損保数理 （問題）

特に断りがないかぎり、各クレームは独立であるものとする。なお、必要な場合はe＝2.718として計算すること。

問題１.

次の(1)から(10)について、それぞれ選択肢の中から正しい答えを一つ選んで、マークシートの所定の欄にマークせよ。 (70点)

(1) ある保険商品の予定料率構成割合は下表のとおりであり、予定社費率に対応する社費のうち半分は契約条件により増減することはなく、残りの半分が保険金支払件数に比例するものになっている。ただし、代理店手数料と利潤は営業保険料に比例するものとする。

予定損害率	50%
予定社費率	30%
代理店手数料率	15%
予定利潤率	5%

また、この保険商品のクレーム額Xが以下の確率密度関数で表せることがわかっている。

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{8\pi x}}\exp\left(-\frac{(\log x+2)^2}{8}\right) \quad (x>0)$$

この保険商品に、フランチャイズ方式の免責金額e^{-1}を導入した場合、営業保険料の割引率に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、必要な場合は次の数表を用いよ。

標準正規分布の上側ε点：$u(\varepsilon)$

ε	0.309	0.159	0.067	0.023
$u(\varepsilon)$	0.500	1.000	1.500	2.000

（A） 5.0%　（B） 7.5%　（C） 10.0%　（D） 12.5%　（E） 15.0%
（F） 17.5%　（G） 20.0%　（H） 22.5%　（I） 25.0%　（J） 27.5%

(2)　ある保険会社では、年間クレーム総額が、

○クレーム件数の平均が $\lambda=3$

○クレーム額 X の分布が $\mathrm{P}(X=k)=\begin{cases}0.3 & (k=1)\\ 0.5 & (k=2)\\ 0.2 & (k=3)\end{cases}$

の複合ポアソン分布に従うポートフォリオを引き受けている。

このとき、この保険会社がエクセスポイント $d=5$ のストップロス再保険カバー（カバーリミットの設定は行わない）を購入した場合のネット再保険料に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A） 0.70　（B） 0.91　（C） 1.03　（D） 1.20　（E） 1.37

（F） 1.51　（G） 1.73　（H） 1.86　（I） 1.99　（J） 2.11

(3)　ある契約集団で1年間に発生するクレーム件数がパラメータ Θ のポアソン分布に従い、また Θ の確率密度関数が以下のとおりであることがわかっている。

$$g_{\Theta}(\mu)=\frac{t^{s}e^{-t\mu}\mu^{s-1}}{\Gamma(s)}\qquad(\mu\geq 0)$$

ここで、この契約集団の契約件数が c 倍になったとき、1年間に発生するクレーム件数 X の確率関数は、$f(x)=\binom{k+x-1}{x}p^{k}(1-p)^{x}\qquad(x=0,1,2,\cdots)$ となる。

①正しい k は次の選択肢のうちのどれか。

（A） s　（B） t　（C） c　（D） $\frac{1}{t}$　（E） $\frac{1}{s}$　（F） $\frac{1}{st}$　（G） cs　（H） ct　（I） $\frac{c}{t}$　（J） $\frac{c}{s}$

②正しい p は次の選択肢のうちのどれか。

（A） $\frac{1}{1+s}$　（B） $\frac{1}{1+t}$　（C） $\frac{c}{1+s}$　（D） $\frac{c}{1+t}$　（E） $\frac{s}{1+s}$

（F） $\frac{t}{1+t}$　（G） $\frac{cs}{1+s}$　（H） $\frac{ct}{1+t}$　（I） $\frac{1}{1+cs}$　（J） $\frac{1}{1+ct}$

(4) ある契約集団において、契約者ごとのクレーム件数を過去１年間観察したところ、下表の結果が得られた。

クレーム件数	0件	1件	2件	3件	4件
契約件数の割合	35%	30%	20%	10%	5%

契約者のクレーム件数はポアソン分布に従い、また、契約者ごとにポアソン分布のパラメータは異なるものとする。過去１年間のクレーム件数に応じて、来年のクレーム件数をBühlmannモデルで決定する場合、信頼度Zが0.125以上となるために、契約集団の契約件数が満たすべき必要十分な条件は、[①]件[②]である。

①に入る値および②に入る単語は、それぞれの選択肢のうちのどれか。なお、この契約集団全体の事故件数の期待値と分散については、上表の実績データを用いた標本平均および不偏分散をそれぞれの推定値として使用する。

