損保数理（問題）

次の問題１～問題３の各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、消費税については考慮しないこととし、特に断りがないかぎり、免責金額および支払限度額は１事故あたりのものであり、また、各クレームは独立であるものとする。

問題１．（30 点）

Ⅰ．ある保険商品の免責金額を設定しない場合の１被保険者あたりの年間クレーム発生件数は、パラメータ３のポアソン分布に従っている。この保険商品にある一定の免責金額を設定するものとし、各クレーム額がこの免責金額以下となる確率は 0.6 であるものとする。このとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。なお、必要があれば $e^{-0.3}=0.741$ を使用すること。

（1）この免責金額を設定した場合、1 被保険者あたりの年間クレーム発生件数（＝支払対象となるクレーム件数）の平均に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）0.6	（B）0.8	（C）1.0	（D）1.2	（E）1.4
（F）1.6	（G）1.8	（H）2.0	（I）2.2	（J）2.4

（2）この免責金額を設定した場合の、1 被保険者について年間で 1 回も支払対象となるクレームが発生しない確率に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）0.106	（B）0.123	（C）0.143	（D）0.166	（E）0.223
（F）0.301	（G）0.407	（H）0.549	（I）0.741	（J）0.861

Ⅱ. クレーム総額Tが複合ポアソン分布に従う場合に、正規近似を使って信頼度Zおよび全信頼に必要なクレーム件数n_Fを算出する。このとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。なお、XおよびNはそれぞれ個々のクレーム額およびクレーム件数を表す確率変数とする。

（1）下記の①～③の空欄に当てはまる最も適切なものを選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

推定量$C = ZT + (1-Z)M$（Mは実績値を得る前に別のデータにより計算された値とする）の変動幅が確率pで全信頼度の変動幅$2kE(T)$よりも狭い範囲に限定されているとすると、Mは定数であるため、次の式が成り立つ。

$$P(ZE(T) - kE(T) < \boxed{\text{①}} < ZE(T) + kE(T)) = p$$

また、Tが左右対称な分布（歪度$Skw(T) = 0$）ならば、上式は次のとおり変形できる。

$$t_{q/2} = \boxed{\text{②}} + kE(T)/Z$$

（t_pはTのpパーセント点（すなわち、$P(T > t_p) = p$）、$q = 1 - p$とする）

ここで、正規近似によりTのpパーセント点が$\boxed{\text{②}} + \sigma_T y_p$（$\sigma_T$：$T$の標準偏差、$y_p$：標準正規分布の$p$パーセント点）と表せることを用いると、信頼度$Z$は次のとおりとなる。

$$Z = \left(\frac{k}{y_{q/2}}\right)\sqrt{\frac{E(N)}{\boxed{\text{③}}}}$$

この式を$E(N)$について解き、信頼度$Z = 1$を代入すると、全信頼に必要なクレーム件数n_Fを算出することができる。

（A）$\dfrac{V(N)}{E(N)^2} + \dfrac{V(X)}{E(X)}$　（B）$\dfrac{V(X)}{E(X)} + \sqrt{\dfrac{V(N)}{E(N)}}$　（C）$\dfrac{V(N)}{E(N)} + \dfrac{V(X)}{E(X)^2}$

（D）$E(N)V(X) + E(X)^2 V(N)$　（E）$V(X)$　（F）T

（G）ZT　（H）$E(T)$　（I）$E(X)$

（J）いずれにも該当しない

（2）クレーム件数が平均 100, 000 のポアソン分布に従い、個々のクレーム額が平均 125、標準偏差 950 であることが分かっている場合、正規近似を使って算出した年間クレーム総額に全信頼を与えるために必要なクレーム件数 n_F に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、真の期待値から 95% の確率で±5%の範囲内にあるときに全信頼を与えることとし、必要があれば下表（標準正規分布の上側 ε 点）の数値を使用すること。

＜表＞ 標準正規分布の上側 ε 点：$u(\varepsilon)$

ε	0. 159	0. 100	0. 050	0. 025	0. 023
$u(\varepsilon)$	1. 000	1. 282	1. 645	1. 960	2. 000

（A） 80,000 （B） 85,000 （C） 90,000 （D） 95,000 （E） 100,000
（F） 105,000 （G） 110,000 （H） 115,000 （I） 120,000 （J） 125,000

Ⅲ. ある保険会社の自動車保険の料率は、年齢（x 歳未満か x 歳以上か）と運転目的（日常・レジャー使用か業務使用か）の二つの危険標識で複合的に区分されている。この自動車保険に関するある年度の実績統計が下表のとおりであったとする。

＜エクスポージャ（E_{ij}）＞

	日常・レジャー使用	業務使用	計
x 歳未満	$E_{11}=400$	$E_{12}=300$	$E_{1.}=700$
x 歳以上	$E_{21}=100$	$E_{22}=150$	$E_{2.}=250$
計	$E_{.1}=500$	$E_{.2}=450$	$E_{..}=950$

＜クレーム総額（C_{ij}）＞

	日常・レジャー使用	業務使用	計
x 歳未満	$C_{11}=252$	$C_{12}=198$	$C_{1.}=450$
x 歳以上	$C_{21}=\ \ 39$	$C_{22}=\ \ 81$	$C_{2.}=120$
計	$C_{.1}=291$	$C_{.2}=279$	$C_{..}=570$

この複合リスクの構造が乗法型であると仮定して、2 つの危険標識について相対クレームコスト指数および料率係数を Minimum Bias 法により求めるとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。
なお、計算の途中において、クレームコストおよび相対クレームコスト指数は、全て小数点以下第 4 位を四捨五入して小数点以下第 3 位までの数値を用いることとする。

（1）年齢区分「x 歳未満」、運転目的「業務使用」に対応する相対クレームコスト指数 r_{12} に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）0.750　（B）0.800　（C）0.850　（D）0.900　（E）0.950
（F）1.000　（G）1.050　（H）1.100　（I）1.150　（J）1.200

（2）年齢区分「x 歳以上」に対応する料率係数 x_2 の値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。
ただし、運転目的「日常・レジャー使用」に対応する料率係数 y_1 はそれに対応する実績の相対クレームコスト指数に等しいものとする。

（A）0.725　（B）0.775　（C）0.825　（D）0.875　（E）0.925
（F）0.975　（G）1.025　（H）1.075　（I）1.125　（J）1.175

Ⅳ. ある保険会社が、次の実績データを基に保険商品の料率改定を実施する。このとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

ただし、すべての保険事故は第4経過年度末までに支払が完了するものとし、累計支払保険金のロスディベロップメントの予測値には、既知の事故年度別ロスディベロップメント・ファクターを単純平均した値を用いるものとする。また、本保険商品の現行の予定損害率は 60%とする。なお、計算の途中において、ロスディベロップメント・ファクターについては小数点以下第4位を四捨五入して小数点以下第3位までの数値を用い、保険金・支払備金については小数点以下第1位を四捨五入して整数値を用いるものとする。なお、インフレの影響は考慮しなくてよい。

＜単年度支払保険金＞

事故年度	経過年度 1	経過年度 2	経過年度 3	経過年度 4	既経過保険料
2006	4, 319	2, 379	2, 237	1, 242	19, 000
2007	3, 502	2, 156	1, 803		16, 000
2008	3, 311	2, 014			16, 000
2009	3, 848				18, 500

＜料率構成割合＞

予定損害率	60%
予定社費率	25%
予定代理店手数料率	10%
予定利潤率	5%

※予定代理店手数料率と予定利潤率は、営業保険料に対する割合である。

（1）ボーンヒュッターファーガソン法で見積もった 2009 年度末の支払備金に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、事故年度ごとの最終累計発生保険金の当初予測値は、既経過保険料と現行の予定損害率（60%）から算出するものとする。

（A） 9,400　（B） 9,650　（C） 9,900　（D） 10,150　（E） 10,400
（F） 10,650　（G） 10,900　（H） 11,150　（I） 11,400　（J） 11,650

（2）2006 年度～2009 年度の4事故年度累計の実績損害率を用いて損害率法により料率改定を実施した場合の、料率改定後の予定損害率に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、実績損害率は既経過保険料と、（1）で算出した支払備金を加味した最終累計発生保険金から算出するものとし、実績損害率の信頼度を1とする。なお、実績社費率は現行の予定社費率と等しく、改定後も実績額を確保するものとし、代理店手数料率、利潤率については改定後も現行の予定代理店手数料率、予定利潤率を使用するものとする。

