times\boxed{⑪}+2\times\boxed{⑫}\times\left(\boxed{⑬}-n\hat{s}\right)+\boxed{⑭}$$

となるので、$\hat{s}$ に t を代入すると、$X_1,X_2,\cdots,X_n$ の同時確率密度関数は、

$$\prod_{i=1}^{n} f(t_i;\mu)=g(t;\mu)\times\frac{1}{\boxed{⑮}}\times\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\boxed{⑯}}\times\exp\left\{-\frac{\boxed{⑰}}{2\sigma^2}\right\}$$

となり、S が充足推定量であることがわかった。

最後に、S が一致推定量であるかを調べるために、チェビシェフの不等式

$$\boxed{⑱}\le\frac{1}{k^2}\quad（k\text{ は1より大きい任意の定数}）$$

から次の不等式を導いた。

$$P\left(\left|S-E(S)\right|<\varepsilon\right)\ge\boxed{⑲}$$

この不等式の n を十分大きくすれば、

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|S-E(S)\right|<\varepsilon\right)=\boxed{⑳}$$

が成立することから、一致推定量であることがわかった。

（2）（1）で得られた結果を踏まえ、観測された月次収益率から S を計算する2つのプログラム A と B を作成したが、どちらのプログラムも最新の標本 x_n を使用せずに次のように推定量を誤って求めていることがわかった。

プログラム A ：x_1 から x_{n-1} の $n-1$ ヶ月分のデータを使用、すなわち、$\sum_{i=1}^{n}\boxed{③}\times X_i$ において n の部分を $n-1$ として推定量を求めた

プログラム B ：x_n の代わりに x_1 を使用、すなわち、$\sum_{i=1}^{n-1}\boxed{③}\times X_i+\boxed{③}\times X_1$ として推定量を求めた

この2つのプログラムで求めた推定量について、不偏性、有効性、充足性、一致性を満たしているかを調べることとした。まず、不偏性について調べたところ、どちらの推定量も不偏性を満たしていることがわかった。このとき、プログラム A で求めた推定量は $\boxed{㉑}$ 推定量であり、プログラム B で求めた推定量は $\boxed{㉒}$ 推定量である。

［①、②、③、⑤、⑥、⑦、⑧、⑨の選択肢］

（A）0 （B）1 （C）n （D）$\dfrac{1}{n-1}$ （E）$\dfrac{1}{n}$

（F）$\dfrac{1}{n^2}$ （G）μ （H）$n\mu$ （I）$\dfrac{\mu}{n-1}$ （J）$\dfrac{\mu}{n}$

（K）$\dfrac{\mu}{2n}$ （L）$\dfrac{\mu}{n^2}$ （M）σ^2 （N）$n\sigma^2$ （O）$\dfrac{\sigma^2}{n-1}$

（P）$\dfrac{\sigma^2}{n}$ （Q）$\dfrac{\sigma^2}{2n}$ （R）$\dfrac{\sigma^2}{n^2}$ （S）ω_i （T）ω_i^2

［④の選択肢］

（A）$E(S)$ （B）$nE(S)$ （C）$E(S^2)$ （D）$nE(S^2)$

（E）$\sqrt{V(S)}$ （F）$\sqrt{nV(S)}$ （G）$V(S)$ （H）$nV(S)$

［⑩、⑰の選択肢］

（A）t^2 （B）$(t-\mu)^2$ （C）$(t-n\mu)^2$ （D）$\sum_{i=1}^{n} t_i$

（E）$\sum_{i=1}^{n} t_i^2$ （F）$\sum_{i=1}^{n}(t_i-\mu)^2$ （G）$\sum_{i=1}^{n}(t_i-n\mu)^2$ （H）$\sum_{i=1}^{n}(t_i-t)^2$

（I）$\sum_{i=1}^{n}(t_i-nt)^2$ （J）$\sum_{i=1}^{n}\left(t_i-\dfrac{t}{n}\right)^2$

［⑪、⑫、⑬、⑭の選択肢］

（A）$\hat{s}^2$ （B）$(\hat{s}-\mu)$ （C）$(\hat{s}-n\mu)$ （D）$(\hat{s}-\mu)^2$

（E）$(\hat{s}-n\mu)^2$ （F）$\sum_{i=1}^{n} t_i$ （G）$\sum_{i=1}^{n} t_i^2$ （H）$\sum_{i=1}^{n}(t_i-\mu)^2$

（I）$\sum_{i=1}^{n}(t_i-n\mu)^2$ （J）$\sum_{i=1}^{n}(t_i-\hat{s})^2$ （K）$n\sum_{i=1}^{n}(t_i-n\hat{s})^2$ （L）$\sum_{i=1}^{n}\left(t_i-\dfrac{\hat{s}}{n}\right)^2$

[⑮、⑯の選択肢]

（A） $\frac{n-1}{2}$　（B） $\frac{n}{2}$　（C） $n-1$　（D） n　（E） $\sqrt{\frac{n-1}{2}}$

（F） $\sqrt{\frac{n}{2}}$　（G） $\sqrt{n-1}$　（H） $\sqrt{n}$　（I） $\frac{1}{\sqrt{n-1}}$　（J） $\frac{1}{\sqrt{n}}$

[⑱の選択肢]

（A） $P(|S-E(S)|\geq kE(S))$　（B） $P(|S-E(S)|< kE(S))$　（C） $P(|S-E(S)|\leq kE(S))$

（D） $P(|S-E(S)|\geq k\sqrt{V(S)})$　（E） $P(|S-E(S)|< k\sqrt{V(S)})$　（F） $P(|S-E(S)|\leq k\sqrt{V(S)})$

（G） $P(|S-E(S)|\geq kV(S))$　（H） $P(|S-E(S)|< kV(S))$　（I） $P(|S-E(S)|\leq kV(S))$

[⑲、⑳の選択肢]

（A） 0　（B） 1　（C） $\frac{\mu}{\varepsilon^2}$　（D） $\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$　（E） $\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$

（F） $\frac{\sigma^4}{n^2\varepsilon^2}$　（G） $1-\frac{\mu}{\varepsilon^2}$　（H） $1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$　（I） $1-\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$　（J） $1-\frac{\sigma^4}{n^2\varepsilon^2}$

[㉑、㉒の選択肢]

（A） 有効性、充足性、一致性を満たす

（B） 有効性、充足性を満たし、一致性を満たさない

（C） 有効性、一致性を満たし、充足性を満たさない

（D） 充足性、一致性を満たし、有効性を満たさない

（E） 有効性を満たし、充足性、一致性を満たさない

（F） 充足性を満たし、有効性、一致性を満たさない

（G） 一致性を満たし、有効性、充足性を満たさない

（H） 有効性、充足性、一致性を満たさない

(付表)

