数学（問題）

〔問題１から問題３を通じて必要であれば（付表）に記載された数値を用いなさい。〕

問題１． 次の（１）～（１２）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。 （６０点）

（１）数直線上の点 $0,1,2,\cdots,10$ のいずれかの位置を時間の経過とともに移動してゆく粒子がある。点 $k(k=1,2,\cdots,9)$ に粒子があるとき、粒子が次の一秒後に点 $k-1$ または点 $k+1$ のいずれかに移動する確率はそれぞれ $0.6, 0.4$ であり、点 0 または点 10 に達するとそこで止まる。はじめに点 6 にあった粒子が点 0 に達する確率に最も近い数値は $\boxed{}$ である。

（A）0.667　（B）0.697　（C）0.727　（D）0.757

（E）0.787　（F）0.817　（G）0.847　（H）0.877

（２）0 または 1 の値をとりうる確率変数 X_1, X_2 の結合確率分布が

$$P\{X_1=1,X_2=1\}=\frac{n(n-1)}{N(N-1)},\quad P\{X_1=1,X_2=0\}=\frac{n(N-n)}{N(N-1)}$$

$$P\{X_1=0,X_2=1\}=\frac{n(N-n)}{N(N-1)},\quad P\{X_1=0,X_2=0\}=\frac{(N-n)(N-n-1)}{N(N-1)}$$

であるとき、X_1 の平均は $\boxed{①}$ であり、X_1 の分散は $\boxed{②}$ である。また、X_1 と X_2 の相関係数は $\boxed{③}$ である。ただし、$N-1>n>1$ とする。

［①、②の選択肢］

（A）0　（B）$\dfrac{1}{N}$　（C）$\dfrac{1}{N-1}$　（D）$\dfrac{n}{N}$　（E）$\dfrac{n}{N-1}$

（F）$\dfrac{N-n}{N}$　（G）$\dfrac{N-n}{N-1}$　（H）$\dfrac{n(N-n)}{N^2}$　（I）$\dfrac{N^2-n^2}{N^2}$　（J）$\dfrac{n(N-n)}{N(N-1)}$

［③の選択肢］

（A）$-\dfrac{1}{N-1}$　（B）$-\dfrac{1}{N(N-1)}$　（C）$-\dfrac{n(n-1)}{N(N-1)}$　（D）$-\dfrac{n(N-n)}{N^2(N-1)}$

（E）$\dfrac{1}{N-1}$　（F）$\dfrac{1}{N(N-1)}$　（G）$\dfrac{n(n-1)}{N(N-1)}$　（H）$\dfrac{n(N-n)}{N^2(N-1)}$

（3）確率変数T_i（$i=1,\cdots,n$）は互いに独立で、すべて平均１の指数分布に従うとき、確率変数

$X=\min(T_1,\cdots,T_n)$の積率母関数$M_X(\theta)$は $\dfrac{\boxed{①}}{\boxed{②}}$（$\boxed{②}>0$）であり、$X$の分散は

$\dfrac{\boxed{③}}{\boxed{④}}$ である。

(A) 1　(B) 2　(C) $\sqrt{n}$　(D) n　(E) n^2

(F) $1-\theta$　(G) $\sqrt{n}-\theta$　(H) $n-\theta$　(I) $n^2-\theta$　(J) $n^2-\theta^2$

（4）確率変数X，Y，Zは互いに独立で、すべて標準正規分布$N(0,1)$に従うとき、

確率変数$U=\dfrac{2Z^2}{X^2+Y^2}$の確率密度関数は　$f(u)=\begin{cases}\boxed{} & (u>0)\\ 0 & (u\le 0)\end{cases}$　である。

(A) $(1+2u)^{-\frac{3}{2}}$　(B) $\left(1+\frac{2}{3}u\right)^{-\frac{5}{2}}$　(C) $\dfrac{1}{\pi\sqrt{u}(1+u)}$

(D) $\dfrac{1}{2\pi\sqrt{u}(1+u)}$　(E) $\sqrt{\dfrac{3u}{2}}\left(1+\dfrac{3}{2}u\right)^{-\frac{5}{2}}$　(F) $\sqrt{\dfrac{3u}{2\pi}}\left(1+\dfrac{3}{2}u\right)^{-\frac{5}{2}}$

(G) $\dfrac{1}{\sqrt{2u}}\left(1+\dfrac{u}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$　(H) $\dfrac{1}{2\sqrt{2u}}\left(1+\dfrac{u}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$

（5）池の中にいる魚の数を最尤法により推定したい。そこで、池の中から50匹の魚をとらえてこれらに印をつけて池に放ち、のちに20匹の魚をとらえたところ、7匹の魚に印がついていた。
池の中には、これら50匹の魚以外に印のついた魚はいなかったものとするとき、池の中の魚の数をN匹とすると、未知母数Nについての尤度関数は

$$\frac{\boxed{\quad ① \quad} \cdot \boxed{\quad ② \quad}}{\boxed{\quad ③ \quad}}$$
であり、これよりNの最尤推定値は $\boxed{\quad ④ \quad}$（匹）である。

（A）$\binom{20}{7}$　（B）$\binom{50}{7}$　（C）$\binom{50}{20}$　（D）$\binom{N}{20}$

（E）$\binom{N}{50}$　（F）$\binom{N-20}{13}$　（G）$\binom{N-50}{13}$　（H）$\binom{N-50}{7}$

（I）141　（J）142　（K）143　（L）144

（6）ある電球の寿命を調べるため、サンプルを 14 個抜き出しそれらの寿命を調べたところ、次のとおりであることがわかった。

（単位：時間）

700,	752,	830,	876,	920,	957,	1,103,
1,211,	1,279,	1,308,	1,347,	1,422,	1,515,	1,538

電球の平均寿命について区間推定を行ったとき、信頼係数 95%とした場合の信頼区間の下限に最も近い数値は［ ① ］（時間）であり、上限に最も近い数値は［ ② ］（時間）である。ただし、電球の寿命は指数分布に従うものとする。

（A）603　（B）709　（C）762　（D）1,207　（E）1,331

（F）1,862　（G）2,059　（H）2,800　（I）4,797　（J）5,599

（7）あるコインについて次のことがわかっている。

・そのコインが偽造でなければ、表の出る確率と裏の出る確率はともに$\frac{1}{2}$である。

・そのコインが偽造であれば、表の出る確率は$\frac{3}{4}$であり、裏の出る確率は$\frac{1}{4}$である。

いま、帰無仮説H_0「コインが偽造でない」を、このコインを数回投げることにより検定する。コインを7回投げ、表の出た回数が6回以上であれば偽造であると判断することとすると、第1種の誤りのおこる確率に最も近い数値は［ ① ］であり、第2種の誤りのおこる確率に最も近い数値は［ ② ］である。

（A）0.0013　（B）0.0547　（C）0.0625　（D）0.2634　（E）0.3115

（F）0.4449　（G）0.5551　（H）0.7366　（I）0.9375　（J）0.9987

（8）あるサッカー選手のペナルティーキックの成功率は、通常 90％である。この選手が通常ではない騒音の中で蹴ったときの成功率の変化について、５％の有意水準で百分率に関する検定を行った。これらの検定について記述した以下の内容について、正しいものの組み合わせは$\boxed{}$である。ただし、いずれも正しくない場合は、**(H)** をマークすること。

（ア）50 回中 41 回成功した場合、成功率が通常と比べて低かったといえるかの検定の結果は、「成功率が通常と比べて低かったといえる。」となる。

（イ）120 回中 102 回成功した場合、成功率は通常と比べて変化があったといえるかの検定の結果は、「成功率は通常と比べて変化があったといえる。」となる。

（ウ）5 回中 4 回成功した場合、成功率が通常と比べて低かったといえるかの精密法での検定の結果は、「成功率が通常と比べて低かったといえる。」となる。

(A)（ア）と（イ）と（ウ）　**(B)**（ア）と（イ）　**(C)**（ア）と（ウ）　**(D)**（ア）

(E)（イ）と（ウ）　**(F)**（イ）　**(G)**（ウ）

（9）区間$(0,\theta)$（$\theta > 0$）の一様分布に従う母集団からの標本を基にθを推定したい。「標本 30 個の標本平均の２倍」で推定するよりも、「標本n個の中央値の２倍（nは奇数）」で推定する方がより有効であるために必要な最小の標本数nは$\boxed{}$（個）である。

(A) 45　**(B)** 47　**(C)** 59　**(D)** 61

(E) 75　**(F)** 77　**(G)** 89　**(H)** 91

（１０）定常 $AR(2)$ モデル

$$Y_t = 0.09 + 0.6Y_{t-1} - 0.05Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

を $MA(\infty)$ 表現（$Y_t = \mu + \xi_0 \varepsilon_t + \xi_1 \varepsilon_{t-1} + \xi_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots$）したとき、

$\mu = \boxed{①}$

$\xi_i = \dfrac{1}{\boxed{②}} \left(\boxed{③}^{i+1} - \boxed{④}^{i+1} \right) \quad (i = 0,1,2,\cdots)$

である。

（A） 0.1　（B） 0.2　（C） 0.3　（D） 0.4　（E） 0.5

（F） 0.6　（G） 0.7　（H） 0.8　（I） 0.9　（J） 1.0

（１１）標準ブラウン運動 $\{X_t\}, t \geq 0$ に対して、$X_1 + X_2$ は平均 $\boxed{①}$、分散 $\boxed{②}$ の正規分布に従い、$E(X_1 \mid X_1 + X_2 > 0) = \boxed{③}$ である。

[①、②の選択肢]

（A） 0　（B） 1　（C） 2　（D） 3　（E） 4

（F） 5　（G） 6　（H） 7　（I） 8　（J） 9

[③の選択肢]

（A） $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$　（B） $\dfrac{1}{\sqrt{5\pi}}$　（C） $\dfrac{2}{\sqrt{5\pi}}$　（D） $\sqrt{\dfrac{2}{5\pi}}$