（A） 50%　（B） 51%　（C） 52%　（D） 53%　（E） 54%
（F） 55%　（G） 56%　（H） 57%　（I） 58%　（J） 59%

V．ある保険会社が販売している保険商品は、年間のクレーム件数が平均 100、分散 100 の確率分布に従い、1事故あたりのクレーム額が平均 2,000 万円の指数分布に従うものとする。この保険商品に対して、エクセスポイント1億円、カバーリミットが無制限の超過損害額再保険を手配しているものとする。このとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。なお、必要があれば$e^{-1}=0.368$を使用すること。

（1）再保険適用後の1事故あたりの正味クレーム額をY（万円）とする。

① $E(Y)$に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）1,910　（B）1,920　（C）1,930　（D）1,940　（E）1,950
（F）1,960　（G）1,970　（H）1,980　（I）1,990　（J）2,000

② $E(Y^2)$に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）7,080,000　（B）7,180,000　（C）7,280,000　（D）7,380,000　（E）7,480,000
（F）7,580,000　（G）7,680,000　（H）7,780,000　（I）7,880,000　（J）7,980,000

（2）この保険会社では、再保険適用後の年間正味クレーム総額T（万円）の変動係数$CV(T)$（$=\sqrt{V(T)}/E(T)$）が一定以下となるように、超過損害額再保険のエクセスポイントを引き下げることを検討している。

① 現在（エクセスポイント1億円、カバーリミット無制限）の変動係数$CV(T)$に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）0.105　（B）0.110　（C）0.115　（D）0.120　（E）0.125
（F）0.130　（G）0.135　（H）0.140　（I）0.145　（J）0.150

② エクセスポイントを 4,000 万円に変更した場合の変動係数$CV(T)$に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、カバーリミットは無制限のまま変更しないものとする。

（A）0.105　（B）0.110　（C）0.115　（D）0.120　（E）0.125
（F）0.130　（G）0.135　（H）0.140　（I）0.145　（J）0.150

問題2．（55 点）

Ｉ．保険事故が発生した場合には保険金 1,000 を支払う保険契約について、過去１年間のクレーム件数を調べたところ、次のデータが得られた。ここで、１契約者あたりのクレーム件数はポアソン分布に従い、契約者ごとにポアソン分布のパラメータは異なるものとする。このとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

過去１年間のクレーム件数	契約者数
0 件	500
1 件	160
2 件	70
3 件	35

（1）次年度のクレーム件数を予測する場合に、ビュールマン・モデルによって算出した実績クレーム件数に対する信頼度に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、算出にあたっては、本保険契約全体のクレーム件数の平均および分散の推定値として、それぞれ標本平均および不偏分散（いずれも小数点以下第４位を四捨五入して小数点以下第３位までの数値を用いること）を使用するものとする。

(A) 0.10 **(B)** 0.15 **(C)** 0.20 **(D)** 0.25 **(E)** 0.30
(F) 0.35 **(G)** 0.40 **(H)** 0.45 **(I)** 0.50 **(J)** 0.55

（2）次年度に適用する純保険料について、過去１年間のクレーム件数に応じて、ビュールマン・モデルによって予測した次年度の１契約者あたりのクレーム件数の予測値を用いて設定することにより格差をつけることとした。過去１年間のクレーム件数２件の契約者に適用する純保険料に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、算出にあたって使用する信頼度は、（1）で選択した解答の数値を使用すること。

(A) 500 **(B)** 600 **(C)** 700 **(D)** 800 **(E)** 900
(F) 1,000 **(G)** 1,100 **(H)** 1,200 **(I)** 1,300 **(J)** 1,400

Ⅱ. 危険標識を被保険者の性別および住所の 2 区分で設定している個人用自動車保険があり、その実績のクレーム単価についてのデータが以下のように与えられているとする。

		被保険者の住所	
		都市	郊外
被保険者の性別	男性	800	500
	女性	400	200

被保険者の性別・住所別のクレーム単価 $Y_i\ (i=1,2,3,4)$ を、次のとおり定義された説明変数 $x_{ij}\ (i=1,2,3,4,\ j=1,2,3)$ によりモデル化することを考える。

$$x_{i1}=\begin{cases}1\ (\text{男性の場合})\\0\ (\text{女性の場合})\end{cases},\quad x_{i2}=\begin{cases}1\ (\text{女性の場合})\\0\ (\text{男性の場合})\end{cases},\quad x_{i3}=\begin{cases}1\ (\text{都市の場合})\\0\ (\text{郊外の場合})\end{cases}$$

このとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

（1）クレーム単価 $Y_i\ (i=1,2,3,4)$ が $Y_i=\beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\beta_3x_{i3}+\varepsilon_i$（$\beta_1,\beta_2,\beta_3$ はパラメータ、ε_i は誤差項で正規分布 $N(0,\sigma^2)$ に従う）で表されるものとし、ε_i に関する最小二乗法によるパラメータ β_1,β_2,β_3 の推定値を $\left(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_3\right)$ とする。$\hat{\beta}_1$ の値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）375　（B）425　（C）475　（D）525　（E）575
（F）625　（G）675　（H）725　（I）775　（J）825

（2）クレーム単価 $Y_i\ (i=1,2,3,4)$ が一般化線形モデルで表わされるものとする。ここで、Y_i の従う指数型分布族をポアソン分布 $f(y_i;\mu_i)=e^{-\mu_i}\dfrac{\mu_i^{\,y_i}}{y_i!}$、リンク関数を $g(x)=\log x$ とし、

$E(Y_i)=g^{-1}(\beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\beta_3x_{i3})$ と表わされるものとする。

パラメータ β_1,β_2,β_3 の最尤推定法による推定値を $\left(\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2,\tilde{\beta}_3\right)$ とするとき、$e^{\tilde{\beta}_1}$ の値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）394　（B）406　（C）418　（D）430　（E）443
（F）455　（G）467　（H）479　（I）491　（J）503

Ⅲ．保険期間n年の積特型積立保険の年払契約における補償部分の平準年払営業保険料に関し、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。なお、保険料に関する基礎数値は下表のとおりとする。

危険保険料		p
予定社費	新契約社費	α
	維持費	β
予定代理店手数料率		θ
予定利潤率		δ
予定利率		i
現価率		$v=\dfrac{1}{1+i}$

※予定代理店手数料率と予定利潤率は、営業保険料に対する割合である。

（1）平準年払営業保険料について、1年契約の営業保険料（上表と同じ危険保険料、予定社費、予定代理店手数料率、予定利潤率により算出したものとする）に対する割引率は、選択肢のうちのどれか。

（A）$v\dfrac{1-v^{n-1}}{1-v^n}\cdot\dfrac{\alpha}{p+\alpha+\beta}$　（B）$\dfrac{1-v}{1-v^n}\cdot\dfrac{\alpha}{p+\alpha+\beta}$　（C）$v\dfrac{1-v^{n-1}}{1-v^n}\alpha$

（D）$\dfrac{1-v^{n-1}}{1-v^n}\cdot\dfrac{\alpha}{p+\alpha+\beta}$　（E）$\dfrac{1-v^{n-1}}{1-v^n}\alpha$　（F）$v\dfrac{1-v^{n-1}}{1-v^n}\cdot\dfrac{\alpha(1-\theta-\delta)}{p+\alpha+\beta}$

（G）$v\dfrac{1-v^{n-1}}{1-v^n}\alpha(1-\theta-\delta)$　（H）$v\dfrac{1-v}{1-v^{n-1}}\cdot\dfrac{\alpha(1-\theta-\delta)}{p+\alpha+\beta}$　（I）$v\dfrac{1-v}{1-v^{n-1}}\cdot\dfrac{\alpha}{p+\alpha+\beta}$