I .標準正規分布表

$P(x > 0.25) = 0.4013$

上側ε点 $u(\varepsilon)$ から確率εを求める表

$u(\varepsilon) \to \varepsilon$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.0*	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1*	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2*	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3*	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4*	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5*	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6*	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7*	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8*	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9*	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0*	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1*	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2*	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3*	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4*	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5*	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6*	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7*	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8*	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9*	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0*	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1*	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2*	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3*	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4*	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5*	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6*	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7*	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8*	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9*	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014

$$P(x > 1.9600) = 0.025$$

確率εから上側ε点 $u(\varepsilon)$ を求める表

$\varepsilon \to u(\varepsilon)$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.00*	∞	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656
0.01*	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0749
0.02*	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.9600	1.9431	1.9268	1.9110	1.8957
0.03*	1.8808	1.8663	1.8522	1.8384	1.8250	1.8119	1.7991	1.7866	1.7744	1.7624
0.04*	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546
0.05*	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5718	1.5632
0.06*	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063	1.4985	1.4909	1.4833
0.07*	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4395	1.4325	1.4255	1.4187	1.4118
0.08*	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3595	1.3532	1.3469
0.09*	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3106	1.3047	1.2988	1.2930	1.2873
0.10*	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319
0.11*	1.2265	1.2212	1.2160	1.2107	1.2055	1.2004	1.1952	1.1901	1.1850	1.1800
0.12*	1.1750	1.1700	1.1650	1.1601	1.1552	1.1503	1.1455	1.1407	1.1359	1.1311
0.13*	1.1264	1.1217	1.1170	1.1123	1.1077	1.1031	1.0985	1.0939	1.0893	1.0848
0.14*	1.0803	1.0758	1.0714	1.0669	1.0625	1.0581	1.0537	1.0494	1.0450	1.0407
0.15*	1.0364	1.0322	1.0279	1.0237	1.0194	1.0152	1.0110	1.0069	1.0027	0.9986
0.16*	0.9945	0.9904	0.9863	0.9822	0.9782	0.9741	0.9701	0.9661	0.9621	0.9581
0.17*	0.9542	0.9502	0.9463	0.9424	0.9385	0.9346	0.9307	0.9269	0.9230	0.9192
0.18*	0.9154	0.9116	0.9078	0.9040	0.9002	0.8965	0.8927	0.8890	0.8853	0.8816
0.19*	0.8779	0.8742	0.8705	0.8669	0.8633	0.8596	0.8560	0.8524	0.8488	0.8452
0.20*	0.8416	0.8381	0.8345	0.8310	0.8274	0.8239	0.8204	0.8169	0.8134	0.8099
0.21*	0.8064	0.8030	0.7995	0.7961	0.7926	0.7892	0.7858	0.7824	0.7790	0.7756
0.22*	0.7722	0.7688	0.7655	0.7621	0.7588	0.7554	0.7521	0.7488	0.7454	0.7421
0.23*	0.7388	0.7356	0.7323	0.7290	0.7257	0.7225	0.7192	0.7160	0.7128	0.7095
0.24*	0.7063	0.7031	0.6999	0.6967	0.6935	0.6903	0.6871	0.6840	0.6808	0.6776
0.25*	0.6745	0.6713	0.6682	0.6651	0.6620	0.6588	0.6557	0.6526	0.6495	0.6464
0.26*	0.6433	0.6403	0.6372	0.6341	0.6311	0.6280	0.6250	0.6219	0.6189	0.6158
0.27*	0.6128	0.6098	0.6068	0.6038	0.6008	0.5978	0.5948	0.5918	0.5888	0.5858
0.28*	0.5828	0.5799	0.5769	0.5740	0.5710	0.5681	0.5651	0.5622	0.5592	0.5563
0.29*	0.5534	0.5505	0.5476	0.5446	0.5417	0.5388	0.5359	0.5330	0.5302	0.5273
0.30*	0.5244	0.5215	0.5187	0.5158	0.5129	0.5101	0.5072	0.5044	0.5015	0.4987
0.31*	0.4959	0.4930	0.4902	0.4874	0.4845	0.4817	0.4789	0.4761	0.4733	0.4705
0.32*	0.4677	0.4649	0.4621	0.4593	0.4565	0.4538	0.4510	0.4482	0.4454	0.4427
0.33*	0.4399	0.4372	0.4344	0.4316	0.4289	0.4261	0.4234	0.4207	0.4179	0.4152
0.34*	0.4125	0.4097	0.4070	0.4043	0.4016	0.3989	0.3961	0.3934	0.3907	0.3880
0.35*	0.3853	0.3826	0.3799	0.3772	0.3745	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611
0.36*	0.3585	0.3558	0.3531	0.3505	0.3478	0.3451	0.3425	0.3398	0.3372	0.3345
0.37*	0.3319	0.3292	0.3266	0.3239	0.3213	0.3186	0.3160	0.3134	0.3107	0.3081
0.38*	0.3055	0.3029	0.3002	0.2976	0.2950	0.2924	0.2898	0.2871	0.2845	0.2819
0.39*	0.2793	0.2767	0.2741	0.2715	0.2689	0.2663	0.2637	0.2611	0.2585	0.2559
0.40*	0.2533	0.2508	0.2482	0.2456	0.2430	0.2404	0.2378	0.2353	0.2327	0.2301
0.41*	0.2275	0.2250	0.2224	0.2198	0.2173	0.2147	0.2121	0.2096	0.2070	0.2045
0.42*	0.2019	0.1993	0.1968	0.1942	0.1917	0.1891	0.1866	0.1840	0.1815	0.1789
0.43*	0.1764	0.1738	0.1713	0.1687	0.1662	0.1637	0.1611	0.1586	0.1560	0.1535
0.44*	0.1510	0.1484	0.1459	0.1434	0.1408	0.1383	0.1358	0.1332	0.1307	0.1282
0.45*	0.1257	0.1231	0.1206	0.1181	0.1156	0.1130	0.1105	0.1080	0.1055	0.1030
0.46*	0.1004	0.0979	0.0954	0.0929	0.0904	0.0878	0.0853	0.0828	0.0803	0.0778
0.47*	0.0753	0.0728	0.0702	0.0677	0.0652	0.0627	0.0602	0.0577	0.0552	0.0527
0.48*	0.0502	0.0476	0.0451	0.0426	0.0401	0.0376	0.0351	0.0326	0.0301	0.0276
0.49*	0.0251	0.0226	0.0201	0.0175	0.0150	0.0125	0.0100	0.0075	0.0050	0.0025

Ⅱ.自由度φのχ^2分布の上側ε点： $\chi^2_\varphi(\varepsilon)$

φ \ ε	0.990	0.975	0.950	0.900	0.500	0.100	0.050	0.025	0.010
1	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	0.4549	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349
2	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	1.3863	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103
3	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	2.3660	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449
4	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	3.3567	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767
5	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	4.3515	9.2364	11.0705	12.8325	15.0863
6	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	5.3481	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119
7	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	6.3458	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753
8	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	7.3441	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902
9	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	8.3428	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660
10	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	9.3418	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093
11	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	10.3410	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250
12	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	11.3403	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170
13	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415	12.3398	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882
14	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	13.3393	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412
15	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468	14.3389	22.3071	24.9958	27.4884	30.5779
16	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	15.3385	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999
17	6.4078	7.5642	8.6718	10.0852	16.3382	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087
18	7.0149	8.2307	9.3905	10.8649	17.3379	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053
19	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509	18.3377	27.2036	30.1435	32.8523	36.1909
20	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	19.3374	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662
21	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	20.3372	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322
22	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415	21.3370	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894
23	10.1957	11.6886	13.0905	14.8480	22.3369	32.0069	35.1725	38.0756	41.6384
24	10.8564	12.4012	13.8484	15.6587	23.3367	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798
25	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	24.3366	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141
26	12.1981	13.8439	15.3792	17.2919	25.3365	35.5632	38.8851	41.9232	45.6417
27	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	26.3363	36.7412	40.1133	43.1945	46.9629
28	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392	27.3362	37.9159	41.3371	44.4608	48.2782
29	14.2565	16.0471	17.7084	19.7677	28.3361	39.0875	42.5570	45.7223	49.5879
30	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992	29.3360	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922
31	15.6555	17.5387	19.2806	21.4336	30.3359	41.4217	44.9853	48.2319	52.1914
32	16.3622	18.2908	20.0719	22.2706	31.3359	42.5847	46.1943	49.4804	53.4858
33	17.0735	19.0467	20.8665	23.1102	32.3358	43.7452	47.3999	50.7251	54.7755
34	17.7891	19.8063	21.6643	23.9523	33.3357	44.9032	48.6024	51.9660	56.0609
35	18.5089	20.5694	22.4650	24.7967	34.3356	46.0588	49.8018	53.2033	57.3421
36	19.2327	21.3359	23.2686	25.6433	35.3356	47.2122	50.9985	54.4373	58.6192
37	19.9602	22.1056	24.0749	26.4921	36.3355	48.3634	52.1923	55.6680	59.8925
38	20.6914	22.8785	24.8839	27.3430	37.3355	49.5126	53.3835	56.8955	61.1621
39	21.4262	23.6543	25.6954	28.1958	38.3354	50.6598	54.5722	58.1201	62.4281
40	22.1643	24.4330	26.5093	29.0505	39.3353	51.8051	55.7585	59.3417	63.6907
41	22.9056	25.2145	27.3256	29.9071	40.3353	52.9485	56.9424	60.5606	64.9501
42	23.6501	25.9987	28.1440	30.7654	41.3352	54.0902	58.1240	61.7768	66.2062
43	24.3976	26.7854	28.9647	31.6255	42.3352	55.2302	59.3035	62.9904	67.4593
44	25.1480	27.5746	29.7875	32.4871	43.3352	56.3685	60.4809	64.2015	68.7095
45	25.9013	28.3662	30.6123	33.3504	44.3351	57.5053	61.6562	65.4102	69.9568
46	26.6572	29.1601	31.4390	34.2152	45.3351	58.6405	62.8296	66.6165	71.2014
47	27.4158	29.9562	32.2676	35.0814	46.3350	59.7743	64.0011	67.8206	72.4433
48	28.1770	30.7545	33.0981	35.9491	47.3350	60.9066	65.1708	69.0226	73.6826
49	28.9406	31.5549	33.9303	36.8182	48.3350	62.0375	66.3386	70.2224	74.9195
50	29.7067	32.3574	34.7643	37.6886	49.3349	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539