（E） $2\sqrt{\dfrac{2}{5\pi}}$　（F） $4\sqrt{\dfrac{2}{5\pi}}$　（G） $\dfrac{2}{\sqrt{5\pi}}$　（H） $\dfrac{1}{\sqrt{10\pi}}$

（１２）$\int_0^1 e^{-2x}dx$ を、$2M$ 個の一様乱数 $U_1, U_2, \cdots, U_{2M}$ を用いてモンテカルロシミュレーションをした場合の誤差の分散は ① である。
また、$2M$ 個の一様乱数 $U_1, U_2, \cdots, U_M, 1-U_1, 1-U_2, \cdots, 1-U_M$ を用いた場合の誤差の分散は ② である。

(A) $\frac{1}{2M}e^{-2}$ (B) $\frac{1}{4M}e^{-2}$ (C) $\frac{1}{M}\left(\frac{e^{-4}}{2}-e^{-2}+\frac{1}{2}\right)$

(D) $\frac{e^{-2}}{4M}\left(-e^{-2}+1\right)$ (E) $\frac{1}{4M}\left(-e^{-2}+1\right)$ (F) $\frac{1}{2M}\left(e^{-4}-3e^{-2}+1\right)$

(G) $\frac{1}{2M}\left(-\frac{e^{-4}}{4}+e^{-2}-\frac{1}{4}\right)$ (H) $\frac{1}{M}\left(-\frac{e^{-4}}{4}+e^{-2}-\frac{1}{4}\right)$ (I) $\frac{1}{2M}\left(-\frac{e^{-4}}{4}+2e^{-2}-\frac{1}{4}\right)$

(J) $\frac{1}{2M}\left(-\frac{3e^{-4}}{4}+2e^{-2}-\frac{1}{4}\right)$

問題２． ある転職希望者が新しい就職先を探している。この転職希望者は会社を順次訪問し、あらかじめ自分で決めておいた金額 $t\ (>\ 0\ )$ を超える年俸を最初に提示した会社へ就職し、転職活動は終了する。ここで、利得 R を就職する会社の年俸からそれまでの訪問にかかった費用を控除したものと定義し、利得 R の期待値 $E(R)$ を最大にするような t が満足すべき関係式を導きたい。
このとき、次の（１）、（２）について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれ選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

（２０点）

注：以下の各問において、次のとおり記号を定義する。

$X_i(i=1,2,3,\cdots)$	：i 番目に訪問した会社が提示した年俸を表す連続的な確率変数 X_i は互いに独立で同一の分布に従うものとする
c	：会社の訪問に要する１社あたりの費用（正の定数）
R	：就職する会社の年俸からそれまでの訪問にかかった費用を控除したもの （k 番目に訪問した会社へ就職する場合は $R = X_k - kc$）
$f(x)$	：X_i の確率密度関数。$x\ \geq\ 0$ については、連続かつ $f(x) > 0$、 $x\ <\ 0$ については、$f(x) = 0$
$F(x)$	：X_i の確率分布関数。$F(x) < 1$
$g(r)$	：R の確率密度関数
$P(A)$	：事象 A の発生確率

また、（１）、（２）を解答するうえで、以下を前提とする。
・就職先は無数に存在するものとする。
・訪問した会社からは必ず年俸を提示されかつ提示された年俸のもとで就職を拒否されることはないものとする。
・この転職希望者は新しい就職先が見つかるまで転職活動を続けるものとし、訪問した会社から年俸を提示される前に次の会社を訪問することはなく、会社の訪問にかかる費用を賄えるだけの十分な資力を有しているものとする。

（１）まず、$E(R)$ を t を用いて表す。
１番目に訪問した会社が提示した年俸 X_1 が t を超えるか否かの条件により、$g(r)$ は条件付き確率密度関数を用いて、次のように表すことができる。

$$g(r) = \boxed{\quad ① \quad} \cdot g(r|X_1 > t) + \boxed{\quad ② \quad} \cdot g(r|X_1 \leq t)$$

この関係式を用いて$E(R)$を計算すると、

$$E(R) = \int_{-\infty}^{\infty} rg(r)dr$$

$$= \left(1 - \boxed{\quad ③ \quad}\right) \cdot E\left(R \middle| X_1 > t\right) + \boxed{\quad ③ \quad} \cdot E\left(R \middle| X_1 \le t\right) \quad \cdots\cdots (\mathrm{i})$$

となる。

いま、$E\left(R \middle| X_1 > t\right)$について考える。$X_1 > t$ の場合、1番目に訪問した会社にX_1の年俸で就職することになり、利得はその年俸から1社訪問した費用を控除したものとなる。
よって、

$$E\left(R \middle| X_1 > t\right) = \boxed{\quad ④ \quad} - c \quad \cdots\cdots (\mathrm{ii})$$

次に、$E\left(R \middle| X_1 \le t\right)$について考える。$X_1 \le t$ の場合、1番目に訪問した会社には就職せず、転職活動は始めからやり直しになるが、1社訪問した費用がかかっているため、その分だけ訪問前に比べて利得が減少する。よって、

$$E\left(R \middle| X_1 \le t\right) = \boxed{\quad ⑤ \quad} - c \quad \cdots\cdots (\mathrm{iii})$$

よって、(i)、(ii)、(iii) より

$$E(R) = \boxed{\quad ⑥ \quad} - \boxed{\quad ⑦ \quad} \quad \cdots\cdots (\mathrm{iv})$$

となる。また、

$$\boxed{\quad ⑥ \quad} = \int_{-\infty}^{\infty} x \boxed{\quad ⑧ \quad} dx$$

$$= \frac{\boxed{\quad ⑨ \quad}}{\boxed{\quad ⑩ \quad}} \quad \cdots\cdots (\mathrm{v})$$

であることから、(v) を (iv) に代入すると、

$$E(R) = \frac{\boxed{\quad ⑪ \quad} - c}{\boxed{\quad ⑫ \quad}} \quad \cdots\cdots (\mathrm{vi})$$

と表すことができる。

（2）次に、$E(R)$を最大とするtが満足する関係式を求める。

（vi）の両辺をtで微分し、$\dfrac{dE(R)}{dt}=0$となるtを求めると、tは

$-\boxed{⑬}+\boxed{⑪}-c=0$

すなわち、

$\boxed{⑭}=c$ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・（vii）

を満足する。

さらに、$E(R)$および$\dfrac{dE(R)}{dt}$はtについて連続であり、計算により、$\dfrac{dE(R)}{dt}$は（vii）を満たすtの前後で、正から負になることが確かめられるため、（vii）を満足するtに対して$E(R)$は最大となる。

いま、X_iがそれぞれ平均$\dfrac{1}{\lambda}$ $(\lambda>0)$ の指数分布に従うとすると、$\boxed{⑮}$のときに限り（vii）を満足するtが存在し、$t=\boxed{⑯}$となる。

[①、②の選択肢]

（A）$P(R>t)$　（B）$P(R\le t)$　（C）$P(R=t)$　（D）$P(R\ne t)$

（E）$P(X_1>t)$　（F）$P(X_1\le t)$　（G）$P(X_1=t)$　（H）$P(X_1\ne t)$

[③の選択肢]

（A）$F(t)$　（B）$f(t)$　（C）$g(t)$　（D）$g(r|X_1>t)$

（E）$F(1-t)$　（F）$f(1-t)$　（G）$g(1-t)$　（H）$g(r|X_1\le t)$

[④、⑤、⑥の選択肢]

（A）$E(R)$　（B）$E(X_1)$　（C）$E(R|X_1>t)$　（D）$E(R|X_1\le t)$

（E）$E(X_1|X_1>t)$　（F）$E(X_1|X_1\le t)$　（G）$\dfrac{E(R)}{P(X_1\le t)}$　（H）$\dfrac{E(X_1)}{P(X_1\le t)}$

[⑦の選択肢]

(A) c　(B) $2c$　(C) $\frac{c}{F(t)}$　(D) $\frac{c}{f(t)}$

(E) $\frac{c}{F(1-t)}$　(F) $\frac{c}{f(1-t)}$　(G) $\frac{c}{1-F(t)}$　(H) $\frac{c}{1-f(t)}$

[⑧の選択肢]

(A) $f(x)$　(B) $g(x)$　(C) $f(x|X_1>t)$　(D) $g(x|X_1>t)$

(E) $f(x|X_1\le t)$　(F) $g(x|X_1\le t)$　(G) $\frac{f(x)}{P(X_1\le t)}$　(H) $\frac{f(x)}{P(X_1>t)}$

[⑨、⑪、⑭の選択肢]

(A) $\int_t^\infty (x-t)f(x)dx$　(B) $\int_t^\infty xf(x)dx$　(C) $\int_t^\infty tf(x)dx$　(D) $\int_t^\infty (x-c)f(x)dx$

(E) $\int_{-\infty}^t (x-t)f(x)dx$　(F) $\int_{-\infty}^t xf(x)dx$　(G) $\int_{-\infty}^t tf(x)dx$　(H) $\int_{-\infty}^t (x-c)f(x)dx$

[⑩、⑫の選択肢]

(A) $1-t$　(B) $2-t$　(C) $F(t)$　(D) $f(t)$

(E) $F(1-t)$　(F) $f(1-t)$　(G) $1-F(t)$　(H) $1-f(t)$

[⑬の選択肢]

(A) $(1-t)F(t)$　(B) $(1-t)f(t)$　(C) $(1-t)(1-F(t))$　(D) $(1-t)(1-f(t))$

(E) $tF(t)$　(F) $tf(t)$　(G) $t(1-F(t))$　(H) $t(1-f(t))$

[⑮の選択肢]

(A) $c=0$　(B) $c=\lambda=1$　(C) $c=\lambda$　(D) $c>\lambda$

(E) $c<\lambda$　(F) $c=\frac{1}{\lambda}$　(G) $c>\frac{1}{\lambda}$　(H) $c<\frac{1}{\lambda}$

[⑯の選択肢]

(A) $\lambda\log(\lambda c)$　(B) $-\lambda\log(\lambda c)$　(C) $\lambda\log\left(\frac{c}{\lambda}\right)$　(D) $-\lambda\log\left(\frac{c}{\lambda}\right)$