（J）いずれにも該当しない

（2）第2保険年度末で解約が発生（保険料の請求・返還は行わない）した場合について、回収できなかった新契約社費の第2保険年度末時点の現価は、選択肢のうちのどれか。

（A）$\dfrac{(1-v^{n-1})(1-v^{n-2})}{1-v^n}\alpha i$　（B）$\dfrac{(1-v^{n-1})(1-v^{n-2})}{1-v^n}\cdot\dfrac{\alpha}{1-\theta-\delta}$

（C）$\dfrac{1-v^{n-2}}{1-v^n}\alpha$　（D）$\dfrac{1-v^{n-3}}{1-v^{n-1}}\alpha$

（E）$\dfrac{1-v^{n-2}}{1-v^n}\cdot\dfrac{\alpha}{1-\theta-\delta}$　（F）$\dfrac{(1-v^{n-1})(1-v^{n-2})}{1-v^n}\alpha$

（G）$v\dfrac{(1-v^{n-1})(1-v^{n-2})}{1-v^n}\alpha$　（H）$v^2\dfrac{1-v^{n-2}}{1-v^n}\alpha$

（I）$v^2\dfrac{1-v^{n-2}}{1-v^n}\cdot\dfrac{\alpha}{1-\theta-\delta}$　（J）いずれにも該当しない

Ⅳ. 将来の保険金 X が平均 2 の指数分布に従うものとするとき、いくつかの保険料算出原理によって将来の保険金に対応する保険料（予定事業費等の付加保険料は考慮しない）を算出することを考える。このとき、次の（1）～（3）の各問に答えなさい。なお、必要があれば $\log 2 = 0.693$ 、$\log 3 = 1.099$ 、$\log 5 = 1.609$ を使用すること。

（1）指数原理により算出した保険料に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、指数原理による保険料は、保険会社の効用関数が指数効用 $u(x) = -e^{-hx}$ であると仮定したときの保険料の下限値として導かれるが、ここでは $h = 0.3$ として算出すること。

（A）2.0　（B）2.5　（C）3.0　（D）3.5　（E）4.0
（F）4.5　（G）5.0　（H）5.5　（I）6.0　（J）与えられた条件だけでは計算できない

（2）パーセンタイル原理により算出した保険料に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、パーセンタイル原理による保険料は、X の分布の上側 $100h$ %点として導かれるが、ここでは $h = 0.05$ として算出すること。

（A）2.0　（B）2.5　（C）3.0　（D）3.5　（E）4.0
（F）4.5　（G）5.0　（H）5.5　（I）6.0　（J）与えられた条件だけでは計算できない

（3）エッシャー原理により算出した保険料に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、エッシャー原理による保険料は、$X = x$ に対するウェイトを $\dfrac{e^{hx}}{E(e^{hX})}$ として算出した期待値として導かれるが、ここでは $h = 0.3$ として算出すること。

（A）2.0　（B）2.5　（C）3.0　（D）3.5　（E）4.0
（F）4.5　（G）5.0　（H）5.5　（I）6.0　（J）与えられた条件だけでは計算できない

V．クレーム件数過程$\{N_t\}_{t\geq 0}$が次の条件を満たすとする。

※　$0 \leq s < t \leq u < v \Rightarrow N_t - N_s$と$N_v - N_u$は独立

※　同一時刻に２件以上のクレームが発生することはない

※　オペレーショナル・タイム$\tau(t) = -\log P(N_t = 0)$は次のとおり表わされる

$$\tau(t) = \begin{cases} 3t (0 \leq t < 1) \\ 5t - 2 (t \geq 1) \end{cases}$$

このとき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。なお、必要があれば$e^{-1} = 0.368$を使用すること。

（１）時点０から時点２までに発生したクレーム件数が３件である確率に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）0.0185　（B）0.0205　（C）0.0225　（D）0.0245　（E）0.0265
（F）0.0285　（G）0.0305　（H）0.0325　（I）0.0345　（J）0.0365

（２）１件目のクレームが発生する時刻を表す確率変数をT_1とするとき、T_1の平均に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）0.177　（B）0.227　（C）0.277　（D）0.327　（E）0.377
（F）0.427　（G）0.477　（H）0.527　（I）0.577　（J）0.627

VI. ある保険会社の保険商品の元受ポートフォリオは、年間クレーム件数Nが平均 15 のポアソン分布に従い、個々のクレーム額Xが平均 4 の指数分布に従っている。このとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

（1）以下の条件のもと、この保険商品の安全割増率を算出する。

※ 初期サープラスは30とする

※ Lundberg の不等式を用い、保険会社にとって最も保守的に評価した破産確率をe^{-3}まで許容するものとしたときに必要となる最小の安全割増率を採用する

このとき、この安全割増率は 0. $\boxed{a}$ $\boxed{b}$(小数点以下第 3 位を四捨五入)となる。a、b のそれぞれに当てはまる 1 桁の数字を解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
なお、計算の途中において端数処理は行わない。

（2）この保険商品の元受保険料は、保険金の期待値に、（1）で求めた安全割増を加味して設定しているとする(社費や手数料の発生を考慮する必要はない)。この保険商品の元受ポートフォリオに、以下の条件を満たすように比例再保険を手配するものとすると、出再割合αは 0. $\boxed{c}$ $\boxed{d}$(小数点以下第 3 位を四捨五入)となる。c、d のそれぞれに当てはまる 1 桁の数字を解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
なお、（1）で求めた安全割増率を含め、計算の途中において端数処理は行わない。

※ 再保険付加率を 100%とする。

※ このポートフォリオにおける正味ベースの期待利益を 10 以上とする。

※ 上記の条件を満たしたうえで、破産確率を最も小さくする。

Ⅶ. あるリスクの損害額Xは、対数正規分布 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{18\pi x}}\exp\left(-\dfrac{(\log x+5)^2}{18}\right)$ $(x>0)$ に従っている。このリスクを補償する保険商品を、以下の条件を満たすように設計した。

※ エクセス方式の免責金額e^{-2}を設定し、損害保険金を支払う（損害額から免責金額を控除したものが損害保険金である)。

※ 損害保険金の 20%を費用保険金として支払う。ただし、損害保険金がいくら大きくなっても、費用保険金は$0.2(1-e^{-2})$を上限とする。

この商品は、免責金額も費用保険金も設定しない場合と比較して、純保険料が $\boxed{①}$ % $\boxed{②}$ なる。

①および②の空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から 1 つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
なお、必要があれば$e^{-1}=0.368$および下表（標準正規分布の上側ε点）の数値を使用すること。

＜表＞ 標準正規分布の上側ε点：$u(\varepsilon)$

ε	0.369	0.309	0.252	0.159	0.091	0.067	0.048	0.023
$u(\varepsilon)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	2

[①の選択肢]

（A）0.5　（B）1.0　（C）1.5　（D）2.0　（E）2.5
（F）3.0　（G）3.5　（H）4.0　（I）4.5　（J）5.0

[②の選択肢]

（A）高く　（B）低く

Ⅷ. ある保険商品は、クレーム額Xが平均$\frac{1}{2}$の指数分布に従っており、クレーム件数Nは、確率関数$f(n)$が次のとおり表わされる分布に従っているとする。

$$\begin{cases} f(0) = 1-\beta \\ f(n) = \dfrac{\beta}{n \times \log(1+\alpha)}\left(\dfrac{\alpha}{1+\alpha}\right)^n \qquad (n = 1,2,3,\cdots) \end{cases}$$

なお、α, βは、$0<\alpha<1,\ 0<\beta<1$を満たす定数である。
この保険商品のクレーム総額をSとすると、$S=0$となる確率は$1-\beta$となり、$x>0$における確率密度関数$f_S(x)$は、以下のとおり表すことができる。

$$f_S(x) = \frac{\boxed{①} - \boxed{②}}{x\log(1+\alpha)}\beta \quad (x>0)$$

①および②の空欄に当てはまる最も適切なものを選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。ただし、適切な選択肢の組み合わせがない場合は、①、②ともに（J）をマークしなさい。

（A）1　（B）$2x$　（C）e^{-2x}　（D）$e^{-2\alpha x}$　（E）$e^{-2x(1+\alpha)}$

（F）$e^{-\frac{2x}{\alpha}}$　（G）$e^{-\frac{2x}{1+\alpha}}$　（H）$\log(1+\alpha)$　（I）αe^{-2x}