〔①の選択肢〕

（A） 80 （B） 100 （C） 120 （D） 140 （E） 160

（F） 180 （G） 200 （H） 220 （I） 240 （J） 260

〔②の選択肢〕

（A） 以上 （B） 以下

(5) ある保険会社では、次の割増引制度を実施している。新規契約者は等級３からスタートし、１年間無事故なら等級は１つ加算、事故が１件なら等級は１つ減算、事故が２件以上なら等級は２つ減算される。等級は１から６までである。なお、等級６で無事故の場合と、等級１で事故が１件以上の場合は据え置かれ、等級２で事故が２件以上の場合は等級１となる。

等級	等級１	等級２	等級３	等級４	等級５	等級６
割増引	30%割増	15%割増	割増引なし	10%割引	20%割引	30%割引

・１年間無事故の確率は0.6、事故が１件起こる確率は0.3、２件以上起こる確率は0.1である。

将来的にこのポートフォリオが定常状態に達した際の平均割増引率は[①]%[②]である。

①に入る値で最も近いものおよび②に入る単語は、それぞれの選択肢のうちのどれか。なお、途中の計算で端数処理をする場合は、全て小数点以下第４位を四捨五入して小数点以下第３位までの数値を用いることとする。

〔①の選択肢〕

（A） 7.4 （B） 7.6 （C） 7.8 （D） 8.0 （E） 8.2

（F） 8.4 （G） 8.6 （H） 8.8 （I） 9.0 （J） 9.2

〔②の選択肢〕

（A） 割増 （B） 割引

(6) ある保険種目のクレームに関する実績データが以下のように与えられているとする。

◆ 第1経過年度

	受付件数	支払件数	無責・放棄件数
第1事故年度	20	9	3
第2事故年度	27	11	4

◆ 第2経過年度

	受付件数	支払件数	無責・放棄件数
第1事故年度	10	12	4
第2事故年度	8	10	6

ただし、当該保険種目におけるクレーム報告は2年間で全て終了し、また、無責・放棄は第3経過年度以降は発生しないものとする。

◆ 第3事故年度の総事故件数（＝総受付件数－総無責・放棄件数）は過去統計に基づいて、20件と推定し、これを採用する。

ここで、以下のような実績ロスディベロップメント（経過年度ごとに累計された支払額が記載されている）が与えられた場合、第3事故年度の第3経過年度中の単年度のクレームコスト期待値を分離法を用いて算出したとき、最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

なお、「事故件数」は「受付件数」から「無責・放棄件数」を控除したものとし、事故年度ごとの総事故件数で除することにより単位ロスディベロップメントを求めるものとする。なお、途中の計算で端数処理をする場合は、全て小数点以下第3位を四捨五入して小数点以下第2位までの数値を用いることとする。

	第1経過年度	第2経過年度	第3経過年度
第1事故年度	320	732	852
第2事故年度	392	897	
第3事故年度	285		

（A） 95　（B） 99　（C） 103　（D） 107　（E） 111
（F） 115　（G） 119　（H） 123　（I） 127　（J） 131

(7) あるポートフォリオは、年間クレーム件数Nが平均10、分散12の確率分布に従い、クレーム額分布が平均1億円の指数分布に従っている。

このポートフォリオに、カバーリミットβ億円の超過損害額再保険特約を設定する際、再保険適用後の年間クレーム総額（単位：億円）の標準偏差が4を下回ることを条件とした。

エクセスポイントα億円の設定にあたり、この条件は下記のとおり表すことができる。①から⑤に入るものは、選択肢のうちのどれか（ただし同じ記号を用いてもよい）。

$$\left(\boxed{①}-1\right)^2\times e^{-2\alpha}+\boxed{②}\times\left(5\alpha+\boxed{③}\right)\times\left(\boxed{④}-1\right)\times e^{-\alpha}+\boxed{⑤}<0 \quad （ただし\alpha>0）$$

（A） β　（B） e^{β}　（C） $e^{-\beta}$　（D） $e^{2\beta}$　（E） $e^{-2\beta}$
（F） $\log\beta$　（G） 2　（H） 3　（I） 6　（J） 9

(8)　全損失効時には当該保険年度末の払戻積立金にαを乗じた額を返す積立保険の年払積立保険料として正しいものは、選択肢のうちのどれか。ただし、全損失効は保険年度末に発生するものとする。なお、満期返戻金をW、保険期間をn年、予定利率をi、現価率を$v\left(=\dfrac{1}{1+i}\right)$、予定契約消滅率を$q$とする。

（A）$W \times \left[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v\right]^n \times \dfrac{1-\left[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v\right]}{1-\left[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v\right]^n}$