(E) $\frac{1}{\lambda}\log(\lambda c)$　(F) $-\frac{1}{\lambda}\log(\lambda c)$　(G) $\frac{1}{\lambda}\log\left(\frac{c}{\lambda}\right)$　(H) $-\frac{1}{\lambda}\log\left(\frac{c}{\lambda}\right)$

問題3．ある会社は、ロット（製品の仕切）の不良率が2% 以下のものを採用し、不良率が5% 以上のものはなるべく不合格として製造元へ返却したいと考えている。このとき、次の（1）、（2）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。
ただし、１つのロットに含まれる製品の数は十分大きく、ロットからのサンプルの大きさをnとすれば、このn個の中の不良品数は、ポアソン分布に従っているものと考えてよい。（２０点）

（1）まず、ポアソン分布とχ^2分布の関係を示したい。

いま、積分$F(k,\lambda)=\int_\lambda^\infty t^k e^{-t}dt$ （kは自然数、λは正の実数）について、次の (a) および (b) を考える。

(a) 積分$F(k,\lambda)$について、１回部分積分すると、

$$F(k,\lambda)=\boxed{\quad ① \quad}+k\times F(k-1,\lambda)$$

となるから、さらにk回部分積分を繰り返すことにより、

$$F(k,\lambda)=\sum_{i=0}^{\boxed{②}}\boxed{\quad ③ \quad}=\boxed{\quad ④ \quad}\times P(X\le\boxed{\quad ② \quad})$$

となる。ここに、Xは平均$\boxed{\quad ⑤ \quad}$のポアソン分布に従う確率変数とする。

(b) 積分$F(k,\lambda)$について、$t=\dfrac{y}{2}$と変数変換すると、

$$F(k,\lambda)=\int_{\boxed{⑥}}^\infty \frac{1}{2}\left(\frac{y}{2}\right)^k e^{-\frac{y}{2}}dy$$

となる。

ここで、関数 $\dfrac{1}{2\times\boxed{\quad ⑦ \quad}}\left(\dfrac{y}{2}\right)^k e^{-\frac{y}{2}}$ は、$y\ge 0$における自由度$\boxed{\quad ⑧ \quad}$のχ^2分布の確率密度関数であるから、

$$F(k,\lambda)=\boxed{\quad ⑦ \quad}\times\int_{\boxed{⑥}}^\infty \frac{1}{2\times\boxed{\quad ⑦ \quad}}\left(\frac{y}{2}\right)^k e^{-\frac{y}{2}}dy$$

$$=\boxed{\quad ⑦ \quad}\times P(Y\ge\boxed{\quad ⑥ \quad})$$

となる。ここに、Yは自由度$\boxed{\quad ⑧ \quad}$のχ^2分布に従う確率変数とする。

したがって、(a)および(b)の結果から、ポアソン分布とχ^2分布の関係

$$m \times P(X \le \boxed{\quad ② \quad}) = P(Y \ge \boxed{\quad ⑥ \quad})$$

が示される。ここに、$m = \dfrac{\boxed{\quad ④ \quad}}{\boxed{\quad ⑦ \quad}}$ とする。

（2）不良率2% のロットがまちがえて不合格とされる確率を5%、不良率5% のロットが合格となってしまう確率を10% とするとき、ロットから何個のサンプルを取り出して、その中の不良品が何個以下のときこれを合格とすればよいかを求めたい。
そこで、n 個のサンプルを抽出してこの中に見出された不良品がc 個以下のとき、このロットを合格とすることとし、このn とc（n とc は自然数）を求めることとする。
いま、ロットの不良率をp とし、このロットからのサンプル数をn とした場合、ロットの合格する確率$L(p)$は、U を平均$\boxed{\quad ⑨ \quad}$のポアソン分布に従う確率変数として、

$$L(p) = P(U \le \boxed{\quad ⑩ \quad})$$

と表される。

ここで、（1）で導かれたポアソン分布とχ^2分布の関係を用いて、V を自由度$\varphi = \boxed{\quad ⑪ \quad}$の$\chi^2$分布に従う確率変数とすれば、

$$L(p) = P(U \le \boxed{\quad ⑩ \quad}) = \frac{P(V \ge \boxed{\quad ⑫ \quad})}{m}$$

と表される。すなわち、

$$\boxed{\quad ⑫ \quad} = \chi_{\varphi}{}^{2}\{m \cdot L(p)\}$$ （自由度φ のχ^2分布の上側「$m \cdot L(p)$」点）

という関係式が示される。

次に、この関係式を用いて、次の条件（ア）（イ）を満たすn とc を求める。

（ア）不良率2% のロットがまちがえて不合格とされる確率を5%

（イ）不良率5% のロットが合格となってしまう確率を10%

これらの条件から、

$\boxed{\quad ⑬ \quad} \times \chi_{\varphi}^{2}\{\boxed{\quad ⑭ \quad}\} = \chi_{\varphi}^{2}\{\boxed{\quad ⑮ \quad}\}$

という関係が成立するため、付表からこの関係式が成立するφを求めることにより、

$n = \boxed{\quad ⑯ \quad}$、$c = \boxed{\quad ⑰ \quad}$

となる。

また、このnとcに対して、合格する確率が50%となるロットは、不良率が$\boxed{\quad ⑱ \quad}$%のロットである。（% 表示で、小数点以下第 2 位を四捨五入して、小数点以下第 1 位まで求めなさい。）

[①の選択肢]

（A） 0　（B） 1　（C） λ^k　（D） λ^{k+1}

（E） $\dfrac{\lambda^{k+1}}{k+1}$　（F） $\lambda^k e^{-\lambda}$　（G） $\lambda^{k+1} e^{-\lambda}$　（H） $\dfrac{\lambda^{k+1} e^{-\lambda}}{k+1}$

[②、⑧の選択肢]

（A） $k-1$　（B） k　（C） $k+1$　（D） $k+2$

（E） $2k-2$　（F） $2k$　（G） $2k+1$　（H） $2k+2$

[③、④の選択肢]

（A） 1　（B） k　（C） $k!$　（D） $\dfrac{k!}{i!}$

（E） $\dfrac{\lambda^{-i}}{i!}$　（F） $\dfrac{e^{-\lambda}}{k!}$　（G） $\dfrac{k!}{i!} \cdot \lambda^i e^{-\lambda}$　（H） $\dfrac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i! \cdot k!}$

（I） $\dfrac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$　（J） $\dfrac{\lambda^i e^{-\lambda}}{k!}$

[⑤、⑥の選択肢]

(A) $\sqrt{\lambda}$　(B) $\sqrt{2\lambda}$　(C) $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$　(D) $\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}$

(E) λ　(F) 2λ　(G) $\dfrac{1}{\lambda}$　(H) $\dfrac{2}{\lambda}$

[⑦の選択肢]

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) 1　(C) $\Gamma\left(\dfrac{k+1}{2}\right)$　(D) $2\Gamma\left(\dfrac{k+1}{2}\right)$

(E) $\dfrac{\Gamma(k+1)}{2}$　(F) $\Gamma(k+1)$　(G) $\dfrac{k}{2}$　(H) k

※　$\Gamma(s)=\int_0^\infty u^{s-1}e^{-u}du$

[⑨、⑩の選択肢]

(A) c　(B) p　(C) n　(D) cp

(E) np　(F) $cp(1-p)$　(G) $np(1-p)$　(H) cnp

[⑪の選択肢]

(A) c　(B) $2c$　(C) $2c+1$　(D) $2c+2$

(E) np　(F) $2np$　(G) $2np+1$　(H) $2np+2$

[⑫の選択肢]

(A) np　(B) $2np$　(C) $2np+1$　(D) $2np+2$

(E) $\dfrac{1}{np}$　(F) $\dfrac{2}{np}$　(G) $\dfrac{2}{np}+1$　(H) $\dfrac{2}{np}+2$

[⑬の選択肢]

(A) 1.75　(B) 2.00　(C) 2.25　(D) 2.50

(E) 2.75　(F) 3.00　(G) 3.25　(H) 3.50

[⑭、⑮の選択肢]

(A) 0.005　(B) 0.010　(C) 0.025　(D) 0.050

(E) 0.100　(F) 0.900　(G) 0.950　(H) 0.975

(I) 0.990　(J) 0.995

[⑯の選択肢]

(A) 106　(B) 207　(C) 308　(D) 409

(E) 510　(F) 611　(G) 712　(H) 813

[⑰の選択肢]

(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7

(E) 8　(F) 9　(G) 10　(H) 11

[⑱の選択肢]

(A) 3.3　(B) 3.4　(C) 3.5　(D) 3.6

(E) 3.7　(F) 3.8　(G) 3.9　(H) 4.0

(付表)

I .標準正規分布表

$P(x > 0.25) = 0.4013$

上側ε点 $u(\varepsilon)$ から確率εを求める表

$u(\varepsilon) \rightarrow \varepsilon$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.0*	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1*	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2*	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3*	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4*	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5*	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6*	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7*	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8*	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9*	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0*	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1*	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2*	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3*	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4*	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5*	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6*	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7*	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8*	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9*	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0*	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1*	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2*	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3*	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4*	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5*	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6*	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7*	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8*	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9*	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014