（J）いずれにも該当しない

問題３．（15 点）

Ⅰ．ある保険商品は、保険期間を１年～４年の整数年で設定でき、保険料は一時払（契約時に一括して前受け収受）のみで販売している。

また、保険期間１年の場合の営業保険料構成は下表のとおりであり、長期係数 K は以下の前提で算出している（本問では利潤は考慮しなくてよい）。

※　予定利率は保険期間によらず一律 2%とし、保険金と維持費は、当該契約の保険始期および２年目以降は始期応当日に、以降１年間分の支出が生じるものとみなす。

※　代理店手数料は、保険期間によらず営業保険料に対して一定の割合で設定する。また、代理店手数料は全て保険始期の時点で支出する。

純保険料	110
新契約費	25
維持費	15
代理店手数料	50
計（営業保険料）	200

なお、この保険商品の年間販売件数は毎年一定であり、各保険期間の契約ごとにそれぞれ n 件の計 4n 件であるとする。また、各保険期間の契約とも、保険始期日は１年間通じて一様であり（特定の日や月に保険始期が偏っていない）、新規販売から既に５年以上が経過し保有ポートフォリオは定常状態に達している。また、解約による契約の減少を考慮しなくてよい。このとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

なお、計算の途中において端数処理（四捨五入等）を行う場合は、小数点以下第５位を四捨五入して小数点以下第４位までの数値を用いることとする。

（1）保険金、新契約費、維持費、代理店手数料が予定どおりに支出され、予定利率どおりに運用が行われたとき、この保険会社が１年間に受けとる運用収益に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）22n　（B）23n　（C）24n　（D）25n　（E）26n

（F）27n　（G）28n　（H）29n　（I）30n　（J）31n

（2）ポートフォリオが定常状態に達した以降、年間の収入保険料に対する支払保険金の割合が 70%となっていたことから、この実績に応じて、純保険料を再設定し、営業保険料を改定することとした。なお、維持費や新契約費については、収入と支出の額に過不足はなく、予定利率を見直す必要もない。また、代理店手数料は、営業保険料に対してこれまでと同様の一定率を織り込む。この改定後の保険期間２年の契約の営業保険料に占める純保険料の割合に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）57.7%　（B）58.1%　（C）58.5%　（D）58.9%　（E）59.3%

（F）59.7%　（G）60.1%　（H）60.5%　（I）60.9%　（J）61.3%

II．個々のクレーム額 X がパレート分布（確率密度関数 $f(x)$ が $f(x)=\dfrac{\alpha\theta^{\alpha}}{(x+\theta)^{\alpha+1}}$ （$x\geq 0$。また、α は3以上の整数とする））に従い、年間クレーム件数の平均が n 件の複合ポアソン分布に従うポートフォリオ（免責金額を設定しない場合）に対し、ある保険会社は１クレームあたりの免責金額 t （フランチャイズ方式）を設定して、保険契約を引き受けているとする。

下記(a)～(d)の仮定のもと破産確率モデルを考え、１年後（当年度末）のサープラスが負になる確率を、正規近似を用いて求めることを考える。

(a) 当年度期首において、免責金額設定後の年間クレーム総額の期待値の $100k$%（$k>0$）のサープラスを有している。

(b) 当年度の保険料は、免責金額設定後の年間クレーム総額の期待値と等しい額を期首に一括して収受する （(a)におけるサープラスには当年度保険料は反映されていない）。

(c) 当年度はインフレにより個々のクレーム額が一律 $100p$%（$p>0$）上昇すると予想を立てている（上記(a)、(b)におけるクレーム総額にはこのインフレの影響は反映しない）。

(d) このポートフォリオ以外にこの保険会社が引き受けている契約は無い。

このとき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。

（１）当年度の免責金額設定後の１事故のクレーム額 Y の二乗の期待値（支払対象とならない事故も含めたすべての契約に対する期待値とする） $E(Y^2)$ は

$$E(Y^2)=\alpha\theta^{\alpha}\left(\frac{t}{1+p}+\theta\right)^{-\alpha}\cdot\boxed{\quad ① \quad}\cdot\left(\frac{\boxed{\quad ② \quad}}{\alpha-2}-\frac{\boxed{\quad ③ \quad}}{\alpha-1}+\frac{\theta^2}{\alpha}\right)$$

と与えられる。

①から③の空欄に当てはまる最も適切なものを選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

(A) $(t+\theta)$　　**(B)** $\left(\dfrac{t}{1+p}+\theta\right)$　　**(C)** $2\theta\left(\dfrac{t}{1+p}+\theta\right)$

(D) $\left(\dfrac{t}{1+p}+\theta\right)^2$　　**(E)** $\left\{2\theta\left(\dfrac{t}{1+p}+\theta\right)\right\}^2$　　**(F)** $\left(\dfrac{t}{1+p}+\theta\right)^{\alpha}$

(G) $\left\{2\theta\left(\dfrac{t}{1+p}+\theta\right)\right\}^{\alpha}$　　**(H)** $\left(\dfrac{t}{1+p}+\theta\right)^{\alpha+1}$　　**(I)** $\left\{2\theta\left(\dfrac{t}{1+p}+\theta\right)\right\}^{\alpha+1}$

(J) $(1+p)$　　**(K)** $(1+p)^2$　　**(L)** $(1+p)^3$

(M) いずれにも該当しない

（2）免責金額設定後のクレーム総額Sが、平均$E(S)$、分散$V(S)$の正規分布に近似できるものとする。

$n=10$、$t=1$、$100k=50$、$100p=10$、$\theta=7$、$\alpha=3$のとき、1 年後のサープラスが負になる確率に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

なお、必要があれば下表（標準正規分布の下側 ε 点）の数値を使用すること。

＜表＞ 標準正規分布の下側ε点：（$u(\varepsilon)$から$\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u(\varepsilon)}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$を求める表）

u(ε)	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389

（A）0.245　（B）0.255　（C）0.265　（D）0.275　（E）0.285

（F）0.295　（G）0.305　（H）0.315　（I）0.325　（J）0.335

以上

損保数理（解答例）

問題1．

Ⅰ．

（1）**（D）**　（2）**（F）**

免責金額設定前のポアソンパラメータをλ、各クレームが免責金額以下となる確率をpとすると、年間支払対象件数Nの分布は、

$$P(N=n)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}(1-p)^n p^k\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n+k}}{(n+k)!}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}}{n!k!}((1-p)\lambda)^n(p\lambda)^k$$

$$=\frac{((1-p)\lambda)^n e^{-\lambda}}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(p\lambda)^k}{k!}=\frac{((1-p)\lambda)^n e^{-\lambda}e^{p\lambda}}{n!}=e^{-(1-p)\lambda}\frac{((1-p)\lambda)^n}{n!}$$

となり、パラメータ$(1-p)\lambda$のポアソン分布に従う。したがって、各問の解答は次のとおり。

（1）

$(1-p)\lambda=0.4\times3=1.2$

（2）

$e^{-(1-p)\lambda}=(e^{-0.3})^4=(0.741)^4=0.301$

Ⅱ.

（1）①（G） ②（H） ③（C）　（2）（C）

（1）

テキスト p. 3-24、3-26、3-27 のとおり。

（2）

$$n_F = \left(\frac{V(N)}{E(N)} + \frac{V(X)}{E(X)^2}\right)\left(\frac{y_{q/2}}{k}\right)^2 = \left(\frac{100000}{100000} + \frac{950^2}{125^2}\right)\left(\frac{1.960}{0.05}\right)^2 = 90{,}293$$

Ⅲ.