Ⅲ．分母の自由度n、分子の自由度mのF分布の上側 ε 点：$F_n^m(\varepsilon)$

$\varepsilon =$ 0.100

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	8.526	9.000	9.162	9.243	9.293	9.326	9.349	9.367	9.381	9.392
3	5.538	5.462	5.391	5.343	5.309	5.285	5.266	5.252	5.240	5.230
4	4.545	4.325	4.191	4.107	4.051	4.010	3.979	3.955	3.936	3.920
5	4.060	3.780	3.619	3.520	3.453	3.405	3.368	3.339	3.316	3.297
6	3.776	3.463	3.289	3.181	3.108	3.055	3.014	2.983	2.958	2.937
7	3.589	3.257	3.074	2.961	2.883	2.827	2.785	2.752	2.725	2.703
8	3.458	3.113	2.924	2.806	2.726	2.668	2.624	2.589	2.561	2.538
9	3.360	3.006	2.813	2.693	2.611	2.551	2.505	2.469	2.440	2.416
10	3.285	2.924	2.728	2.605	2.522	2.461	2.414	2.377	2.347	2.323

$\varepsilon =$ 0.050

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	18.5128	19.0000	19.1643	19.2468	19.2964	19.3295	19.3532	19.3710	19.3848	19.3959
3	10.1280	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988	5.9644
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990	4.0600
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767	3.6365
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782

$\varepsilon =$ 0.025

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	38.5063	39.0000	39.1655	39.2484	39.2982	39.3315	39.3552	39.3730	39.3869	39.3980
3	17.4434	16.0441	15.4392	15.1010	14.8848	14.7347	14.6244	14.5399	14.4731	14.4189
4	12.2179	10.6491	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439
5	10.0070	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192
6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234	5.4613
7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611
8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951
9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260	3.9639
10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790	3.7168

$\varepsilon =$ 0.010

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	98.5025	99.0000	99.1662	99.2494	99.2993	99.3326	99.3564	99.3742	99.3881	99.3992
3	34.1162	30.8165	29.4567	28.7099	28.2371	27.9107	27.6717	27.4892	27.3452	27.2287
4	21.1977	18.0000	16.6944	15.9770	15.5219	15.2069	14.9758	14.7989	14.6591	14.5459
5	16.2582	13.2739	12.0600	11.3919	10.9670	10.6723	10.4555	10.2893	10.1578	10.0510
6	13.7450	10.9248	9.7795	9.1483	8.7459	8.4661	8.2600	8.1017	7.9761	7.8741
7	12.2464	9.5466	8.4513	7.8466	7.4604	7.1914	6.9928	6.8400	6.7188	6.6201
8	11.2586	8.6491	7.5910	7.0061	6.6318	6.3707	6.1776	6.0289	5.9106	5.8143
9	10.5614	8.0215	6.9919	6.4221	6.0569	5.8018	5.6129	5.4671	5.3511	5.2565
10	10.0443	7.5594	6.5523	5.9943	5.6363	5.3858	5.2001	5.0567	4.9424	4.8491

$\varepsilon =$ 0.005

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	198.5013	199.0000	199.1664	199.2497	199.2996	199.3330	199.3568	199.3746	199.3885	199.3996
3	55.5520	49.7993	47.4672	46.1946	45.3916	44.8385	44.4341	44.1256	43.8824	43.6858
4	31.3328	26.2843	24.2591	23.1545	22.4564	21.9746	21.6217	21.3520	21.1391	20.9667
5	22.7848	18.3138	16.5298	15.5561	14.9396	14.5133	14.2004	13.9610	13.7716	13.6182
6	18.6350	14.5441	12.9166	12.0275	11.4637	11.0730	10.7859	10.5658	10.3915	10.2500
7	16.2356	12.4040	10.8824	10.0505	9.5221	9.1553	8.8854	8.6781	8.5138	8.3803
8	14.6882	11.0424	9.5965	8.8051	8.3018	7.9520	7.6941	7.4959	7.3386	7.2106
9	13.6136	10.1067	8.7171	7.9559	7.4712	7.1339	6.8849	6.6933	6.5411	6.4172
10	12.8265	9.4270	8.0807	7.3428	6.8724	6.5446	6.3025	6.1159	5.9676	5.8467

Ⅳ．自由度φのt分布の上側ε点 $t_{\varphi}(\varepsilon)$

φ \ ε	0.100	0.050	0.025
1	3.0777	6.3138	12.7062
2	1.8856	2.9200	4.3027
3	1.6377	2.3534	3.1824
4	1.5332	2.1318	2.7764
5	1.4759	2.0150	2.5706
6	1.4398	1.9432	2.4469
7	1.4149	1.8946	2.3646
8	1.3968	1.8595	2.3060
9	1.3830	1.8331	2.2622
10	1.3722	1.8125	2.2281
11	1.3634	1.7959	2.2010
12	1.3562	1.7823	2.1788
13	1.3502	1.7709	2.1604
14	1.3450	1.7613	2.1448
15	1.3406	1.7531	2.1314
16	1.3368	1.7459	2.1199
17	1.3334	1.7396	2.1098
18	1.3304	1.7341	2.1009
19	1.3277	1.7291	2.0930
20	1.3253	1.7247	2.0860
21	1.3232	1.7207	2.0796
22	1.3212	1.7171	2.0739
23	1.3195	1.7139	2.0687
24	1.3178	1.7109	2.0639
25	1.3163	1.7081	2.0595

以上

数学（解答例）

（1）

箱Rが選ばれる事象をR、箱Wが選ばれる事象をWとする。また、復元抽出の結果をFとする。求める確率$P(R\mid F)$はベイズの公式により次式で計算される。

$$P(R\mid F)=\frac{P(F\mid R)\cdot P(R)}{P(F\mid R)\cdot P(R)+P(F\mid W)\cdot P(W)}$$

2つの箱から1つの箱を無作為に選ぶということより、

$$P(R)=P(W)=\frac{1}{2}$$

と見なすことができる。

$P(F\mid R)$は箱Rから復元抽出で12回球を取り出すとき、赤球が8回、白球が4回出現する確率である。この確率は毎回の抜き取りで赤球が出現することを成功と呼べば、成功確率$\frac{7}{10}$のベルヌーイ試行を12回繰り返すとき、ちょうど8回成功する確率に他ならない。