$P(x > 1.9600) = 0.025$

確率εから上側ε点 $u(\varepsilon)$ を求める表

$\varepsilon \to u(\varepsilon)$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.00*	∞	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656
0.01*	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0749
0.02*	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.9600	1.9431	1.9268	1.9110	1.8957
0.03*	1.8808	1.8663	1.8522	1.8384	1.8250	1.8119	1.7991	1.7866	1.7744	1.7624
0.04*	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546
0.05*	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5718	1.5632
0.06*	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063	1.4985	1.4909	1.4833
0.07*	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4395	1.4325	1.4255	1.4187	1.4118
0.08*	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3595	1.3532	1.3469
0.09*	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3106	1.3047	1.2988	1.2930	1.2873
0.10*	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319
0.11*	1.2265	1.2212	1.2160	1.2107	1.2055	1.2004	1.1952	1.1901	1.1850	1.1800
0.12*	1.1750	1.1700	1.1650	1.1601	1.1552	1.1503	1.1455	1.1407	1.1359	1.1311
0.13*	1.1264	1.1217	1.1170	1.1123	1.1077	1.1031	1.0985	1.0939	1.0893	1.0848
0.14*	1.0803	1.0758	1.0714	1.0669	1.0625	1.0581	1.0537	1.0494	1.0450	1.0407
0.15*	1.0364	1.0322	1.0279	1.0237	1.0194	1.0152	1.0110	1.0069	1.0027	0.9986
0.16*	0.9945	0.9904	0.9863	0.9822	0.9782	0.9741	0.9701	0.9661	0.9621	0.9581
0.17*	0.9542	0.9502	0.9463	0.9424	0.9385	0.9346	0.9307	0.9269	0.9230	0.9192
0.18*	0.9154	0.9116	0.9078	0.9040	0.9002	0.8965	0.8927	0.8890	0.8853	0.8816
0.19*	0.8779	0.8742	0.8705	0.8669	0.8633	0.8596	0.8560	0.8524	0.8488	0.8452
0.20*	0.8416	0.8381	0.8345	0.8310	0.8274	0.8239	0.8204	0.8169	0.8134	0.8099
0.21*	0.8064	0.8030	0.7995	0.7961	0.7926	0.7892	0.7858	0.7824	0.7790	0.7756
0.22*	0.7722	0.7688	0.7655	0.7621	0.7588	0.7554	0.7521	0.7488	0.7454	0.7421
0.23*	0.7388	0.7356	0.7323	0.7290	0.7257	0.7225	0.7192	0.7160	0.7128	0.7095
0.24*	0.7063	0.7031	0.6999	0.6967	0.6935	0.6903	0.6871	0.6840	0.6808	0.6776
0.25*	0.6745	0.6713	0.6682	0.6651	0.6620	0.6588	0.6557	0.6526	0.6495	0.6464
0.26*	0.6433	0.6403	0.6372	0.6341	0.6311	0.6280	0.6250	0.6219	0.6189	0.6158
0.27*	0.6128	0.6098	0.6068	0.6038	0.6008	0.5978	0.5948	0.5918	0.5888	0.5858
0.28*	0.5828	0.5799	0.5769	0.5740	0.5710	0.5681	0.5651	0.5622	0.5592	0.5563
0.29*	0.5534	0.5505	0.5476	0.5446	0.5417	0.5388	0.5359	0.5330	0.5302	0.5273
0.30*	0.5244	0.5215	0.5187	0.5158	0.5129	0.5101	0.5072	0.5044	0.5015	0.4987
0.31*	0.4959	0.4930	0.4902	0.4874	0.4845	0.4817	0.4789	0.4761	0.4733	0.4705
0.32*	0.4677	0.4649	0.4621	0.4593	0.4565	0.4538	0.4510	0.4482	0.4454	0.4427
0.33*	0.4399	0.4372	0.4344	0.4316	0.4289	0.4261	0.4234	0.4207	0.4179	0.4152
0.34*	0.4125	0.4097	0.4070	0.4043	0.4016	0.3989	0.3961	0.3934	0.3907	0.3880
0.35*	0.3853	0.3826	0.3799	0.3772	0.3745	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611
0.36*	0.3585	0.3558	0.3531	0.3505	0.3478	0.3451	0.3425	0.3398	0.3372	0.3345
0.37*	0.3319	0.3292	0.3266	0.3239	0.3213	0.3186	0.3160	0.3134	0.3107	0.3081
0.38*	0.3055	0.3029	0.3002	0.2976	0.2950	0.2924	0.2898	0.2871	0.2845	0.2819
0.39*	0.2793	0.2767	0.2741	0.2715	0.2689	0.2663	0.2637	0.2611	0.2585	0.2559
0.40*	0.2533	0.2508	0.2482	0.2456	0.2430	0.2404	0.2378	0.2353	0.2327	0.2301
0.41*	0.2275	0.2250	0.2224	0.2198	0.2173	0.2147	0.2121	0.2096	0.2070	0.2045
0.42*	0.2019	0.1993	0.1968	0.1942	0.1917	0.1891	0.1866	0.1840	0.1815	0.1789
0.43*	0.1764	0.1738	0.1713	0.1687	0.1662	0.1637	0.1611	0.1586	0.1560	0.1535
0.44*	0.1510	0.1484	0.1459	0.1434	0.1408	0.1383	0.1358	0.1332	0.1307	0.1282
0.45*	0.1257	0.1231	0.1206	0.1181	0.1156	0.1130	0.1105	0.1080	0.1055	0.1030
0.46*	0.1004	0.0979	0.0954	0.0929	0.0904	0.0878	0.0853	0.0828	0.0803	0.0778
0.47*	0.0753	0.0728	0.0702	0.0677	0.0652	0.0627	0.0602	0.0577	0.0552	0.0527
0.48*	0.0502	0.0476	0.0451	0.0426	0.0401	0.0376	0.0351	0.0326	0.0301	0.0276
0.49*	0.0251	0.0226	0.0201	0.0175	0.0150	0.0125	0.0100	0.0075	0.0050	0.0025

Ⅱ.自由度φのχ^2分布の上側ε点： $\chi_{\varphi}^{2}(\varepsilon)$

φ ＼ ε	0.990	0.975	0.950	0.900	0.500	0.100	0.050	0.025	0.010
1	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	0.4549	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349
2	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	1.3863	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103
3	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	2.3660	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449
4	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	3.3567	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767
5	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	4.3515	9.2364	11.0705	12.8325	15.0863
6	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	5.3481	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119
7	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	6.3458	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753
8	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	7.3441	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902
9	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	8.3428	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660
10	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	9.3418	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093
11	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	10.3410	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250
12	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	11.3403	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170
13	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415	12.3398	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882
14	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	13.3393	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412
15	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468	14.3389	22.3071	24.9958	27.4884	30.5779
16	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	15.3385	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999
17	6.4078	7.5642	8.6718	10.0852	16.3382	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087
18	7.0149	8.2307	9.3905	10.8649	17.3379	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053
19	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509	18.3377	27.2036	30.1435	32.8523	36.1909
20	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	19.3374	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662
21	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	20.3372	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322
22	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415	21.3370	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894
23	10.1957	11.6886	13.0905	14.8480	22.3369	32.0069	35.1725	38.0756	41.6384
24	10.8564	12.4012	13.8484	15.6587	23.3367	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798
25	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	24.3366	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141
26	12.1981	13.8439	15.3792	17.2919	25.3365	35.5632	38.8851	41.9232	45.6417
27	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	26.3363	36.7412	40.1133	43.1945	46.9629
28	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392	27.3362	37.9159	41.3371	44.4608	48.2782
29	14.2565	16.0471	17.7084	19.7677	28.3361	39.0875	42.5570	45.7223	49.5879
30	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992	29.3360	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922
31	15.6555	17.5387	19.2806	21.4336	30.3359	41.4217	44.9853	48.2319	52.1914
32	16.3622	18.2908	20.0719	22.2706	31.3359	42.5847	46.1943	49.4804	53.4858
33	17.0735	19.0467	20.8665	23.1102	32.3358	43.7452	47.3999	50.7251	54.7755
34	17.7891	19.8063	21.6643	23.9523	33.3357	44.9032	48.6024	51.9660	56.0609
35	18.5089	20.5694	22.4650	24.7967	34.3356	46.0588	49.8018	53.2033	57.3421
36	19.2327	21.3359	23.2686	25.6433	35.3356	47.2122	50.9985	54.4373	58.6192
37	19.9602	22.1056	24.0749	26.4921	36.3355	48.3634	52.1923	55.6680	59.8925
38	20.6914	22.8785	24.8839	27.3430	37.3355	49.5126	53.3835	56.8955	61.1621
39	21.4262	23.6543	25.6954	28.1958	38.3354	50.6598	54.5722	58.1201	62.4281
40	22.1643	24.4330	26.5093	29.0505	39.3353	51.8051	55.7585	59.3417	63.6907
50	29.7067	32.3574	34.7643	37.6886	49.3349	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539
60	37.4849	40.4817	43.1880	46.4589	59.3347	74.3970	79.0819	83.2977	88.3794
70	45.4417	48.7576	51.7393	55.3289	69.3345	85.5270	90.5312	95.0232	100.4252
80	53.5401	57.1532	60.3915	64.2778	79.3343	96.5782	101.8795	106.6286	112.3288
90	61.7541	65.6466	69.1260	73.2911	89.3342	107.5650	113.1453	118.1359	124.1163
100	70.0649	74.2219	77.9295	82.3581	99.3341	118.4980	124.3421	129.5612	135.8067

Ⅲ．分母の自由度n、分子の自由度mのF分布の上側 ε 点 :$F_n^m(\varepsilon)$

$\varepsilon =$ 0.100

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	8.526	9.000	9.162	9.243	9.293	9.326	9.349	9.367	9.381	9.392
3	5.538	5.462	5.391	5.343	5.309	5.285	5.266	5.252	5.240	5.230
4	4.545	4.325	4.191	4.107	4.051	4.010	3.979	3.955	3.936	3.920
5	4.060	3.780	3.619	3.520	3.453	3.405	3.368	3.339	3.316	3.297
6	3.776	3.463	3.289	3.181	3.108	3.055	3.014	2.983	2.958	2.937
7	3.589	3.257	3.074	2.961	2.883	2.827	2.785	2.752	2.725	2.703
8	3.458	3.113	2.924	2.806	2.726	2.668	2.624	2.589	2.561	2.538
9	3.360	3.006	2.813	2.693	2.611	2.551	2.505	2.469	2.440	2.416
10	3.285	2.924	2.728	2.605	2.522	2.461	2.414	2.377	2.347	2.323

$\varepsilon =$ 0.050

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	18.5128	19.0000	19.1643	19.2468	19.2964	19.3295	19.3532	19.3710	19.3848	19.3959
3	10.1280	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988	5.9644
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990	4.0600
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767	3.6365
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782