（１）（H）　（２）（B）

（１）

各リスク区分ごとのクレームコスト$R_{ij}=\dfrac{C_{ij}}{E_{ij}}$ および相対クレームコスト指数$r_{ij}=\dfrac{R_{ij}}{R_{\bullet\bullet}}$ を実績データから計算すると、以下のとおりとなる。

＜クレームコストR_{ij}＞

	日常・レジャー使用	業務使用	計
x歳未満	0.630	0.660	0.643
x歳以上	0.390	0.540	0.480
計	0.582	0.620	0.600

＜相対クレームコスト指数r_{ij}＞

	日常・レジャー使用	業務使用	計
x歳未満	1.050	1.100	1.072
x歳以上	0.650	0.900	0.800
計	0.970	1.033	1.000

よって$r_{12}=1.100$

（２）

Minimum Bias法により、（１）で求めた相対クレームコスト指数r_{ij}から相対クレームコスト指数の推定値$\hat{r}_{ij}$を求めることを考える。このとき、Minimum Bias法における満たすべき条件は、次の連立方程式のようになる。

$$E_{11}\cdot(r_{11}-\hat{r}_{11})+E_{12}\cdot(r_{12}-\hat{r}_{12})=0$$
$$E_{21}\cdot(r_{21}-\hat{r}_{21})+E_{22}\cdot(r_{22}-\hat{r}_{22})=0$$
$$E_{11}\cdot(r_{11}-\hat{r}_{11})+E_{21}\cdot(r_{21}-\hat{r}_{21})=0$$
$$E_{12}\cdot(r_{12}-\hat{r}_{12})+E_{22}\cdot(r_{22}-\hat{r}_{22})=0$$

この連立方程式において、Cを定数として、

$$E_{11}\cdot(r_{11}-\hat{r}_{11})=E_{22}\cdot(r_{22}-\hat{r}_{22})=C$$
$$E_{21}\cdot(r_{21}-\hat{r}_{21})=E_{12}\cdot(r_{12}-\hat{r}_{12})=-C$$

と表すことができる。

この複合分類リスクの構造が乗法型であることから、各相対クレームコスト指数の推定値は料率係数を用いて、$\hat{r}_{ij}=x_i\times y_j\ \ (i=1,2\quad j=1,2)$と表される。

これを、上記連立方程式に代入して整理すると、

$x_1 \times y_1 = r_{11} - C / E_{11} \cdots (a)$， $x_1 \times y_2 = r_{12} + C / E_{12} \cdots (b)$

$x_2 \times y_1 = r_{21} + C / E_{21} \cdots (c)$， $x_2 \times y_2 = r_{22} - C / E_{22} \cdots (d)$

となる。

$(a) \times (d) = (b) \times (c)$ より、

$$(r_{11} - \frac{C}{E_{11}})(r_{22} - \frac{C}{E_{22}}) = (r_{12} + \frac{C}{E_{12}})(r_{21} + \frac{C}{E_{21}})$$

であり、

$$E_{12}E_{21}(E_{11}r_{11} - C)(E_{22}r_{22} - C) = E_{11}E_{22}(E_{12}r_{12} + C)(E_{21}r_{21} + C)$$

$$300 \cdot 100(400 \cdot 1.05 - C)(150 \cdot 0.9 - C) = 400 \cdot 150(300 \cdot 1.1 + C)(100 \cdot 0.65 + C)$$

$$(420 - C)(135 - C) = 2(330 + C)(65 + C)$$

$$56700 - 555C + C^2 = 42900 + 790C + 2C^2$$

$$C^2 + 1345C - 13800 = 0$$

C について解くと、$C = 10.183, -1355.183$。

ここで、$C = -1355.183$ では、負となる料率係数があるので不適。

よって、$C = 10.183$

これを代入して、$x_2 = \dfrac{r_{21} + \dfrac{C}{E_{21}}}{y_1} = \dfrac{0.65 + \dfrac{10.183}{100}}{0.97} = 0.775$

Ⅳ.

（1）**（G）**　（2）**（I）**

（1）

ボーンヒュッターファーガソン法で見積もった 2009 年度末の支払備金（BF 法支払備金）は、次のとおり。

単年度支払保険金

事故年度	経過年度				既経過保険料	予定損害率
	1	2	3	4		
2006	4, 319	2, 379	2, 237	1, 242	19, 000	60%
2007	3, 502	2, 156	1, 803		16, 000	60%
2008	3, 311	2, 014			16, 000	60%
2009	3, 848				18, 500	60%
合計					69, 500	

累計支払保険金

事故年度	経過年度				累計支払保険金	累計支払保険金当初予測値
	1	2	3	4		
2006	4, 319	6, 698	8, 935	10, 177	10, 177	11, 400
2007	3, 502	5, 658	7, 461		7, 461	9, 600
2008	3, 311	5, 325			5, 325	9, 600
2009	3, 848				3, 848	11, 100

※ 累計支払保険金当初予測値＝既経過保険料×予定損害率

ロスディベロップメント・ファクター

事故年度	経過年度			B_J	BF 法支払備金	累計支払保険金
	1→2	2→3	3→4			
2006	1. 551	1. 334	1. 139	1. 000	0	10, 177
2007	1. 616	1. 319	1. 139	1. 139	1, 172	8, 633
2008	1. 608	1. 327	1. 139	1. 511	3, 247	8, 572
2009	1. 592	1. 327	1. 139	2. 406	6, 487	10, 335
合計					10, 906	37, 717

※ BF 法支払備金＝（1－1／B_J）×累計支払保険金当初予測値

（2）

上記（1）から、

実績損害率＝累計支払保険金÷既経過保険料＝37, 717÷69, 500＝54. 3%

$$料率改定率=\frac{p+\varepsilon}{1-\theta-\delta}-1=\frac{0.543+0.250}{1-0.100-0.050}-1=-0.0670$$

よって、料率改定後の予定損害率は、

$$予定損害率 = \frac{0.543}{1-0.0670} = 0.5819$$

V.

（1）①（I）②（G）（2）①（H）②（E）

（1）

指数分布の平均を$\dfrac{1}{\lambda}$、エクセスポイントをａとしたとき、$E(Y),E(Y^2)$は以下のように計算できる。

①

$$E(Y)=\int_0^a \lambda x\exp(-\lambda x)dx+a\int_a^\infty \lambda\exp(-\lambda x)dx$$

$$=\left[-(x+\frac{1}{\lambda})\exp(-\lambda x)\right]_0^a+a\left[-\exp(-\lambda x)\right]_a^\infty$$

$$=-(a+\frac{1}{\lambda})\exp(-\lambda a)+\frac{1}{\lambda}+a\exp(-\lambda a)$$

$$=\frac{1}{\lambda}(1-\exp(-\lambda a))$$

よって、これに代入し、$E(Y)=2000(1-\exp(-\dfrac{a}{2000}))=2000(1-\exp(-\dfrac{10000}{2000}))=1987$

②

$$E(Y^2)=\int_0^a \lambda x^2\exp(-\lambda x)dx+a^2\int_a^\infty \lambda\exp(-\lambda x)dx$$

$$=\left[-(x^2+\frac{2x}{\lambda}+\frac{2}{\lambda^2})\exp(-\lambda x)\right]_0^a+a^2\left[-\exp(-\lambda x)\right]_a^\infty$$

$$=-(a^2+\frac{2a}{\lambda}+\frac{2}{\lambda^2})\exp(-\lambda a)+\frac{2}{\lambda^2}+a^2\exp(-\lambda a)$$

$$=\frac{2}{\lambda^2}-(\frac{2a}{\lambda}+\frac{2}{\lambda^2})\exp(-\lambda a)$$

よって、これに代入し、

$$E(Y^2)=8000000-(4000a+8000000)\exp(-\frac{a}{2000})=8000000-(48000000)\exp(-5)=7676048$$

（2）

クレーム件数の分布をＮとすると、$E(N)=V(N)=100$より、

$$CV(T)=\frac{\sqrt{V(T)}}{E(T)}=\frac{\sqrt{V(Y)E(N)+E(Y)^2V(N)}}{E(N)E(Y)}=\frac{\sqrt{100(V(Y)+E(Y)^2)}}{100E(Y)}=\frac{\sqrt{E(Y^2)}}{10E(Y)}$$

ここで、

①(1)で求めた$E(Y),E(Y^2)$を代入し、$CV(T)=\dfrac{\sqrt{7676048}}{10\cdot 1987}=0.1395$

②(1)の$E(Y),E(Y^2)$の式に$a=4000$を代入して計算し、

$$E(Y) = 2000(1-\exp(-\frac{a}{2000}))$$
$$= 2000(1-\exp(-\frac{4000}{2000})) = 1729$$

$$E(Y^2) = 8000000-(4000a+8000000)\exp(-\frac{a}{2000})$$
$$= 8000000-(24000000)\exp(-2)$$
$$= 4749824$$
$$CV(T) = \frac{\sqrt{4749824}}{10\cdot 1729} = 0.1260$$

問題２.