したがって、

$$P(F\mid R)={}_{12}C_8\left(\frac{7}{10}\right)^8\left(\frac{3}{10}\right)^4$$

$P(F\mid W)$は成功確率$\frac{3}{10}$のベルヌーイ試行を12回繰り返すとき、ちょうど8回成功する確率に等しいから、同様にして

$$P(F\mid W)={}_{12}C_8\left(\frac{3}{10}\right)^8\left(\frac{7}{10}\right)^4$$

よって、求める確率は以下のとおり。

$$P(R\mid F)=\frac{\left\{{}_{12}C_8\left(\frac{7}{10}\right)^8\left(\frac{3}{10}\right)^4\right\}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}{\left\{{}_{12}C_8\left(\frac{7}{10}\right)^8\left(\frac{3}{10}\right)^4\right\}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+\left\{{}_{12}C_8\left(\frac{3}{10}\right)^8\left(\frac{7}{10}\right)^4\right\}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{7^8\cdot 3^4}{7^8\cdot 3^4+3^8\cdot 7^4}$$

$$=\frac{7^4}{7^4+3^4}\approx 0.9674$$

よって、解答は　**（G）**

（2）

確率変数Wの分布関数$F(w)$を計算する。

$$
\begin{aligned}
F(w) &= P(W \le w) \\
&= P(\min(X,Y,Z) \le w) = 1 - P(\min(X,Y,Z) > w) \\
&= 1 - P((X > w) \cap (Y > w) \cap (Z > w)) \\
&= 1 - P(X > w) \times P(Y > w) \times P(Z > w) \qquad \cdots (*)
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
&P(X > w) = P(Y > w) = P(Z > w) \\
&= \int_w^\infty \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} dt = -\left[e^{-\frac{t}{2}} \right]_w^\infty = e^{-\frac{w}{2}}
\end{aligned}
$$

となるので、

$$
(*) = 1 - \left(e^{-\frac{w}{2}} \right)^3 = 1 - e^{-\frac{3}{2}w}
$$

となることから、Wは平均$\frac{2}{3}$の指数分布に従うことがわかる。よって、

$$
E(W) = \frac{2}{3}、\ E(W^2) = V(W) + E(W)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}
$$

となる。これより、

確率変数Lの期待値は、

$$
E(L) = E(2\pi W) = \frac{4}{3}\pi
$$

であり、確率変数Sの期待値は、

$$
E(S) = E(\pi W^2) = \frac{8}{9}\pi
$$

である。

よって、<u>解答は　①　（J）　②　（H）</u>

（3）

確率変数Xの積率母関数$M_X(t)$（$e^t<2$）は、

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= E\left(e^{tX}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} e^{tk}\left(\frac{1}{2}\right)^k\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{e^t}{2}\right)^k\\
&= \frac{e^t}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{e^t}{2}} = \frac{e^t}{2-e^t}
\end{aligned}
$$

同様に、確率変数Yの積率母関数$M_Y(t)$（$e^t<4$）は、

$$
\begin{aligned}
M_Y(t) &= E\left(e^{tY}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} e^{tk}\cdot 3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^k\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 3\cdot\left(\frac{e^t}{4}\right)^k\\
&= \frac{3e^t}{4}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{e^t}{4}} = \frac{3e^t}{4-e^t}
\end{aligned}
$$

確率変数X、Yは互いに独立であることから、確率変数$3X+2Y+1$の積率母関数$M(t)$は次のとおり計算できる。

$$
\begin{aligned}
M(t) &= E\left(e^{t(3X+2Y+1)}\right)\\
&= E\left(e^{3tX}\cdot e^{2tY}\cdot e^t\right)\\
&= e^t\cdot M_X(3t)\cdot M_Y(2t)\\
&= e^t\cdot\frac{e^{3t}}{2-e^{3t}}\cdot\frac{3e^{2t}}{4-e^{2t}}\\
&= \frac{3e^{6t}}{\left(2-e^{3t}\right)\left(4-e^{2t}\right)}
\end{aligned}
$$

ただし、$2-e^{3t}>0$かつ$4-e^{2t}>0$より$t<\dfrac{1}{3}\log 2$

よって、解答は ① （E） ② （I）

（4）

①

確率変数X_i（$i=1,\cdots,n$）は区間（$-0.5, 0.5$）上の一様分布に従うことから、その確率密度関数$f(x)$は次のとおりとなる。

$$f(x)=\begin{cases}1 & (-0.5<x<0.5)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

X_1、X_2は互いに独立でともに同じ確率密度関数$f(x)$を持っていることから、X_1+X_2の確率密度関数$g(x)$は$-1<x<1$のとき、

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)f(y)dy$$

となる。ここで、$-0.5<x-y<0.5$より$x-0.5<y<x+0.5$、これと$-0.5<y<0.5$より$f(x-y)f(y)=1$となるのは、yが$\max(x-0.5,-0.5)<y<\min(x+0.5,0.5)$のときで、その他の$y$に対しては$f(x-y)f(y)=0$である。

よって、

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)f(y)dy=\int_{\max(x-0.5,-0.5)}^{\min(x+0.5,0.5)} 1dy=\min(x+0.5,0.5)-\max(x-0.5,-0.5)$$

$x<-1$または$x>1$のときは$g(x)=0$である。max、min の記号を用いなければ

$$g(x)=\begin{cases}1-x & (0\le x<1)\\ 1+x & (-1<x<0)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

となる。

X_1+X_2が絶対値において正数α（$\alpha<1$）を超えない確率が0.99となるためには、

$$P(|X_1+X_2|\le\alpha)=0.99$$

を満たす必要がある。したがって、

$$P(|X_1+X_2|\le\alpha)=\int_{-\alpha}^{\alpha} g(x)dx=\int_{-\alpha}^{0}(1+x)dx+\int_{0}^{\alpha}(1-x)dx=2\alpha-\alpha^2=0.99$$

より、$\alpha=0.90$と求まる。

②

$X_1+X_2+\cdots+X_{75}$が絶対値において正数βを超えない確率が0.95となるためには、

$$P(|X_1+X_2+\cdots+X_{75}|\le\beta)=0.95$$

を満たす必要がある。

まず、確率変数X_iの平均$E(X_i)$と分散$V(X_i)$を求める。

$$E(X_i)=\int_{-0.5}^{0.5}xdx=0\text{、}V(X_i)=\int_{-0.5}^{0.5}x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-0.5}^{0.5}=\frac{1}{12}$$

次に、$X_1+X_2+\cdots+X_{75}$の平均と分散を求める。

$$E(X_1+X_2+\cdots+X_{75})=0\text{、}V(X_1+X_2+\cdots+X_{75})=\frac{75}{12}=\frac{25}{4}$$

ここで、中心極限定理を適用すると、

$$\begin{aligned}P(|X_1+X_2+\cdots+X_{75}|\leq\beta)&=P(-\beta\leq X_1+X_2+\cdots+X_{75}\leq\beta)\\&=P\left(-\frac{2}{5}\beta\leq\frac{X_1+X_2+\cdots+X_{75}}{\sqrt{\frac{25}{4}}}\leq\frac{2}{5}\beta\right)\\&=0.95\end{aligned}$$

であり、これより、

$$P\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_{75}}{\sqrt{\frac{25}{4}}}\geq\frac{2}{5}\beta\right)=0.025$$