$\varepsilon =$ 0.025

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	38.5063	39.0000	39.1655	39.2484	39.2982	39.3315	39.3552	39.3730	39.3869	39.3980
3	17.4434	16.0441	15.4392	15.1010	14.8848	14.7347	14.6244	14.5399	14.4731	14.4189
4	12.2179	10.6491	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439
5	10.0070	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192
6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234	5.4613
7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611
8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951
9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260	3.9639
10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790	3.7168

$\varepsilon =$ 0.010

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	98.5025	99.0000	99.1662	99.2494	99.2993	99.3326	99.3564	99.3742	99.3881	99.3992
3	34.1162	30.8165	29.4567	28.7099	28.2371	27.9107	27.6717	27.4892	27.3452	27.2287
4	21.1977	18.0000	16.6944	15.9770	15.5219	15.2069	14.9758	14.7989	14.6591	14.5459
5	16.2582	13.2739	12.0600	11.3919	10.9670	10.6723	10.4555	10.2893	10.1578	10.0510
6	13.7450	10.9248	9.7795	9.1483	8.7459	8.4661	8.2600	8.1017	7.9761	7.8741
7	12.2464	9.5466	8.4513	7.8466	7.4604	7.1914	6.9928	6.8400	6.7188	6.6201
8	11.2586	8.6491	7.5910	7.0061	6.6318	6.3707	6.1776	6.0289	5.9106	5.8143
9	10.5614	8.0215	6.9919	6.4221	6.0569	5.8018	5.6129	5.4671	5.3511	5.2565
10	10.0443	7.5594	6.5523	5.9943	5.6363	5.3858	5.2001	5.0567	4.9424	4.8491

$\varepsilon =$ 0.005

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	198.5013	199.0000	199.1664	199.2497	199.2996	199.3330	199.3568	199.3746	199.3885	199.3996
3	55.5520	49.7993	47.4672	46.1946	45.3916	44.8385	44.4341	44.1256	43.8824	43.6858
4	31.3328	26.2843	24.2591	23.1545	22.4564	21.9746	21.6217	21.3520	21.1391	20.9667
5	22.7848	18.3138	16.5298	15.5561	14.9396	14.5133	14.2004	13.9610	13.7716	13.6182
6	18.6350	14.5441	12.9166	12.0275	11.4637	11.0730	10.7859	10.5658	10.3915	10.2500
7	16.2356	12.4040	10.8824	10.0505	9.5221	9.1553	8.8854	8.6781	8.5138	8.3803
8	14.6882	11.0424	9.5965	8.8051	8.3018	7.9520	7.6941	7.4959	7.3386	7.2106
9	13.6136	10.1067	8.7171	7.9559	7.4712	7.1339	6.8849	6.6933	6.5411	6.4172
10	12.8265	9.4270	8.0807	7.3428	6.8724	6.5446	6.3025	6.1159	5.9676	5.8467

Ⅳ．自由度φのt分布の上側ε点 $t_{\varphi}(\varepsilon)$

φ \ ε	0.100	0.050	0.025
1	3.0777	6.3138	12.7062
2	1.8856	2.9200	4.3027
3	1.6377	2.3534	3.1824
4	1.5332	2.1318	2.7764
5	1.4759	2.0150	2.5706
6	1.4398	1.9432	2.4469
7	1.4149	1.8946	2.3646
8	1.3968	1.8595	2.3060
9	1.3830	1.8331	2.2622
10	1.3722	1.8125	2.2281
11	1.3634	1.7959	2.2010
12	1.3562	1.7823	2.1788
13	1.3502	1.7709	2.1604
14	1.3450	1.7613	2.1448
15	1.3406	1.7531	2.1314
16	1.3368	1.7459	2.1199
17	1.3334	1.7396	2.1098
18	1.3304	1.7341	2.1009
19	1.3277	1.7291	2.0930
20	1.3253	1.7247	2.0860
21	1.3232	1.7207	2.0796
22	1.3212	1.7171	2.0739
23	1.3195	1.7139	2.0687
24	1.3178	1.7109	2.0639
25	1.3163	1.7081	2.0595

以上

数学（解答例）

問題1

（1）

粒子が点k $(k=0,1,\cdots,10)$にあるとき、点10に達する前に点0に達する確率をx_kとする。ただし、$x_0=1, x_{10}=0$とする。

粒子が点k（$k=1,2,\cdots,9$）にあるとき、粒子は確率0.6で点$k-1$に、確率0.4で点$k+1$に移動し、粒子が点0に達する確率は各々x_{k-1}, x_{k+1}なので、

$$x_k=0.6x_{k-1}+0.4x_{k+1}, \qquad k=1,2,\cdots,9$$

が成立する。式変形すると

$$x_{k+1}-x_k=\frac{3}{2}(x_k-x_{k-1})$$

よって、$x_{k+1}-x_k=\left(\frac{3}{2}\right)^k(x_1-x_0)$ $\cdots$ ①

①は$k=0$のときも成立する。

①の$k=0,1,\cdots,9$の両辺を加えると $x_{10}-x_0=\dfrac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{10}}{1-\frac{3}{2}}(x_1-x_0)$ $\cdots$ ②

①の$k=0,1,\cdots,5$の両辺を加えると $x_6-x_0=\dfrac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{6}}{1-\frac{3}{2}}(x_1-x_0)$ $\cdots$ ③

②、③より $x_6-x_0=\dfrac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{6}}{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{10}}(x_{10}-x_0)$

$x_0=1, x_{10}=0$なので、

$$x_6=1-\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{6}}{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{10}}=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{6}-\left(\frac{3}{2}\right)^{10}}{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{10}}=\frac{9\cdot 6^4-3^{10}}{2^{10}-3^{10}}=\frac{47385}{58025}=0.8166\cdots$$

よって、解答は　（F）

（2）

題意より、

$$P\{X_1=0\}=P\{X_1=0,X_2=0\}+P\{X_1=0,X_2=1\}$$
$$=\frac{(N-n)(N-n-1)}{N(N-1)}+\frac{n(N-n)}{N(N-1)}$$
$$=\frac{N-n}{N}$$

$$P\{X_1=1\}=P\{X_1=1,X_2=0\}+P\{X_1=1,X_2=1\}$$
$$=\frac{n(N-n)}{N(N-1)}+\frac{n(n-1)}{N(N-1)}$$
$$=\frac{n}{N}$$

であるから、X_1の平均、分散はそれぞれ

$$E(X_1)=0\cdot P\{X_1=0\}+1\cdot P\{X_1=1\}$$
$$=\frac{n}{N}$$

$$V(X_1)=E(X_1^2)-\{E(X_1)\}^2$$
$$=0^2\cdot P\{X_1=0\}+1^2\cdot P\{X_1=1\}-\frac{n^2}{N^2}$$
$$=\frac{n(N-n)}{N^2}$$

である。

同様に、$E(X_2)=\frac{n}{N}$, $V(X_2)=\frac{n(N-n)}{N^2}$である。

また、

$$E(X_1X_2)=0\cdot 0\cdot P\{X_1=0,X_2=0\}+0\cdot 1\cdot P\{X_1=0,X_2=1\}$$
$$+1\cdot 0\cdot P\{X_1=1,X_2=0\}+1\cdot 1\cdot P\{X_1=1,X_2=1\}$$
$$=\frac{n(n-1)}{N(N-1)}$$

であるから、X_1とX_2の相関係数$R(X_1,X_2)$は、

$$R(X_1,X_2)=\frac{E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)}{\sqrt{V(X_1)}\sqrt{V(X_2)}}$$
$$=\frac{\frac{n(n-1)}{N(N-1)}-\frac{n}{N}\times\frac{n}{N}}{\sqrt{\frac{n(N-n)}{N^2}}\times\sqrt{\frac{n(N-n)}{N^2}}}$$
$$=-\frac{1}{N-1}$$

である。よって、解答は　①　(D)　②　(H)　③　(A)

（3）

まず、確率変数$X=\min(T_1,\cdots,T_n)$の確率密度関数$f(t)$を求める。

$$
\begin{aligned}
P(X\le t)&=1-P(X>t)\\
&=1-P\{\min(T_1,T_2,\cdots,T_n)>t\}\\
&=1-P(T_1>t,T_2>t,\cdots,T_n>t)\\
&=1-P(T_1>t)P(T_2>t)\cdots P(T_n>t)\\
&=1-\{P(T_i>t)\}^n
\end{aligned}
$$

ここで、確率変数T_i（$i=1,\cdots,n$）は互いに独立でともに平均１の指数分布に従うことから、

$$
\begin{aligned}
P(T_i>t)&=\int_t^\infty e^{-z}dz\\
&=\left[-e^{-z}\right]_t^\infty\\
&=e^{-t}
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
P(X\le t)&=1-\left(e^{-t}\right)^n\\
&=1-e^{-nt}
\end{aligned}
$$

となり、$f(t)$は次のとおり求められる。

$$
\begin{aligned}
f(t)&=\frac{d}{dt}(1-e^{-nt})\\
&=ne^{-nt}\quad(t>0)
\end{aligned}
$$

積率母関数$M_X(\theta)$は$f(t)$を用いて計算できる。

$$
\begin{aligned}
M_X(\theta)&=E\left(e^{\theta X}\right)\\
&=\int_0^\infty f(t)\cdot e^{\theta t}dt\\
&=\int_0^\infty ne^{-nt}\cdot e^{\theta t}dt\\
&=\left[\frac{-n}{n-\theta}\cdot e^{-(n-\theta)t}\right]_0^\infty\\
&=\frac{n}{n-\theta}\quad(\theta<n)
\end{aligned}
$$

また、$M'_X(\theta)=\dfrac{n}{(n-\theta)^2}$、$M''_X(\theta)=\dfrac{2n}{(n-\theta)^3}$

であるから、

$$V(X) = M''_X(0) - \{M'_X(0)\}^2$$

$$= \frac{2}{n^2} - \left(\frac{1}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n^2}$$

よって解答は　①　(D)　②　(H)　③　(A)　④　(E)