Ｉ.

（１）**（D）**　（２）**（E）**

（１）

契約者ごとのクレーム件数をX、契約者ごとのポアソンパラメータを表わす確率変数をΘ、全体のクレーム件数の平均をμ、分散をσ^2とすると、

$$E(V(X\mid\Theta))=E(\Theta)=\mu$$

$$V(E(X\mid\Theta))=V(X)-E(V(X\mid\Theta))=\sigma^2-\mu$$

また、全体のクレーム件数の標本平均$\bar{x}$および不偏分散s^2は次のとおり。

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{405}{765}=0.529$$

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2$$

$$=\frac{(0-0.529)^2\times500+(1-0.529)^2\times160+(2-0.529)^2\times70+(3-0.529)^2\times35}{765-1}$$

$$=0.708$$

μおよびσ^2の推定値として、それぞれ$\bar{x}$およびs^2を使用すると、信頼度Zは次のとおり。

$$Z=\frac{1}{1+\dfrac{E(V(X\mid\Theta))}{V(E(X\mid\Theta))}}=\frac{1}{1+\dfrac{0.529}{0.708-0.529}}=0.253$$

（２）

過去１年間のクレーム件数２件の契約者の次年度のクレーム件数予測値は、

$$2\times Z+\bar{x}\times(1-Z)=2\times0.25+0.529\times(1-0.25)=0.89675$$

１件あたりの保険金は 1,000 なので、純保険料は、

$$1{,}000\times0.89675=896.75$$

Ⅱ.

（1）（D）（2）（H）

（1）

題意から

$$Y_1 = 800 = \beta_1 + 0 + \beta_3 + \varepsilon_1$$
$$Y_2 = 500 = \beta_1 + 0 + 0 + \varepsilon_2$$
$$Y_3 = 400 = 0 + \beta_2 + \beta_3 + \varepsilon_3$$
$$Y_4 = 200 = 0 + \beta_2 + 0 + \varepsilon_4$$

これを基礎に$\varepsilon_i \left(i = 1,2,3,4\right)$に関する最小二乗法によるパラメータ推定を行う。

$$\sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i^2 = \left(800 - \beta_1 - \beta_3\right)^2 + \left(500 - \beta_1\right)^2 + \left(400 - \beta_2 - \beta_3\right)^2 + \left(200 - \beta_2\right)^2$$

この式を$\beta_i \left(i = 1,2,3\right)$の偏微分を取り、それらが 0 となるように$\beta_i \left(i = 1,2,3\right)$を定めると (525, 175, 250) となる。

（2）

リンク関数が対数関数であることから

$$E\left[Y_i\right] = g^{-1}\left(\beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3}\right) = \begin{cases} e^{\beta_1+\beta_3} & (i=1) \\ e^{\beta_1} & (i=2) \\ e^{\beta_2+\beta_3} & (i=3) \\ e^{\beta_2} & (i=4) \end{cases}$$ となる。

したがって、対数尤度関数$l\left(y;\mu\right)$は

$$l\left(y;\mu\right) = \sum_{i=1}^{n} \log f\left(y_i;\mu_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left\{\left(-\mu_i\right) + y_i \log \mu_i - \log\left(y_i!\right)\right\}$$

$$= -e^{\left(\beta_1+\beta_3\right)} + 800\left(\beta_1 + \beta_3\right) - \log 800! - e^{\beta_1} + 500\beta_1 - \log 500!$$

$$- e^{\left(\beta_2+\beta_3\right)} + 400\left(\beta_2 + \beta_3\right) - \log 500! - e^{\beta_2} + 200\beta_2 - \log 200!$$

となる。$\dfrac{\partial l}{\partial \beta_i} = 0 \ \left(i = 1,2,3\right)$より、

$$\begin{cases} e^{\beta_1}\left(e^{\beta_3} + 1\right) = 1{,}300 \\ e^{\beta_2}\left(e^{\beta_3} + 1\right) = 600 \\ e^{\beta_3}\left(e^{\beta_1} + e^{\beta_2}\right) = 1{,}200 \end{cases}$$

を解いて、$e^{\tilde{\beta}_1} \fallingdotseq 478.95$。

Ⅲ.

（1）**（A）**　（2）**（C）**

（1）

$$\text{割引率}=1-\frac{1+\dfrac{p+\beta}{p+\alpha+\beta}v\dfrac{1-v^{n-1}}{1-v}}{\dfrac{1-v^n}{1-v}}=\frac{1-v^n-\left\{(1-v)+\dfrac{p+\beta}{p+\alpha+\beta}v\left(1-v^{n-1}\right)\right\}}{1-v^n}$$

$$=\frac{v\left(1-v^{n-1}\right)-\dfrac{p+\beta}{p+\alpha+\beta}v\left(1-v^{n-1}\right)}{1-v^n}=v\frac{1-v^{n-1}}{1-v^n}\frac{\alpha}{p+\alpha+\beta}$$

（2）

長期分割払契約の保険料は次のとおり分解できる。

$$P=\frac{p+\alpha+\beta}{1-(\delta+\theta)}\times\frac{1+\dfrac{p+\beta}{p+\alpha+\beta}v\dfrac{1-v^{n-1}}{1-v}}{\dfrac{1-v^n}{1-v}}$$

$$P\{1-(\delta+\theta)\}=\frac{(p+\alpha+\beta)+(p+\beta)v\dfrac{1-v^{n-1}}{1-v}}{\dfrac{1-v^n}{1-v}}$$

$$P=(p+\beta)+\frac{1-v}{1-v^n}\alpha+P(\delta+\theta)$$

＝危険保険料＋予定社費（維持費）

＋予定社費（新契約社費）＋予定代理店手数料＋予定利潤

よって、回収できなかった新契約社費の第２保険年度末時点の現価は次のとおりとなる。

$$\left(\frac{1-v}{1-v^n}\alpha\right)\frac{1-v^{n-2}}{1-v}=\frac{1-v^{n-2}}{1-v^n}\alpha$$

Ⅳ.

（1）**(C)**　（2）**(I)**　（3）**(G)**

平均２の指数分布の確率密度関数は、$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}, \lambda=\dfrac{1}{2}$ となる。

（1）

$M_X(t)=\dfrac{\lambda}{\lambda-t}$ より、$P(X)=\dfrac{\log M_X(h)}{h}=\dfrac{\log\left(\dfrac{\lambda}{\lambda-h}\right)}{h}=\dfrac{\log 2.5}{0.3}=\dfrac{0.916}{0.3}=3.05$

（2）

$P(X)=\min\{x \mid F_X(x)\geq 1-h\}$

$F_X(x)$ は狭義の単調増加なので、$P(X)=\{x \mid F_X(x)=1-h\}$

$F(x)=1-e^{-\lambda x}$ より、

$$
\begin{aligned}
&\therefore 1-h=1-e^{-\lambda x}\\
&\therefore h=e^{-\lambda x}\\
&\therefore x=\frac{-\log h}{\lambda}=2\cdot -\log 0.05=2\cdot 2.995=5.99
\end{aligned}
$$

（3）

$\lambda>h$ の下で、

$$
\begin{aligned}
E(Xe^{hX})&=\int_0^\infty xe^{hx}f(x)dx=\int_0^\infty xe^{hx}\lambda e^{-\lambda x}dx\\
&=\lambda\int_0^\infty xe^{-(\lambda-h)x}dx=\lambda\left[-\frac{xe^{-(\lambda-h)x}}{(\lambda-h)}-\frac{e^{-(\lambda-h)x}}{(\lambda-h)^2}\right]_0^\infty=\frac{\lambda}{(\lambda-h)^2}
\end{aligned}
$$

$$
E(e^{hX})=M_X(h)=\frac{\lambda}{\lambda-h}
$$

よって、$P(X)=\dfrac{E(Xe^{hX})}{E(e^{hX})}=\dfrac{1}{\lambda-h}=\dfrac{1}{0.5-0.3}=5.00$

V.