となることから、

$$\frac{2}{5}\beta=1.9600\text{、すなわち}\beta=4.90$$

よって、<u>解答は　①　（B）　②　（H）</u>

（5）

真の分散を$4\sigma_0^2$、帰無仮説として与えられた分散をσ_0^2とする。

また、標本変量分散をS^2とおけば、

$$P\left(\frac{nS^2}{4\sigma_0^2} > \chi_{n-1}^2(\alpha)\right) = \alpha$$

である。

一方、

$$\frac{nS^2}{\sigma_0^2} > \chi_{n-1}^2(\varepsilon)$$

のときに棄却されるため、$\alpha = 0.99$、$\varepsilon = 0.01$とおいて、

$$\chi_{n-1}^2(0.01) < 4\chi_{n-1}^2(0.99)$$

となる最小の標本数を求めればよい。

$n = 25$のとき、$\dfrac{\chi_{24}^2(0.01)}{\chi_{24}^2(0.99)} = \dfrac{42.9798}{10.8564} = 3.95893\cdots$

$n = 24$のとき、$\dfrac{\chi_{23}^2(0.01)}{\chi_{23}^2(0.99)} = \dfrac{41.6384}{10.1957} = 4.08391\cdots$

よって、解答は　（H）

（6）

1 の出る回数の期待値は20で、それ以外の数の期待値はそれぞれ10である。

$$\chi^2 = \frac{1}{20}(20-30)^2 + \frac{1}{10}\{(8-10)^2 + (8-10)^2 + (7-10)^2 + (7-10)^2\} = 5 + \frac{26}{10} = 7.6$$

であり、このとき、

$7.6 < \chi_4^2(0.01) = 13.2767$

であるため、有意水準 1%の場合、帰無仮説 H_0 は採択される。

同様に、

$7.6 < \chi_4^2(0.05) = 9.4877$

であるため、有意水準 5%の場合、帰無仮説 H_0 は採択される。

$7.6 < \chi_4^2(0.10) = 7.7794$

であるため、有意水準 10%の場合、帰無仮説 H_0 は採択される。

よって、解答は ① （A） ② （A） ③ （A）

（7）

寿命の測定値が時間tで打ち切られている場合に帰無仮説$H_0 : \mu = \mu_0$が採択されるためには、測定値がt未満であった標本r個の値を$x_1, x_2, \cdots, x_r$、時間tで打ち切られた標本の数を$n-r$個であるとし、母平均μを

$$\hat{\mu} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_r + (n-r) \times t}{r}$$

によって推定したとき、

$$\chi^2_{2r}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) < \frac{2r\hat{\mu}}{\mu_0} < \chi^2_{2r}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

を満たすようなnを求めればよい。

題意より、

$$\hat{\mu} = 475 + \frac{(n-25) \times 600}{25} = 24n - 125$$

であるから、

$$32.3574 < \frac{50}{500}(24n - 125) < 71.4202$$

ならばH_0が採択されることになる。

したがって

$$18.6905\cdots < n < 34.9667\cdots$$

nは26以上の整数であるから、

$$26 \le n \le 34$$

である。

よって、<u>解答は　①　（A）　②　（G）</u>

（8）

配布された整理券の番号の平均は$\dfrac{N+1}{2}$である。

抽出した整理券の番号を各々、$x_1, x_2, \cdots, x_{30}$とすると、

$$\bar{x} = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} x_i = \frac{132{,}000}{30} = 4{,}400$$

であることから、$N = 8{,}799$と推定できる。

Nは十分大きいため、有限修正係数を無視して平均値を区間推定すると、

$$\bar{x} - u(\varepsilon/2) \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu = \frac{N+1}{2} < \bar{x} + u(\varepsilon/2) \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

であり、$\bar{x} = 4{,}400, n = 30, u(\varepsilon/2) = 1.9600$（信頼係数$\alpha = 1 - \varepsilon = 0.95$）、および、母集団の分散は$\sigma^2 = \dfrac{N^2 - 1}{12}$※であることを用いると、

$$4{,}400 - 1.96 \times \frac{\sqrt{\dfrac{8{,}799^2 - 1}{12}}}{\sqrt{30}} = 3{,}491.05 < \mu = \frac{N+1}{2} < 4{,}400 + 1.96 \times \frac{\sqrt{\dfrac{8{,}799^2 - 1}{12}}}{\sqrt{30}} = 5{,}308.95$$

したがって、

$$6{,}981.1 < N < 10616.9$$

である。

よって、解答は　①　**（D）**　②　**（G）**

※母集団の分散σ^2の求め方は以下の通り。

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} {x_i}^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{N}(1^2 + 2^2 + \cdots + N^2) - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{N} \cdot \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{4} = \frac{N^2 - 1}{12}$$

（9）

$n_A=6$、$n_B=5$ とおき、A 農園の農作物の標本平均 $\bar{x}_A$、標本分散 s_A^2、B 農園の農作物の標本平均 $\bar{x}_B$、標本分散 s_B^2 を求めると、

$$\bar{x}_A=\frac{125+140+133+112+130+152}{6}=132$$

$$s_A^2=\frac{\sum_{i=1}^{n_A}\left(x_i-\bar{x}_A\right)^2}{n_A}=153$$

$$\bar{x}_B=\frac{118+123+135+117+132}{5}=125$$

$$s_B^2=\frac{\sum_{i=1}^{n_B}\left(x_i-\bar{x}_B\right)^2}{n_B}=53.2$$

である。

ここで、題意の分散比の信頼区間の下限 L および上限 U は、それぞれ

$$L=\frac{\dfrac{n_B s_B^2}{n_B-1}}{\dfrac{n_A s_A^2}{n_A-1}}\times F_{n_B-1}^{n_A-1}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$U=\frac{\dfrac{n_B s_B^2}{n_B-1}}{\dfrac{n_A s_A^2}{n_A-1}}\times F_{n_B-1}^{n_A-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

であるから、$F_{n_B-1}^{n_A-1}\left(1-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)=F_4^5(1-0.025)=\dfrac{1}{F_5^4(0.025)}$ より、

$L=0.04902\cdots$　を切り上げて、0.0491

$U=3.39182\cdots$　を切り捨てて、3.3918

である。

よって、解答は①　**（C）**　②　**（J）**

（１０）

回帰直線が$(\bar{x},\bar{y})=(8,6)$を通ることより、

$$\begin{cases} 6=8a+3 \\ 8=\dfrac{6}{3}+b \end{cases}$$

が成り立つ。これを解くと、

$$a=\frac{3}{8}、\ b=6$$

となる。また、回帰直線の傾きについて、

$$\begin{cases} \dfrac{r_{xy}s_y}{s_x}=\dfrac{3}{8} \\ \dfrac{r_{xy}s_x}{s_y}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

が成り立つ（定義よりs_x、s_yは正値なので、r_{xy}も正となる。）。辺々を乗じると、

$$r_{xy}^2=\frac{1}{8}$$

$$\therefore r_{xy}=\frac{\sqrt{2}}{4}=0.3535\cdots$$

よって、解答は　①　（F）　②　（G）　③　（E）

（１１）

$AR(2)$モデル$Y_t = 2.0 + 0.4Y_{t-1} + 0.2Y_{t-2} + \varepsilon_t$に対し、自己相関$\rho_1$、$\rho_2$、$\rho_3$は、ユール＝ウォーカー方程式を用いて次のとおり求めることができる。

$$\rho_1 = \phi_1 /(1-\phi_2) = 0.4/(1-0.2) = 0.50$$
$$\rho_2 = \phi_1^2 /(1-\phi_2) + \phi_2 = 0.4^2 /(1-0.2) + 0.2 = 0.40$$
$$\rho_3 = \phi_1 \rho_2 + \phi_2 \rho_1 = 0.40 \cdot 0.40 + 0.20 \cdot 0.50 = 0.26$$