（4）

$A=Z^2, B=X^2+Y^2$ とおくと、A,B は負の値をとらず、$U=\dfrac{2Z^2}{X^2+Y^2}=\dfrac{2A}{B}$

$u=\dfrac{2a}{b}, v=b$ とおけば、この変換は ab 平面の $a>0,b>0$ なる部分（第１象限）を uv 平面の $u>0,v>0$

なる部分に移す１対１の変換である。$a=\dfrac{uv}{2}, b=v$ より $\dfrac{\partial(a,b)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{v}{2} & \dfrac{u}{2}\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\dfrac{v}{2}$

また、$A=Z^2$ および $B=X^2+Y^2$ は互いに独立でそれぞれ自由度1，2の χ^2－分布に従うので、確率密度関数はそれぞれ

$$g(a)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}a^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{a}{2}} & (a>0)\\ 0 & (a\leq 0)\end{cases}\qquad h(b)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-\frac{b}{2}} & (b>0)\\ 0 & (b\leq 0)\end{cases}$$

であり、A,B の結合確率密度関数は

$$\varphi(a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}a^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{a+b}{2}} & (a>0,b>0)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

となる。ゆえに、$U=\dfrac{2Z^2}{X^2+Y^2}=\dfrac{2A}{B}, V=B$ の結合確率密度関数は $u>0,v>0$ のとき

$$\phi(u,v)=\varphi(a,b)\left|\frac{\partial(a,b)}{\partial(u,v)}\right|=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{uv}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{v}{2}(1+\frac{u}{2})}\frac{v}{2}=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{v}{2}(1+\frac{u}{2})}$$

また、U,V は負の値をとらないから $u>0,v>0$ でないときは、$\phi(u,v)=0$
よって、U の（周辺）確率密度関数は

$u>0$ のとき $f(u)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\phi(u,v)dv=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}u^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}v^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{v}{2}(1+\frac{u}{2})}dv$

$w=\dfrac{v}{2}\left(1+\dfrac{u}{2}\right)$ とおけば

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}u^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{u}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}\int_0^{\infty}w^{\frac{1}{2}}e^{-w}dw=\frac{1}{2\sqrt{2}}u^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{u}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

（最後の等号で $\displaystyle\int_0^{\infty}w^{\frac{1}{2}}e^{-w}dw=\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いた）

$u<0$ のとき $\phi(u,v)=0$ より $f(u)=0$

よって、解答は　（H）

（別解）

$A=Z^2, B=X^2+Y^2$ とおくと A,B は互いに独立でそれぞれ自由度1，2の χ^2 − 分布に従うので、

$U=\dfrac{2Z^2}{X^2+Y^2}=\dfrac{2A}{B}$ は自由度(1,2)の F − 分布に従い、その確率密度関数は $u\geq 0$ のとき

$$f(u)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)}u^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}u\right)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)}u^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}u\right)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}u^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{u}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

（5）

池の中のN匹の魚のうち50匹に印がついており、N匹の中から20匹とらえたとき、印のついている魚が7匹となる確率は、超幾何分布に従うから、

$$\frac{\binom{50}{7}\cdot\binom{N-50}{20-7}}{\binom{N}{20}}=\frac{\binom{50}{7}\cdot\binom{N-50}{13}}{\binom{N}{20}}$$

である。

これをNについての関数と考えれば、尤度関数は、

$$l(N)=\frac{\binom{50}{7}\cdot\binom{N-50}{13}}{\binom{N}{20}}$$

と表される。

$l(N)$を最大にするNは、Nが整数であることから、

$$\frac{l(N)}{l(N-1)}=\frac{\binom{50}{7}\cdot\binom{N-50}{13}}{\binom{N}{20}}\Bigg/\frac{\binom{50}{7}\cdot\binom{N-1-50}{13}}{\binom{N-1}{20}}=\frac{(N-50)\cdot(N-20)}{(N-63)\cdot N}$$

を考え、

$\dfrac{l(\hat{N})}{l(\hat{N}-1)}>1$ かつ $\dfrac{l(\hat{N}+1)}{l(\hat{N})}<1$ なる関係を満たす整数$\hat{N}$である。

したがって、

$$\frac{(\hat{N}-50)\cdot(\hat{N}-20)}{(\hat{N}-63)\cdot\hat{N}}>1 \text{かつ} \frac{(\hat{N}+1-50)\cdot(\hat{N}+1-20)}{(\hat{N}+1-63)\cdot(\hat{N}+1)}<1$$

であるが、これを変形すると、

$$\frac{50\cdot 20}{7}>\hat{N}>\frac{50\cdot 20}{7}-1$$

ゆえに　$\hat{N}=\left[\dfrac{50\cdot 20}{7}\right]=[142.8\cdots]=142$

よって、解答は　①　（B）　②　（G）　③　（D）　④　（J）　（①②は順不同）

（6）

指数分布に従う母集団からの大きさnの標本$\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$について、母平均$\mu$の信頼係数$1-\alpha/2$の信頼区間は、

$$\frac{2n\overline{\mu}}{\chi^2{}_{2n}(\alpha/2)} \leq \mu \leq \frac{2n\overline{\mu}}{\chi^2{}_{2n}(1-\alpha/2)}、\quad \overline{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

であるから、与えられた数値より、$\overline{\mu}$は

$$\overline{\mu} = \frac{1}{14}\left(700 + 752 + \cdots + 1{,}515 + 1{,}538\right) = 1{,}125.5714$$

となる。

ゆえに、電球の平均寿命μの信頼区間の下限および上限は、次の通りとなる。

$$\frac{2\times 14\times 1{,}125.5714}{\chi^2{}_{2\times 14}(0.05/2)} = \frac{2\times 14\times 1{,}125.5714}{44.4608} = 708.8491$$

$$\frac{2\times 14\times 1{,}125.5714}{\chi^2{}_{2\times 14}(1-0.05/2)} = \frac{2\times 14\times 1{,}125.5714}{15.3079} = 2{,}058.8062$$

よって、解答は　①　（B）　②　（G）

（7）

表の出る確率をpとし、題意から、帰無仮説$H_0 : p = \frac{1}{2}$、対立仮説$H_1 : p = \frac{3}{4}$としたとき、コインを7回投げたときの表の出る回数を確率変数Xとすれば、Xは二項分布に従う。

よって、第1種の誤りのおこる確率は

$P(H_0$が正しいときにH_0を棄却する$)$

$$= P(X \geq 6 \mid p = \frac{1}{2})$$

$$= {}_7C_6(\frac{1}{2})^6(1-\frac{1}{2}) + {}_7C_7(\frac{1}{2})^7$$

$= 0.0625$

また、第2種の誤りのおこる確率は

$P(H_1$が正しいときにH_0を採択する$)$

$$= P(X \leq 5 \mid p = \frac{3}{4})$$

$$= 1 - P(X \geq 6 \mid p = \frac{3}{4})$$

$$= 1 - {}_7C_6(\frac{3}{4})^6(1-\frac{3}{4}) - {}_7C_7(\frac{3}{4})^7$$

$= 0.5551$

よって、解答は　①　（C）　②　（G）

（8）

（ア）帰無仮説$H_0 : p = 0.9$、対立仮説$H_1 : p < 0.9$とする。

$\hat{p} = \dfrac{41}{50} = 0.82$なので、

$|u| = \dfrac{|0.82 - 0.9|}{\sqrt{0.1 \cdot 0.9}} \cdot \sqrt{50} = 1.8856 > u(0.05) = 1.645$　であるので、帰無仮説は棄却される。

すなわち、成功率が通常と比べて低かったといえる。

（イ）帰無仮説$H_0 : p = 0.9$、対立仮説$H_1 : p \neq 0.9$とする。

$\hat{p} = \dfrac{102}{120} = 0.85$なので、

$|u| = \dfrac{|0.85 - 0.9|}{\sqrt{0.1 \cdot 0.9}} \cdot \sqrt{120} = 1.8257 < u(0.025) = 1.96$　であるので、帰無仮説は採択される。

すなわち、「成功率は通常と比べて変化があった」とはいえない。

（ウ）帰無仮説$H_0 : p = 0.9$、対立仮説$H_1 : p < 0.9$とする。

$n = 5$、$k = 4$なので、精密法を適用する。

$n_1' = 2(k+1) = 10, n_2' = 2(n-k) = 2$であり、

$F_0 = \dfrac{n_2' p}{n_1'(1-p)} = \dfrac{2 \cdot 0.9}{10 \cdot 0.1} = 1.8 < F_2^{10}(0.05) = 19.4$となるので、帰無仮説は採択される。

すなわち、「成功率が通常と比べて低かった」とはいえない。

よって、解答は　**（D）**

（9）

区間$(0,\theta)$の一様分布に従う母集団からの30個の標本変量を$(X_1,X_2,\cdots,X_{30})$、$2k+1(=n)$個の標本変量を$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_{2k+1})$とする。$(X_1,X_2,\cdots,X_{30})$の標本変量平均を$\overline{X}$、$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_{2k+1})$の中央値を$\tilde{Y}$で表すことにすれば、問題より推定量$2\overline{X}$の分散よりも推定量$2\tilde{Y}$の分散が小さくなる最小の$k$を求めればよい。

・$\overline{X}$の分散

$V[\overline{X}]=\dfrac{\sigma^2}{30}=\dfrac{\theta^2}{360}$、従って$V[2\overline{X}]=\dfrac{\theta^2}{90}$

・$\tilde{Y}$の分散

中央値$\tilde{Y}$の分布を考えると、密度関数$\tilde{f}$は、

$$\tilde{f}(y)=\frac{(2k+1)!}{(k!)^2}\left(\int_0^y\frac{1}{\theta}dt\right)^k\left(\int_y^\theta\frac{1}{\theta}dt\right)^k\frac{1}{\theta}$$

$$=\frac{(2k+1)!}{(k!)^2}\left(\frac{y}{\theta}\right)^k\left(\frac{\theta-y}{\theta}\right)^k\frac{1}{\theta}$$