（1）①（F）（2）（D）

（1）

$P(N_t=0)$ はｔの関数として連続で、単調減少であるため、

定理 8.2 より、$P(N_t=n)=\dfrac{\tau(t)^n}{n!}e^{-\tau(t)}$ となる。

よって、$P(N_2=3)=\dfrac{\tau(2)^3}{3!}e^{-\tau(2)}=\dfrac{8^3}{6}e^{-8}=0.0287$

（2）

$N'_s=N_{\tau^{-1}(s)}$ はポアソン過程に従い、$\Pr(N'_s=n)=\dfrac{s^n}{n!}e^{-s}$ が成り立つ。よって、$S_1=\tau(T_1)$ は平均１の指数分布に従うことになる。

$\tau^{-1}(s)=\begin{cases}\dfrac{s}{3} & 0\le s<3\\ \dfrac{s+2}{5} & 3\le s\end{cases}$ より、

$$E(T_1)=E\left(\tau^{-1}(S_1)\right)=\int_0^3\frac{s}{3}e^{-s}ds+\int_3^\infty\frac{s+2}{5}e^{-s}ds$$

$$=\left[-\frac{1}{3}e^{-s}(1+s)\right]_0^3+\left[-\frac{1}{5}e^{-s}(1+s)-\frac{2}{5}e^{-s}\right]_3^\infty$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}e^{-3}+\frac{4}{5}e^{-3}+\frac{2}{5}e^{-3}=0.327$$

VI.

(1) a **6** b **7** (2) c **4** d **3**

(1)

Lundberg の不等式 $\varepsilon(u_0) < e^{-30R}$ と題意から、調整係数 $R = \dfrac{1}{10}$ ($e^{-30R} = e^{-3}$) に対応する安全割増率を求めればよい。

クレーム額の積率母関数を $M_X(r)$ とすると、

$M_X(r) = \int_0^\infty \frac{1}{4} e^{-\frac{1-4r}{4}x} dx = \frac{1}{1-4r}$ となる。

$\lambda + (1+\theta)\lambda \times \mu \times r = \lambda M_X(r)$ に、 $\lambda = 15$、$\mu = 4$、$M_X(r) = \dfrac{1}{1-4r}$、$r = \dfrac{1}{10}$ を代入すると

$1 + \dfrac{2}{5}(1+\theta) = \dfrac{5}{3}$ となり、これを解き、$\theta = \dfrac{2}{3} \fallingdotseq 0.67$ となる。

(2)

元受保険料 $C = 15 \times 4 \times (1 + \frac{2}{3}) = 100$

正味保険料 $C' = C - 15 \times 4 \times \alpha \times 2 = 100 - 120\alpha$

1 件あたりの正味クレーム額 $X' = (1-\alpha)X$

1 件あたりの正味クレーム額の期待値 $E((1-\alpha)X) = 4(1-\alpha)$

以上から、正味ベースの期待利益は、$C' - E(N)E((1-\alpha)X) = 100 - 120\alpha - 60(1-\alpha) = 40 - 60\alpha$

であり、これを 10 以上とするためには、$\alpha \leq \dfrac{1}{2}$ とする必要がある。

また、正味クレーム額の積率母関数は $M_{X'}(r) = M_{(1-\alpha)X}(r) = M_X((1-\alpha)r) = \dfrac{1}{1-4r(1-\alpha)}$ であるから、

$$E(N) + C'r = E(N)M_{X'}(r)$$

$$15 + (100 - 120\alpha)r = \frac{15}{1-4r(1-\alpha)}$$

$$15 + (100-120\alpha)r - 60r(1-\alpha) - 4r^2(1-\alpha)(100-120\alpha) = 15$$

$$(100 - 120\alpha - 60 + 60\alpha)r - 4r^2(1-\alpha)(100-120\alpha) = 0$$

$$(40 - 60\alpha)r - 4r^2(1-\alpha)(100-120\alpha) = 0$$

$$(10 - 15\alpha) - r(1-\alpha)(100-120\alpha) = 0$$

よって、$r = \dfrac{10-15\alpha}{(1-\alpha)(100-120\alpha)} = \dfrac{2-3\alpha}{(1-\alpha)(20-24\alpha)} = \dfrac{0.25}{1-\alpha} + \dfrac{3}{24\alpha - 20}$ である。

これを最大にする α を求めればよいから、

$\dfrac{dr}{d\alpha} = \dfrac{0.25}{(1-\alpha)^2} - \dfrac{72}{(24\alpha-20)^2} = 0$ とすれば、$\alpha \neq 1$ および $\alpha \neq \dfrac{5}{6}$ の条件のもと

$$18(1-\alpha)^2=(6\alpha-5)^2$$
$$36\alpha^2-60\alpha+25=18\alpha^2-36\alpha+18$$
$$18\alpha^2-24\alpha+7=0$$

$\alpha=\dfrac{2}{3}\pm\sqrt{\dfrac{1}{18}}$　となる。$\alpha\leq\dfrac{1}{2}$では、$\alpha=\dfrac{2}{3}-\sqrt{\dfrac{1}{18}}\fallingdotseq0.43$

でｒは極大、したがって最大となる。

Ⅶ.

<u>①（G）　②（B）</u>

$$E(X)=\int_0^{\infty}\frac{x}{\sqrt{18\pi x}}\exp\left(-\frac{(\log x+5)^2}{18}\right)dx=e^{-0.5}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(y-3)^2}{2}\right)dy=e^{-0.5}\fallingdotseq 0.6065$$

$$1.2\times\int_{e^{-2}}^{1}\frac{x-e^{-2}}{\sqrt{18\pi x}}\exp\left(-\frac{(\log x+5)^2}{18}\right)dx+\int^{\infty}\frac{x-1.2e^{-2}+0.2}{\sqrt{18\pi x}}\exp\left(-\frac{(\log x+5)^2}{18}\right)dx$$

$$=1.2\times\int^{\frac{5}{3}}\frac{e^{3y-5}-e^{-2}}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy+\int_{\frac{5}{3}}^{\infty}\frac{e^{3y-5}-1.2e^{-2}+0.2}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy$$

$$=-1.2e^{-2}\times\int^{\frac{5}{3}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy+1.2e^{-0.5}\times\int^{\frac{5}{3}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(y-3)^2}{2}\right)dy$$

$$+(0.2-1.2e^{-2})\int_{\frac{5}{3}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)+e^{-0.5}\int_{\frac{5}{3}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(y-3)^2}{2}\right)dy$$

$$=-1.2e^{-2}\times\int^{\frac{5}{3}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy+1.2e^{-0.5}\times\int_{-2}^{-\frac{4}{3}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy$$

$$+(0.2-1.2e^{-2})\int_{\frac{5}{3}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)+e^{-0.5}\int_{-\frac{4}{3}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy=0.5846..$$

従って、$0.5846/0.6065=0.9639....$ となり、純保険料は約 3. 5%低くなる。

Ⅷ.