求める偏自己相関は次の方程式の解である。

$$\rho_1 = \phi_{11} \qquad \begin{cases} \rho_1 = \phi_{21} + \phi_{22}\rho_1 \\ \rho_2 = \phi_{21}\rho_1 + \phi_{22} \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho_1 = \phi_{31} + \phi_{32}\rho_1 + \phi_{33}\rho_2 \\ \rho_2 = \phi_{31}\rho_1 + \phi_{32} + \phi_{33}\rho_1 \\ \rho_3 = \phi_{31}\rho_2 + \phi_{32}\rho_1 + \phi_{33} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0.50 = \phi_{11} \qquad \begin{cases} 0.50 = \phi_{21} + 0.50\phi_{22} \\ 0.40 = 0.50\phi_{21} + \phi_{22} \end{cases} \qquad \begin{cases} 0.50 = \phi_{31} + 0.50\phi_{32} + 0.40\phi_{33} \\ 0.40 = 0.50\phi_{31} + \phi_{32} + 0.50\phi_{33} \\ 0.26 = 0.40\phi_{31} + 0.50\phi_{32} + \phi_{33} \end{cases}$$

これを解けば、$\phi_{11} = 0.50$、$\phi_{22} = 0.20$、$\phi_{33} = 0.00$となる。

よって、解答は　①　（Ｈ）　②　（Ｃ）　③　（Ａ）

（１２）

毎年６月末での会員の異動を表す推移確率行列は、$P=\begin{pmatrix}1 & 0.2 & 0\\ 0 & 0.8 & 0.3\\ 0 & 0 & 0.7\end{pmatrix}$ である。この行列の

固有値は1,0.8,0.7 であり、固有ベクトルはそれぞれ $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}$ である。

これから、$P^n\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0.8^n & -2\cdot 0.7^n\\ 0 & -0.8^n & 3\cdot 0.7^n\\ 0 & 0 & -0.7^n\end{pmatrix}$

を得て、$P^n=\begin{pmatrix}1 & 1-0.8^n & 1-3\cdot 0.8^n+2\cdot 0.7^n\\ 0 & 0.8^n & 3\cdot 0.8^n-3\cdot 0.7^n\\ 0 & 0 & 0.7^n\end{pmatrix}$ となる。

したがって、毎年６月末に研究会員が増加することに注意すると、

X２年12月末の正会員の人数は

$1{,}000+(1-0.8^2)\cdot 1{,}000+(1-3\cdot 0.8^2+2\cdot 0.7^2)\cdot 1{,}000=1{,}420$ 人であり、

X２年12月末の準会員の人数は

$0.8^2\cdot 1{,}000+(3\cdot 0.8^2-3\cdot 0.7^2)\cdot 1{,}000+(3\cdot 0.8-3\cdot 0.7)\cdot 400=1{,}210$ 人であり、

X２年12月末の研究会員の人数は

$0.7^2\cdot 1{,}000+0.7\cdot 400+400=1{,}170$ 人である。

同様にX５年12月末の正会員の人数は

$$1{,}000+(1-0.8^5)\cdot 1{,}000+(1-3\cdot 0.8^5+2\cdot 0.7^5)\cdot 1{,}000+\sum_{k=1}^{4}(1-3\cdot 0.8^k+2\cdot 0.7^k)\cdot 400$$

$$=1{,}000+(1-0.8^5)\cdot 1{,}000+(1-3\cdot 0.8^5+2\cdot 0.7^5)\cdot 600+\sum_{k=1}^{5}(1-3\cdot 0.8^k+2\cdot 0.7^k)\cdot 400$$

$$= 1{,}000 + (1 - 0.8^5)\cdot 1{,}000 + (1 - 3\cdot 0.8^5 + 2\cdot 0.7^5)\cdot 600$$

$$+ \left\{5 - 3\cdot\frac{0.8(1-0.8^5)}{0.2} + 2\frac{0.7(1-0.7^5)}{0.3}\right\}\cdot 400$$

$$= 2{,}000 - 1{,}000\cdot 0.8^5 + 600 - 1{,}800\cdot 0.8^5$$

$$+1{,}200\cdot 0.7^5 + 2{,}000 - 4{,}800 + 4{,}800\cdot 0.8^5 + \frac{5{,}600}{3} - \frac{5{,}600}{3}\cdot 0.7^5$$

$$= \left(2{,}000 + 600 + 2{,}000 - 4{,}800 + \frac{5{,}600}{3}\right)$$

$$+ (-1{,}000 - 1{,}800 + 4{,}800)\cdot 0.8^5 + (1{,}200 - \frac{5{,}600}{3})\cdot 0.7^5$$

$$= 2{,}209.98$$

よって、<u>解答は　①　（H）　②　（C）　③　（B）　④　（E）</u>

問題２

（１）すべてのコインパーキングが営業している場合

S_k のもとで運転手が歩く距離の期待値 E_k を求める。
S_k のもとで駐車するコインパーキングの位置を表す確率変数を J とすると、J の確率分布 $P(J=j)$ は

$$P(J=j)=(1-p)^{k-1-j}p \qquad (j \le k-1)$$

で与えられる。なぜなら、$J=j$ は位置 $k-1, k-2, \cdots, j+1$ は営業しているが駐車不可能で、位置 j が駐車可能であることを意味するからである。
また、位置 $J=j$ に駐車したとき、運転手の歩く距離 $g(j)$ は

$$g(j)=|j| \qquad (j \le k-1)$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}
E_k &= E(g(J)) \\
&= \sum_{j<k} g(j)P(J=j) \\
&= \sum_{j\le -1} g(j)\cdot P(J=j) + \sum_{j=0}^{k-1} g(j)\cdot P(J=j) \\
&= \sum_{j\le -1} (-j)(1-p)^{k-1-j}p + \sum_{j=0}^{k-1} j(1-p)^{k-1-j}p \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} j(1-p)^{k-1+j}p + \sum_{j=0}^{k-1} j(1-p)^{k-1-j}p \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (※)
\end{aligned}$$

一般的に、

$|a|<1$ のとき、$\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} ia^{i-1} = \frac{1}{(1-a)^2}$

$a \ne 1$ のとき、$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} ia^{i-1} = \frac{1-(n+1)a^n + na^{n+1}}{(1-a)^2}$

が成り立つため、これらを用いると、

$$\begin{aligned}
(※)\text{ の第１項} &= p(1-p)^k \sum_{j=1}^{\infty} j(1-p)^{j-1} \\
&= p(1-p)^k \frac{1}{(1-(1-p))^2}
\end{aligned}$$

$$= p(1-p)^k \frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{(1-p)^k}{p}$$

（※）の第２項$= p(1-p)^{k-2} \sum_{j=1}^{k-1} j \left(\frac{1}{1-p} \right)^{j-1}$

$$= p(1-p)^{k-2} \frac{1-((k-1)+1)\left(\frac{1}{1-p}\right)^{k-1} + (k-1)\left(\frac{1}{1-p}\right)^{(k-1)+1}}{\left(1-\left(\frac{1}{1-p}\right)\right)^2}$$

$$= p(1-p)^k \frac{1-k\left(\frac{1}{1-p}\right)^{k-1} + (k-1)\left(\frac{1}{1-p}\right)^k}{p^2}$$

$$= \frac{(1-p)^k - k(1-p) + (k-1)}{p}$$

$$= \frac{(1-p)^k + kp - 1}{p}$$

よって、

（※）$= \dfrac{2(1-p)^k + kp - 1}{p}$

となる。

次に、運転手が歩く距離の期待値E_kが最も小さくなるkを求めるために、E_{k+1}とE_kの差を調べると、

$$E_{k+1} - E_k = \frac{2(1-p)^{k+1} + (k+1)p - 1}{p} - \frac{2(1-p)^k + kp - 1}{p}$$

$$= 1 - 2(1-p)^k$$

となり、$E_{k+1} - E_k$の値が正となるのは、

$$k > -\frac{\log_e 2}{\log_e (1-p)}$$

のときに限られる。$E_{k+1}-E_k$ は単調増加であるから、上式を満足する最小の k を k^* と定義すると、$k=k^*$ で E_k は最小となる。したがって、運転手が歩く距離の期待値が最も小さくなるのは、位置 k^* まで自動車を走らせ、それ以降の駐車可能な最初のコインパーキングに駐車するときである。