であるので、

$$E[\tilde{Y}]=\int_0^\theta y\cdot\tilde{f}(y)dy=\frac{(2k+1)!}{(k!)^2}\int_0^\theta\left(\frac{y}{\theta}\right)^{k+1}\left(\frac{\theta-y}{\theta}\right)^k dy$$

部分積分により、

$$\int_0^\theta\left(\frac{y}{\theta}\right)^{k+1}\left(\frac{\theta-y}{\theta}\right)^k dy=\frac{\theta}{2}\cdot\frac{(k!)^2}{(2k+1)!}$$

なので、$E[\tilde{Y}]=\dfrac{(2k+1)!}{(k!)^2}\cdot\dfrac{\theta}{2}\cdot\dfrac{(k!)^2}{(2k+1)!}=\dfrac{\theta}{2}$である。また、

$$V[\tilde{Y}]=\int_0^\theta y^2\cdot\tilde{f}(y)dy-\left(\frac{\theta}{2}\right)^2$$

$$=\frac{(2k+1)!}{(k!)^2}\theta\int_0^\theta\left(\frac{y}{\theta}\right)^{k+2}\left(\frac{\theta-y}{\theta}\right)^k dy-\left(\frac{\theta}{2}\right)^2$$

部分積分により、

$$\int_0^\theta\left(\frac{y}{\theta}\right)^{k+2}\left(\frac{\theta-y}{\theta}\right)^k dy=\frac{\theta}{2}\cdot\frac{k+2}{2k+3}\cdot\frac{(k!)^2}{(2k+1)!}$$

を得るから、

$$V\left[\tilde{Y}\right]=\frac{(2k+1)!}{(k!)^2}\theta\cdot\frac{\theta}{2}\cdot\frac{k+2}{2k+3}\cdot\frac{(k!)^2}{(2k+1)!}-\left(\frac{\theta}{2}\right)^2$$

$$=\frac{\theta^2}{2}\left(\frac{k+2}{2k+3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\theta^2}{8k+12}$$

よって、$V\left[2\tilde{Y}\right]=\dfrac{\theta^2}{2k+3}$

・推定量の分散の比較

推定量$2\overline{X}$よりも推定量$2\tilde{Y}$が有効であるためには$\dfrac{\theta^2}{90}>\dfrac{\theta^2}{2k+3}$、すなわち$2k+3>90$。これを満たす最小の$k$は44、従って89個以上の標本値の中央値をとればよい。

よって、解答は　（G）

（１０）

Y_t の$MA(\infty)$表現を

$$Y_t = \mu + \xi_0 \varepsilon_t + \xi_1 \varepsilon_{t-1} + \xi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots$$

とすると、

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$= \phi_0 + \phi_1 \left(\mu + \xi_0 \varepsilon_{t-1} + \xi_1 \varepsilon_{t-2} + \xi_2 \varepsilon_{t-3} + \dots\right)$$

$$+ \phi_2 \left(\mu + \xi_0 \varepsilon_{t-2} + \xi_1 \varepsilon_{t-3} + \xi_2 \varepsilon_{t-4} + \dots\right) + \varepsilon_t$$

$$= \left(\phi_0 + \left(\phi_1 + \phi_2\right)\mu\right) + \varepsilon_t + \left(\phi_1 \xi_0\right)\varepsilon_{t-1} + \left(\phi_1 \xi_1 + \phi_2 \xi_0\right)\varepsilon_{t-2} + \left(\phi_1 \xi_2 + \phi_2 \xi_1\right)\varepsilon_{t-3} + \dots$$

したがって、

$$\mu = \frac{\phi_0}{1 - \left(\phi_1 + \phi_2\right)} \quad （\because\ \mu = \phi_0 + \left(\phi_1 + \phi_2\right)\mu）$$

$$\xi_0 = 1$$

$$\xi_1 = \phi_1$$

$$\xi_i = \phi_1 \xi_{i-1} + \phi_2 \xi_{i-2} \quad （i \geq 2）$$

ここで

$$\phi_0 = 0.09, \phi_1 = 0.6, \phi_2 = -0.05$$

であるから
$\mu = 0.2$
である。

また、

$$\xi_0 = 1, \xi_1 = 0.6, \quad \xi_i = 0.6\xi_{i-1} - 0.05\xi_{i-2} \ （i \geq 2）$$

ここで、$i \geq 2$ において$\xi_i = 0.6\xi_{i-1} - 0.05\xi_{i-2}$を変形すると

$$\xi_i - 0.5\xi_{i-1} = 0.1\left(\xi_{i-1} - 0.5\xi_{i-2}\right) \quad \cdots①$$

$$\xi_i - 0.1\xi_{i-1} = 0.5\left(\xi_{i-1} - 0.1\xi_{i-2}\right) \quad \cdots ②$$

を得る。①式、②式より

$$\xi_i - 0.5\xi_{i-1} = 0.1^{i-1}\left(\xi_1 - 0.5\xi_0\right) = 0.1^i$$

$$\xi_i - 0.1\xi_{i-1} = 0.5^{i-1}\left(\xi_1 - 0.1\xi_0\right) = 0.5^i$$

であるから、

$$0.4\xi_{i-1} = 0.5^i - 0.1^i$$

である。
したがって、$i \geq 1$において

$$\xi_i = \frac{1}{0.4}\left(0.5^{i+1} - 0.1^{i+1}\right) \quad \cdots ③$$

である。
③式は$i = 0$でも成立する。

よって、解答は　①　(B)　②　(D)　③　(E)　④　(A)

（１１）

$X_1+X_2=(X_2-X_1)+2X_1$で、X_2-X_1, X_1は互いに独立な標準正規分布なので
正規分布の再生性より$X_1+X_2 \sim N(0,5)$

$$P(X_1+X_2>0)=\frac{1}{2}$$

$$E(X_1, X_1+X_2>0)=E(X_1,(X_2-X_1)+2X_1>0)=\iint_{y+2x>0} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dxdy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}\left(\int_{-\frac{y}{2}}^{\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{5}{8}y^2}dy=\frac{1}{2\pi}\frac{2\sqrt{2\pi}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{2}{5\pi}}$$

$$E(X_1 \mid X_1+X_2>0)=\frac{E(X_1, X_1+X_2>0)}{P(X_1+X_2>0)}=2\sqrt{\frac{2}{5\pi}}$$

よって、解答は　①　(A)　　②　(F)　　③　(E)

（１２）

$g(x)=e^{-2x}$ とし、U を区間 $(0,1)$ の一様分布に従う確率変数とすると、

$$E(g(U))=\int_0^1 e^{-2x}dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1=\frac{1-e^{-2}}{2}$$

$$E\left(g(U)^2\right)=\int_0^1 e^{-4x}dx=\left[-\frac{1}{4}e^{-4x}\right]_0^1=\frac{1-e^{-4}}{4}$$

$$V(g(U))=E\left(g(U)^2\right)-(E(g(U)))^2=\frac{1-e^{-4}}{4}-\left(\frac{1-e^{-2}}{2}\right)^2=\frac{e^{-2}\left(-e^{-2}+1\right)}{2}$$

であるから、$U_1,U_2,\cdots,U_{2M}$ の $2M$ 個の一様乱数を用いてモンテカルロシミュレーションをした場合の誤差の分散は、

$$V\left(\frac{1}{2M}\sum_{i=1}^{2M}g(U_i)\right)=\frac{V(g(U))}{2M}=\frac{e^{-2}\left(-e^{-2}+1\right)}{4M}$$

である。

また、

$$Cov(g(U),g(1-U))=E(g(U)\cdot g(1-U))-E(g(U))\cdot E(g(1-U))=e^{-2}-\left(\frac{1-e^{-2}}{2}\right)^2$$

より、$U_1,U_2,\cdots,U_M,1-U_1,1-U_2,\cdots,1-U_M$ の $2M$ 個の一様乱数を用いた場合の誤差の分散は

$$\begin{aligned}V\left(\frac{1}{2M}\sum_{i=1}^{M}g((U_i)+g(1-U_i))\right)&=\frac{V(g(U)+g(1-U))}{4M}\\&=\frac{V(g(U))+Cov(g(U),g(1-U))}{2M}\\&=\frac{1}{2M}\left\{\frac{e^{-2}\left(-e^{-2}+1\right)}{2}+e^{-2}-\left(\frac{-e^{-2}+1}{2}\right)^2\right\}\\&=\frac{1}{2M}\left(-\frac{3e^{-4}}{4}+2e^{-2}-\frac{1}{4}\right)\end{aligned}$$

である。

よって、解答は　①　（D）　　②　（J）

問題2

（1）まず、$E(R)$をtを用いて表す。

1番目に訪問した会社が提示した年俸X_1がtを超えるか否かの条件により、$g(r)$は条件付き確率密度関数を用いて、次のように表すことができる。

$$g(r)=P(X_1>t)\cdot g(r|X_1>t)+P(X_1\le t)\cdot g(r|X_1\le t)$$

この関係式を用いて$E(R)$を計算すると、

$$\begin{aligned}
E(R) &=\int_{-\infty}^{\infty} rg(r)dr \\
&=\int_{-\infty}^{\infty} r\{\ P(X_1>t)\cdot g(r|X_1>t)+P(X_1\le t)\cdot g(r|X_1\le t)\ \}dr \\
&=P(X_1>t)\cdot\int_{-\infty}^{\infty} rg(r|X_1>t)dr+P(X_1\le t)\cdot\int_{-\infty}^{\infty} rg(r|X_1\le t)dr \\
&=P(X_1>t)\cdot E(R|X_1>t)+P(X_1\le t)\cdot E(R|X_1\le t) \\
&=(1-F(t)\ )\cdot E(R|X_1>t)+F(t)\cdot E(R|X_1\le t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\text{i})
\end{aligned}$$

となる。

いま、$E(R|X_1>t)$について考える。$X_1>t$の場合、1番目に訪問した会社にX_1の年俸で就職することになり、利得はその年俸から1社訪問した費用を控除したものとなる。

よって、

$$E(R|X_1>t)=E(X_1|X_1>t)-c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\text{ii})$$