<u>① （G） ② （C）</u>

クレーム額Xは$\Gamma(1,2)$に従うから、クレーム総額$S=X_1+X_2+\ldots X_n$は、

ガンマー分布の再生性より、$\Gamma(n,2)$（確率密度関数は$\dfrac{2^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-2x}$）に従う。よって、

$$f_S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta}{n\times\log(1+\alpha)}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^n\frac{2^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-2x}$$

$$=\frac{\beta}{\log(1+\alpha)}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)^n\frac{1}{n!}x^{n-1}e^{-2x}=\frac{\beta e^{-2x}}{x\log(1+\alpha)}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\alpha x}{1+\alpha}\right)^n\frac{1}{n!}$$

$$=\frac{\beta e^{-2x}}{x\log(1+\alpha)}\left(e^{\frac{2\alpha x}{1+\alpha}}-1\right)=\frac{e^{-\frac{2x}{1+\alpha}}-e^{-2x}}{x\log(1+\alpha)}\beta$$

問題３．

Ⅰ．

<u>（１）**(C)**　（２）**(J)**</u>

（１）

予定利率をiとしたとき、毎年の収入保険料$P(i)$は、

$$P(i)=200+\frac{25+(110+15)\times(1+\left(\frac{1}{1+i}\right))}{(1-\frac{50}{200})}+\frac{25+(110+15)\times(1+\left(\frac{1}{1+i}\right)+\left(\frac{1}{1+i}\right)^2)}{(1-\frac{50}{200})}$$

$$+\frac{25+(110+15)\times(1+\left(\frac{1}{1+i}\right)+\left(\frac{1}{1+i}\right)^2+\left(\frac{1}{1+i}\right)^3)}{(1-\frac{50}{200})}$$

であり、契約ポートフォリオが定常状態に達していることや、保険始期日に偏りがないことなどから、１年間の運用収益は$(P(0)-P(i))\times 0.75$と考えることができる。

これを計算すると、

$$(P(2)-P(0))\times 0.75=125\times(1-\left(\frac{1}{1+i}\right))+125\times(2-\left(\frac{1}{1+i}\right)-\left(\frac{1}{1+i}\right)^2)+125\times(3-\left(\frac{1}{1+i}\right)-\left(\frac{1}{1+i}\right)^2-\left(\frac{1}{1+i}\right)^3)$$

$$=125\times(6-3\left(\frac{1}{1+i}\right)-2\left(\frac{1}{1+i}\right)^2-\left(\frac{1}{1+i}\right)^3)=24.27...$$

（２）

毎年の収入保険料は、

$$200+\frac{25+(110+15)\times(1+\left(\frac{1}{1+i}\right))}{0.75}+\frac{25+(110+15)\times(1+\left(\frac{1}{1+i}\right)+\left(\frac{1}{1+i}\right)^2)}{0.75}$$

$$+\frac{25+(110+15)\times(1+\left(\frac{1}{1+i}\right)+\left(\frac{1}{1+i}\right)^2+\left(\frac{1}{1+i}\right)^3)}{0.75}=1767.64...$$

よって毎年の保険金は$1767.64\times 0.7=1237$

一方、<u>運用収益分を含めた</u>純保険料は$110\times(1+2+3+4)=1100$を予定しているから、純率は$1237\div 1100-1\fallingdotseq 12.45\%$引上げなくてはならない。

よって、純率改定後の営業保険料は$\frac{110\times 1.1245+110\times 1.1245\div 1.02+15+15\div 1.02+25}{0.75}=399.56...$

この営業保険料に占める改定後純率は、$\frac{110\times 1.1245+110\times 1.1245\div 1.02}{399.56}=0.6130....$

Ⅱ.

（1）①（K）　②（D）　③（C）　　（2）（F）

（1）

インフレを考慮した1事故当たりの損害額の確率密度関数$\tilde{f}(x)$は、

$$\tilde{f}(x)=\frac{1}{1+p}\frac{\alpha\theta^{\alpha}}{\left(\frac{x}{1+p}+\theta\right)^{\alpha+1}}$$
、また、分布関数$\tilde{F}(x)$は$\tilde{F}(x)=1-\left(\frac{\theta}{\frac{x}{1+p}+\theta}\right)^{\alpha}$

（いずれも$(x\geq 0)$）で表される。

よってインフレを考慮した場合の免責設定後の1事故当たりのクレーム額Yに関して

$$E(Y^2)=\int_t^{\infty}\frac{x^2}{1+p}\frac{\alpha\theta^{\alpha}}{\left(\frac{x}{1+p}+\theta\right)^{\alpha+1}}dx=(1+p)^2\alpha\theta^{\alpha}\int_{\frac{t}{1+p}+\theta}^{\infty}\frac{(s-\theta)^2}{s^{\alpha+1}}ds$$

（$\frac{x}{1+p}+\theta=s$ で変数変換）

$$=(1+p)^2\alpha\theta^{\alpha}\int_{\frac{t}{1+p}+\theta}^{\infty}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}}-\frac{2\theta}{s^{\alpha}}+\frac{\theta^2}{s^{\alpha+1}}\right)ds=(1+p)^2\alpha\theta^{\alpha}\left[-\frac{1}{\alpha-2}\frac{1}{s^{\alpha-2}}+\frac{2\theta}{\alpha-1}\frac{1}{s^{\alpha-1}}-\frac{\theta^2}{\alpha}\frac{1}{s^{\alpha}}\right]_{\frac{t}{1+p}+\theta}^{\infty}$$

$$=(1+p)^2\alpha\theta^{\alpha}\left(\frac{t}{1+p}+\theta\right)^{-\alpha}\left\{\frac{\left(\frac{t}{1+p}+\theta\right)^2}{\alpha-2}-\frac{2\theta\left(\frac{t}{1+p}+\theta\right)}{\alpha-1}+\frac{\theta^2}{\alpha}\right\}$$

したがって、解答は①（K）　②（D）　③（C）となる。

（2）

1事故のクレーム額の平均値$E(Y)$を（1）と同様に考えて求める。

$$E(Y)=\int_t^{\infty}\frac{x}{1+p}\frac{\alpha\theta^{\alpha}}{\left(\frac{x}{1+p}+\theta\right)^{\alpha+1}}dx=(1+p)\alpha\theta^{\alpha}\int_{\frac{t}{1+p}+\theta}^{\infty}\frac{(s-\theta)}{s^{\alpha+1}}ds$$

（$\frac{x}{1+p}+\theta=s$ で変数変換）

$$=(1+p)\alpha\theta^{\alpha}\int_{\frac{t}{1+p}+\theta}^{\infty}\left(\frac{1}{s^{\alpha}}-\frac{\theta}{s^{\alpha+1}}\right)ds=(1+p)\alpha\theta^{\alpha}\left[-\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{s^{\alpha-1}}+\frac{\theta}{\alpha}\frac{1}{s^{\alpha}}\right]_{\frac{t}{1+p}+\theta}^{\infty}$$

$$=(1+p)\alpha\theta^{\alpha}\left(\frac{t}{1+p}+\theta\right)^{-\alpha}\left(\frac{\dfrac{t}{1+p}+\theta}{\alpha-1}-\frac{\theta}{\alpha}\right)$$ となる。

また、インフレを考慮しない場合の免責設定後の1事故当たりのクレーム額の期待値は、上記で求めた $E(Y)$ の式において、$p=0$ とおいて、

$$=\alpha\theta^{\alpha}(t+\theta)^{-\alpha}\left(\frac{t+\theta}{\alpha-1}-\frac{\theta}{\alpha}\right)$$ となる。

したがって、$n=10$、$t=1$、$100k=50$、$100p=10$、$\theta=7$、$\alpha=3$ より、

収入保険料 $=n\alpha\theta^{\alpha}(t+\theta)^{-\alpha}\left(\frac{t+\theta}{\alpha-1}-\frac{\theta}{\alpha}\right)=10\times3\times(\frac{7}{8})^3\times(\frac{8}{2}-\frac{7}{3})=33.496$

当年度の免責設定後のクレーム総額を S とすると、

$$E(S)=nE(Y)=10\times1.1\times3\times(\frac{7}{1/1.1+7})^3\left(\frac{1/1.1+7}{2}-\frac{7}{3}\right)=37.091$$

$$V(S)=nE(Y^2)=10\times1.1^2\times3\times(\frac{7}{1/1.1+7})^3\left((1/1.1+7)^2-\frac{2\times7\times(1/1.1+7)}{2}+\frac{7^2}{3}\right)=592$$

1年後のサープラスが負になる確率は

$$\begin{aligned}P(33.496\times1.5-S<0)&=P\left(\frac{S-37.091}{\sqrt{592}}>\frac{33.496\times1.5-37.091}{\sqrt{592}}\right)\\&=P\left(\frac{S-37.091}{\sqrt{592}}>\frac{33.496\times1.5-37.091}{\sqrt{592}}\right)\\&=P\left(\frac{S-37.091}{\sqrt{592}}>0.5406\right)\\&\fallingdotseq 1-0.7054=0.2946\end{aligned}$$

したがって、解答は（**F**）となる。

以上