よって、<u>解答は ① （B） ② （H） ③ （A） ④ （B） ⑤ （C） ⑥ （A） ⑦ （C） ⑧ （B） ⑨ （B） ⑩ （C）</u>

（2）位置 j が正の奇数 $(j=1,3,5,\cdots)$ のコインパーキングでは節電のため営業しておらず、その他のコインパーキングは営業している場合

k が正の偶数とすると、$j=k-1$ の位置のコインパーキングでは駐車することはできない。すなわち、この場合 S_k のもとで駐車しても S_{k-1} のもとで駐車しても、いずれも歩く距離の期待値は同じであり、$E_k=E_{k-1}$ となる。したがって、以下では、k が正の偶数の場合を考えることとする。

まず、次の（i）～(iii)の場合に分けて J の確率分布 $P(J=j)$ を求める。

(i) $j\geq 0$ かつ j が奇数のとき
$J=j$ は、営業を停止しており、駐車できないため、

$$P(J=j)=0 \qquad (j=1,3,5,\cdots)$$

となる。

(ii) $j\geq 0$ かつ j が偶数のとき
$J=j$ は、位置 $k-1,k-3,\cdots,j+1$ が営業を停止しており、位置 $k-2,k-4,\cdots,j+2$ は営業しているが駐車不可能で、位置 j で初めて駐車可能であることを意味するため、

$$P(J=j)=(1-p)^{\frac{k-2-j}{2}}p \qquad (j=0,2,4,\cdots)$$

となる。

(iii) $j<0$ のとき

$J=j$ は、位置 $k-1, k-3, \cdots, 1$ が営業を停止しており、位置 $k-2, k-4, \cdots, 0$ は営業しているが駐車不可能、位置 $-1, -2, \cdots, j+1$ も営業しているが駐車不可能で、位置 j で初めて駐車可能であることを意味するため、

$$P(J=j)=(1-p)^{\frac{k-2-2j}{2}}p \qquad (j=-1,-2,-3,\cdots)$$

となる。

よって、

$$\begin{aligned}E_k &= E(g(J)) \\ &= \sum_{j<k} g(j)P(J=j) \\ &= \sum_{j\le -1} g(j)P(J=j) + \sum_{\substack{j=0 \\ j:\text{偶数}}}^{k-2} g(j)P(J=j) \\ &= \sum_{j\le -1}(-j)(1-p)^{\frac{k-2-2j}{2}}p + \sum_{\substack{j=0 \\ j:\text{偶数}}}^{k-2} j(1-p)^{\frac{k-2-j}{2}}p \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} j(1-p)^{\frac{k-2+2j}{2}}p + \sum_{j=0}^{\frac{k-2}{2}} 2j(1-p)^{\frac{k-2-2j}{2}}p \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (※※)\end{aligned}$$

（1）と同様に、

$$\begin{aligned}(※※)\text{ の第 1 項} &= p(1-p)^{\frac{k}{2}}\sum_{j=1}^{\infty} j(1-p)^{j-1} \\ &= p(1-p)^{\frac{k}{2}}\frac{1}{(1-(1-p))^2} \\ &= p(1-p)^{\frac{k}{2}}\frac{1}{p^2} \\ &= \frac{(1-p)^{\frac{k}{2}}}{p}\end{aligned}$$

$$（※※）の第２項 = 2p(1-p)^{\frac{k}{2}-2}\sum_{j=1}^{\frac{k-2}{2}} j\left(\frac{1}{1-p}\right)^{j-1}$$

$$= 2p(1-p)^{\frac{k}{2}-2}\frac{1-\left(\frac{k-2}{2}+1\right)\left(\frac{1}{1-p}\right)^{\frac{k-2}{2}}+\frac{k-2}{2}\left(\frac{1}{1-p}\right)^{\frac{k-2}{2}+1}}{\left(1-\left(\frac{1}{1-p}\right)\right)^2}$$

$$= 2p(1-p)^{\frac{k}{2}}\frac{1-\frac{k}{2}\left(\frac{1}{1-p}\right)^{\frac{k-2}{2}}+\frac{k-2}{2}\left(\frac{1}{1-p}\right)^{\frac{k}{2}}}{p^2}$$

$$= \frac{2(1-p)^{\frac{k}{2}}-k(1-p)+(k-2)}{p}$$

$$= \frac{2(1-p)^{\frac{k}{2}}+kp-2}{p}$$

よって、

$$（※※） = \frac{3(1-p)^{\frac{k}{2}}+kp-2}{p}$$

となる。（１）と同様に、E_{k+2} と E_k の差を調べる。

$$E_{k+2}-E_k = \frac{3(1-p)^{\frac{k}{2}+1}+(k+2)p-2}{p}-\frac{3(1-p)^{\frac{k}{2}}+kp-2}{p}$$

$$= 2-3(1-p)^{\frac{k}{2}}$$

より、$E_{k+2}-E_k$ の値が正となるのは、

$$2-3(1-p)^{\frac{k}{2}} > 0$$

$$2 > 3(1-p)^{\frac{k}{2}}$$

$$k > \frac{2(\log_e 2-\log_e 3)}{\log_e(1-p)}$$

のときに限られる。 $E_{k+2}-E_k$ は単調増加であり、また、正の偶数 k に対し $E_k = E_{k-1}$ であるため、上式を満足する最小の偶数 k を k^{**} と定義すると、 $k=k^{**}$ および $k=k^{**}-1$ で E_k は最小となる。したがって、運転手が歩く距離の期待値が最も小さくなり、かつ、k が最小となるのは、位置 $k^{**}-1$ まで自動車を走らせ、それ以降の駐車可能な最初のコインパーキングに駐車するときである。

よって、<u>解答は ⑪ (A) ⑫ (K) ⑬ (L) ⑭ (D) ⑮ (C) ⑯ (C) ⑰ (C) ⑱ (C) ⑲ (D)</u>

問題３.

（１）

まず、

$$T=\sum_{i=1}^{n}\omega_i X_i$$

が母平均μの不偏推定量となるためには、

$$\begin{aligned}E(T)&=E\left(\sum_{i=1}^{n}\omega_i X_i\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\omega_i E(X_i)\\&=\mu\sum_{i=1}^{n}\omega_i\\&=\mu\end{aligned}$$

より、$\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1$を満たす必要がある。さらに、Tの分散は、

$$\begin{aligned}V(T)&=V\left(\sum_{i=1}^{n}\omega_i X_i\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2 V(X_i)\\&=\sigma^2\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2\end{aligned}$$

となる。ところで、$\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1$のとき$\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2$が最小になるのは$\omega_1=\cdots=\omega_n=\dfrac{1}{n}$のとき

であるから、この不偏推定量の分散を最小にするためには$\omega_i=\dfrac{1}{n}$を満たせばよい。

よって、これらの条件を満たす線形推定量S（最小分散不偏線形推定量）は標本平均

$\overline{X}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$であることがわかった。

次に、線形推定量Sが有効推定量となるためには、クラーメル・ラオの不等式

$$V(S)\geq\frac{1}{nE\left(\left\{\dfrac{\partial\log f(X;\mu)}{\partial\mu}\right\}^2\right)}$$

より、右辺は

$$\frac{1}{nE\left(\left\{\frac{\partial \log f(X;\mu)}{\partial\mu}\right\}^2\right)}=\frac{1}{nE\left(\left\{\frac{\partial}{\partial\mu}\left(-\log\sqrt{2\pi\sigma^2}-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right\}^2\right)}$$

$$=\frac{1}{nE\left\{\left(\frac{X-\mu}{\sigma^2}\right)^2\right\}}$$

$$=\frac{\sigma^4}{nE\{(X-\mu)^2\}}$$

$$=\frac{\sigma^2}{n}$$

であり、左辺は

$$V(S)=V(\overline{X})$$

$$=\frac{\sigma^2}{n}$$

であるので、線形推定量Sは不等式の下限を満たし、有効推定量（最小分散不偏推定量）であることがわかった。

次に、Sが充足推定量であるかを調べることにした。正規分布の再生性より、Sは平均μ、分散$\frac{\sigma^2}{n}$の正規分布に従うことから、Sの確率密度関数を$g(t;\mu)$、$t=\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i}{n}$とおくと、$X_1,X_2,\cdots,X_n$の同時確率密度関数は、

$$\prod_{i=1}^{n}f(t_i;\mu)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(t_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n\times\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\qquad\cdots\qquad(\text{i})$$