次に、$E(R|X_1\le t)$について考える。$X_1\le t$の場合、1番目に訪問した会社には就職せず、転職活動は始めからやり直しになるが、1社訪問した費用がかかっているため、その分だけ訪問前に比べて利得が減少する。よって、

$$E(R|X_1\le t)=E(R)-c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\text{iii})$$

よって、（i）、（ii）、（iii）より

$$E(R)=(1-F(t)\ )(\ E(X_1|X_1>t)-c\ )+F(t)(\ E(R)-c\ )$$

これを$E(R)$について解くと、

$$E(R)=E(X_1|X_1>t)-\frac{c}{1-F(t)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(iv)}$$

となる。また、

$$E(X_1|X_1>t)=\int_{-\infty}^{\infty}x\ f(x|X_1>t)\,dx$$

$$=\frac{\int_t^{\infty}xf(x)dx}{1-F(t)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(v)}$$

であることから、（v）を（iv）に代入すると、

$$E(R)=\frac{\int_t^{\infty}xf(x)dx-c}{1-F(t)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(vi)}$$

と表すことができる。

よって、解答は　①　**（E）**　②　**（F）**　③　**（A）**　④　**（E）**　⑤　**（A）**　⑥　**（E）**　⑦　**（G）**　⑧　**（C）**　⑨　**（B）**　⑩　**（G）**　⑪　**（B）**　⑫　**（G）**

（2）次に$E(R)$を最大とするtが満足する関係式を求める。
（vi）の両辺をtで微分すると、

$$\frac{dE(R)}{dt}=\frac{f(t)}{(1-F(t))^2}\left\{-t(1-F(t))+\int_t^{\infty}xf(x)dx-c\right\}$$

よって、$\dfrac{f(t)}{(1-F(t))^2}>0$より、$\dfrac{dE(R)}{dt}=0$となる$t$は

$$-t(1-F(t))+\int_t^{\infty}xf(x)dx-c=0$$

すなわち

$$\int_t^{\infty}(x-t)f(x)dx=c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(vii)}$$

を満足する。

また、$\varphi(t) = -t(1-F(t)) + \int_t^\infty xf(x)dx - c$ とおくと

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -(1-F(t)) + tf(t) - tf(t) = F(t) - 1 < 0$$

より、$\varphi(t)$ はtについて連続な単調減少関数であることがわかり、$\dfrac{f(t)}{(1-F(t))^2} > 0$であることより、

$\dfrac{dE(R)}{dt}$は（vii）を満たすtの前後で、正から負になることが確かめられる。

さらに、$E(R)$および$\dfrac{dE(R)}{dt}$はtについて連続であることから、（vii）を満足するtに対して$E(R)$は最大となる。

いま、X_iがそれぞれ平均$\dfrac{1}{\lambda}$の指数分布に従うとすると、

$$\int_t^\infty (x-t)\lambda e^{-\lambda x}dx = \int_t^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx - t\int_t^\infty \lambda e^{-\lambda x}dx = \left[-xe^{-\lambda x}\right]_t^\infty + \int_t^\infty e^{-\lambda x}dx - t\left[-e^{-\lambda x}\right]_t^\infty$$

$$= te^{-\lambda t} + \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_t^\infty - te^{-\lambda t} = \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}$$

となる。

$$\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t} = c$$

は$c < \dfrac{1}{\lambda}$のときに限り（vii）を満足するtが存在し、

$$t = -\frac{1}{\lambda}\log(\lambda c)$$

となる。

よって、<u>解答は ⑬ （G） ⑭ （A） ⑮ （H） ⑯ （F）</u>

問題3．

（1）

まず（a）について、

積分 $F(k,\lambda)=\int_{\lambda}^{\infty}t^{k}e^{-t}dt$ を1回部分積分すると、

$$F(k,\lambda)=\int_{\lambda}^{\infty}t^{k}e^{-t}dt=\left[-t^{k}e^{-t}\right]_{\lambda}^{\infty}+k\int_{\lambda}^{\infty}t^{k-1}e^{-t}dt=\lambda^{k}e^{-\lambda}+k\cdot F(k-1,\lambda)$$

さらに k 回部分積分を繰り返すことにより

$$F(k,\lambda)=\lambda^{k}e^{-\lambda}+k\lambda^{k-1}e^{-\lambda}+k(k-1)\lambda^{k-2}e^{-\lambda}+\cdots+k!e^{-\lambda}=\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!}\lambda^{i}e^{-\lambda}=k!\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^{i}e^{-\lambda}}{i!}$$

となり、X を平均 λ のポアソン分布にしたがう確率変数とした場合、

$$F(k,\lambda)=k!\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^{i}e^{-\lambda}}{i!}=k!\times P(X\leq k)$$

となる。

次に（b）について、

積分 $F(k,\lambda)=\int_{\lambda}^{\infty}t^{k}e^{-t}dt$ において、$t=\dfrac{y}{2}$ として変換すると、

$$F(k,\lambda)=\int_{\lambda}^{\infty}t^{k}e^{-t}dt=\int_{2\lambda}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{y}{2}\right)^{k}e^{-\frac{y}{2}}dy$$

である。

ここで、自由度 ϕ の χ^{2} 分布の確率密度関数（$y\geq 0$）は、

$$\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{\phi}{2}\right)}\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{\phi}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}$$

であり、$\phi=2(k+1)=2k+2$ とすると、

$$\frac{1}{2\Gamma(k+1)}\left(\frac{y}{2}\right)^{k}e^{-\frac{y}{2}}$$

となる。

したがって、$F(k,\lambda)$ は、

$$F(k,\lambda)=\int_{2\lambda}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{y}{2}\right)^{k}e^{-\frac{y}{2}}dy=\Gamma(k+1)\times\int_{2\lambda}^{\infty}\frac{1}{2\Gamma(k+1)}\left(\frac{y}{2}\right)^{k}e^{-\frac{y}{2}}dy$$

$$= \Gamma(k+1) \times \int_{2\lambda}^{\infty} \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{\phi}{2}\right)} \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{\phi}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} dy$$

と表される。

すなわち、Y を自由度ϕのχ^2分布にしたがう確率変数とした場合、

$F(k,\lambda) = \Gamma(k+1) \times P(Y \geq 2\lambda)$　（$\lambda > 0$）

となる。

以上の(a)(b)より、$k! \times P(X \leq k) = \Gamma(k+1) \times P(Y \geq 2\lambda)$となる。

よって、

$$\frac{k!}{\Gamma(k+1)} \cdot P(X \leq k) = P(Y \geq 2\lambda)$$

となる。またkは自然数であることから、$\Gamma(k+1) = k!$であるため、

$1 \cdot P(X \leq k) = P(Y \geq 2\lambda)$　　($m = 1$である)

となる。

よって、解答は　①　（F）　②　（B）　③　（G）　④　（C）　⑤　（E）　⑥　（F）　⑦　（F）　⑧　（H）

（2）

題意より、ロットの不良率をpとし、サンプルの大きさをnとすれば、このn個の中の不良品数は、平均npのポアソン分布に従うと考えてよい。

n個のサンプルを抽出してこの中に見い出された不良品がc個以下のとき、このロットを合格とすることにする。ロットの合格する確率$L(p)$は、Uを平均npのポアソン分布にしたがう確率変数とした場合、

$L(p) = P(U \leq c)$

と表される。

ここで、（1）で導いたポアソン分布とχ^2分布の関係を利用すると、

Vを自由度$\varphi = 2(c+1) = 2c+2$のχ^2分布の確率分布に従うとした場合、

$L(p) = P(U \leq c) = P(V \geq 2np)$

と表される。

すなわち、$2np = \chi_{\varphi}^{2}\{L(p)\}$（自由度$\varphi$の$\chi^2$分布の上側$L(p)$点）という関係式が示される。

次に、この関係式を用いて、次の条件（ア）（イ）を満たすnとcを求める。

（ア）不良率2%のロットがまちがえて不合格とされる確率を5%

（イ）不良率5%のロットが合格となってしまう確率を10%

（ア）より、不良率 $p=2\%$ のロットの合格する確率 $L(0.02)$ は、$1-0.05=0.95$ であり、関係式は、

$$2np=2n\times0.02=\chi_\varphi{}^2\{L(0.02)\}=\chi_\varphi{}^2\{0.95\}\quad\cdot\cdot\cdot\text{（ア式）}$$

となる。
また、（イ）より、不良率 $p=5\%$ のロットが合格する確率 $L(0.05)$ は、0.10 であり、関係式は、

$$2np=2n\times0.05=\chi_\varphi{}^2\{L(0.05)\}=\chi_\varphi{}^2\{0.10\}\quad\cdot\cdot\cdot\text{（イ式）}$$

となる。
よって、（ア式）と（イ式）より、

$$2.5\times\chi_\varphi{}^2\{0.95\}=\chi_\varphi{}^2\{0.10\}\qquad\cdot\cdot\cdot\text{（ウ式）}$$

が成立する。

このとき、$\chi_\varphi{}^2\{\varepsilon\}$ 表より、（ウ式）を満たす φ を求めると、

$\varphi=2(c+1)=22$ となる。（なお $\chi_\varphi{}^2\{0.10\}=30.8133$、$\chi_\varphi{}^2\{0.95\}=12.3380$ である。）

したがって、$c=10$ となる。
このとき（ア式）から、$n=308.450$、（イ式）から $n=308.133$ であり、$n=308$ となる。

また、この n と c に対して、合格する確率が50％となるロットの不良率は、
$L(p)=0.5$ から「χ^2 分布の上側 ε 点」表を用いることで、

$\chi_\varphi{}^2\{L(p)\}=\chi_\varphi{}^2\{0.5\}=21.3370$ であり、

$2np=2\times308\times p=21.3370$ であるため、
$p=0.034637\cdots$ となる。
すなわち、合格率が50％となる不良率は3.5％となる。

よって、解答は ⑨ （E） ⑩ （A） ⑪ （D） ⑫ （B） ⑬ （D） ⑭ （G） ⑮ （E） ⑯ （C） ⑰ （G） ⑱ （C）

以上