である。ここで、ある$\hat{s}$について、

$$\sum_{i=1}^{n}(t_i-\mu)^2=\sum_{i=1}^{n}(\hat{s}-\mu+t_i-\hat{s})^2$$

$$=n(\hat{s}-\mu)^2+2(\hat{s}-\mu)\left(\sum_{i=1}^{n}t_i-n\hat{s}\right)+\sum_{i=1}^{n}(t_i-\hat{s})^2\qquad\cdots\qquad(\text{ii})$$

となるので、$\hat{s}$にtを代入すると、

$$\sum_{i=1}^{n}(t_i-\mu)^2=n(t-\mu)^2+\sum_{i=1}^{n}(t_i-t)^2$$

であり、これを（ｉ）に代入すると、

$$\prod_{i=1}^{n} f(t_i;\mu)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n\times\exp\left\{-\frac{n(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\times\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-t)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{\sigma^2}{n}}}\times\exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\frac{\sigma^2}{n}}\right\}\times\frac{1}{\sqrt{n}}\times\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^{n-1}\times\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-t)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$=g(t;\mu)\times\frac{1}{\sqrt{n}}\times\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\times\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-t)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

となり、S が充足推定量であることがわかった。

最後に、S が一致推定量であるかを調べるために、チェビシェフの不等式

$$P\left(\left|S-E(S)\right|\geq k\sqrt{V(S)}\right)\leq\frac{1}{k^2}$$

において S の代わりに $\overline{X}$ を代入し、$\varepsilon=k\sqrt{V(\overline{X})}$ とすると、

$$1-P\left(\left|\overline{X}-E(\overline{X})\right|<\varepsilon\right)\leq\frac{V(\overline{X})}{\varepsilon^2}$$

となり、$V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$ より、

$$P\left(\left|\overline{X}-E(\overline{X})\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

となる。この不等式の n を十分大きくすれば、

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\overline{X}-E(\overline{X})\right|<\varepsilon\right)=1$$

が成立することから、一致推定量であることがわかった。

よって、解答は　①　（Ｂ）　②　（Ｔ）　③　（Ｅ）　④　（Ｇ）　⑤　（Ｇ）
⑥　（Ｍ）　⑦　（Ｐ）　⑧　（Ｇ）　⑨　（Ｐ）　⑩　（Ｆ）　⑪　（Ｄ）　⑫　（Ｂ）

⑬ (F) ⑭ (J) ⑮ (H) ⑯ (A) ⑰ (H) ⑱ (D) ⑲ (I) ⑳ (B)

(2)

プログラムAで求めた推定量をS_A、プログラムBで求めた推定量をS_Bとすると、題意より

$$S_A = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} X_i}{n-1}、\quad S_B = \frac{X_1 + \sum_{i=1}^{n-1} X_i}{n}$$

となる。

$$E(S_A) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} E(X_i)}{n-1} = \mu$$

$$E(S_B) = \frac{E(X_1) + \sum_{i=1}^{n-1} E(X_i)}{n} = \mu$$

であるため、S_AとS_Bは共に不偏性を満たしていることがわかった。

まず、S_Aについて、有効性は、

$$V(S_A) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} V(X_i)}{(n-1)^2} = \frac{\sigma^2}{n-1} > \frac{\sigma^2}{n}$$

であるため、有効性は満たさない。次に、充足性について、S_Aの確率密度関数を$g_A(t_A;\mu)$、$t_A = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} t_i}{n-1}$とおき、(1)の(ii)の$\hat{s}$に$t_A$を代入すると、

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(t_i-\mu)^2 &= n(t_A-\mu)^2 + 2(t_A-\mu)\left(\sum_{i=1}^{n} t_i - nt_A\right) + \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_A)^2 \\ &= (n-1)\times(t_A-\mu)^2 + (t_A-\mu)(2t_n - t_A - \mu) + \sum_{i=1}^{n}(t_i-t_A)^2\end{aligned}$$

となるので、これを(1)の(i)に代入すると、

$$\prod_{i=1}^{n} f(t_i;\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{\sigma^2}{n-1}}} \times \exp\left\{-\frac{(t_A-\mu)^2}{2\frac{\sigma^2}{n-1}}\right\} \times \frac{1}{\sqrt{n-1}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^{n-1}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{(t_A-\mu)(2t_n-t_A-\mu)+\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_A)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$= g_A(t_A;\mu) \times \frac{1}{\sqrt{n-1}} \times \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \times \exp\left\{-\frac{(t_A-\mu)(2t_n-t_A-\mu)+\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_A)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

であるため、充足性は満たさない。最後に、一致性について、

$$P(|S_A - E(S_A)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{(n-1)\varepsilon^2}$$

であり、

$$\lim_{n\to\infty} P(|S_A - E(S_A)| < \varepsilon) = 1$$

であるため、一致性を満たす。よって、S_A は一致性を満たし、有効性、充足性を満たさない推定量である。

次に、S_B について、有効性は、

$$V(S_B) = \frac{4V(X_1)+\sum_{i=2}^{n-1}V(X_i)}{n^2} = \frac{n+2}{n^2}\sigma^2 > \frac{\sigma^2}{n}$$

であるため、有効性は満たさない。次に、充足性について、S_B の確率密度関数を

$g_B(t_B;\mu)$、$t_B = \dfrac{t_1+\sum_{i=1}^{n-1}t_i}{n}$ とおき、（1）の（ii）の $\hat{s}$ に t_B を代入すると、

$$\sum_{i=1}^{n}(t_i-\mu)^2 = n(t_B-\mu)^2 + 2(t_B-\mu)\left(\sum_{i=1}^{n}t_i - nt_B\right) + \sum_{i=1}^{n}(t_i-t_B)^2$$

$$= \frac{n^2}{n+2}(t_B-\mu)^2 + \frac{2n}{n+2}(t_B-\mu)^2 + 2(t_B-\mu)(t_n-t_1) + \sum_{i=1}^{n}(t_i-t_B)^2$$

となるので、これを（1）の（i）に代入すると、

$$\prod_{i=1}^{n} f(t_i;\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{n+2}{n^2}\sigma^2}} \times \exp\left\{ -\frac{(t_B-\mu)^2}{2\frac{n+2}{n^2}\sigma^2} \right\} \times \sqrt{\frac{n+2}{n^2}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^{n-1}$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{\frac{2n}{n+2}(t_B-\mu)^2 + 2(t_B-\mu)(t_n-t_1) + \sum_{i=1}^{n}(t_i-t_B)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

$$= g_B(t_B;\mu) \times \sqrt{\frac{n+2}{n^2}} \times \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{\frac{2n}{n+2}(t_B-\mu)^2 + 2(t_B-\mu)(t_n-t_1) + \sum_{i=1}^{n}(t_i-t_B)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

であるため、充足性は満たさない。最後に、一致性について、

$$P(|S_B - E(S_B)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{n+2}{n^2\varepsilon^2}\sigma^2$$

であり、

$$\lim_{n\to\infty} P(|S_B - E(S_B)| < \varepsilon) = 1$$

であるため、一致性を満たす。よって、S_B も一致性を満たし、有効性、充足性を満たさない推定量である。

よって、<u>解答は ㉑ （G） ㉒ （G）</u>