（B）$W \times \left[\{1-q\}\times v\right]^n \times \dfrac{1-\left[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v\right]}{1-\left[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v\right]^n}$

（C）$W \times \left[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v\right]^n \times \dfrac{1-\left[\{1-q\}\times v\right]}{1-\left[\{1-q\}\times v\right]^n}$

（D）$W \times \left[\{1-q\}\times v\right]^n \times \dfrac{1-\left[\{1-q\}\times v\right]}{1-\left[\{1-q\}\times v\right]^n}$

（E）$W \times \left[\{1-\alpha\cdot q\}\times v\right]^n \times \dfrac{1-\left[\{1-\alpha\cdot q\}\times v\right]}{1-\left[\{1-\alpha\cdot q\}\times v\right]^n}$

（F）$W \times \left[\{1-q\}\times v\right]^n \times \dfrac{1-\left[\{1-\alpha\cdot q\}\times v\right]}{1-\left[\{1-\alpha\cdot q\}\times v\right]^n}$

（G）$W \times \left[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v\right]^n \times \dfrac{1-\left[\{1-\alpha\cdot q\}\times v\right]}{1-\left[\{1-\alpha\cdot q\}\times v\right]^n}$

（H）$W \times \left[\{1-\alpha\cdot q\}\times v\right]^n \times \dfrac{1-\left[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v\right]}{1-\left[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v\right]^n}$

（I）$W \times \left[\{1-\alpha\cdot q\}\times v\right]^n \times \dfrac{1-\left[\{1-q\}\times v\right]}{1-\left[\{1-q\}\times v\right]^n}$

（J）$W \times \left[\{1-(1+\alpha)\cdot q\}\times v\right]^n \times \dfrac{1-\left[\{1-(1+\alpha)\cdot q\}\times v\right]}{1-\left[\{1-(1+\alpha)\cdot q\}\times v\right]^n}$

(9) ある保険会社の自動車保険の料率は、年齢(A歳未満かA歳以上)と地域(B地域かC地域)の二つの危険標識で複合的に区分されている。この自動車保険に関するある年度の実績統計が下表のとおりであったとして、これに基づきクレームコストの分析を行うこととする。

＜経過台数　E_{ij} ＞

	B地域	C地域	計
A歳未満	$E_{11}=5$	$E_{12}=10$	$E_{1\bullet}=15$
A歳以上	$E_{21}=65$	$E_{22}=20$	$E_{2\bullet}=85$
計	$E_{\bullet 1}=70$	$E_{\bullet 2}=30$	$E_{\bullet\bullet}=100$

＜クレーム総額　C_{ij} ＞

	B地域	C地域	計
A歳未満	$C_{11}=15$	$C_{12}=45$	$C_{1\bullet}=60$
A歳以上	$C_{21}=585$	$C_{22}=200$	$C_{2\bullet}=785$
計	$C_{\bullet 1}=600$	$C_{\bullet 2}=245$	$C_{\bullet\bullet}=845$

この複合リスクの構造が加法型であるものと仮定して、二つの危険標識について料率係数をMinimum　Bias法により求めるとき、地域区分のうち「C地域」に対応する料率係数y_2の値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、年齢区分のうち「A歳未満」に対応する料率係数x_1は、それに対応する実績の相対クレームコスト指数$r_{1\bullet}=\dfrac{C_{1\bullet}/E_{1\bullet}}{C_{\bullet\bullet}/E_{\bullet\bullet}}$に等しいものと仮定する。

なお、途中の計算で端数処理をする場合は、全て小数点以下第4位を四捨五入して小数点以下第3位までの数値を用いることとする。

（A） 0.00　（B） 0.05　（C） 0.10　（D） 0.15　（E） 0.20
（F） 0.25　（G） 0.30　（H） 0.35　（I） 0.40　（J） 0.45

(10) ある保険において、免責金額が0の場合、1契約につき1年間に発生するクレーム件数はパラメータλのポアソン分布に従い、クレーム額は平均μの指数分布に従っているとする。
いま1契約について、m件目までのクレームには免責金額を0、$m+1$件目以降には免責金額をμで設定することとしたとき、この保険の1契約あたりの純保険料を表すものとして正しいものは、選択肢のうちのどれか。

（A） $\mu\cdot\left(1-e^{-\lambda}\right)\cdot\left\{m\cdot(1-e^{-1})+\lambda\cdot e^{-1}\right\}$　（B） $\mu\cdot\left(1-e^{-\lambda}\right)\cdot\left\{m\cdot(e-1)+\lambda\cdot e\right\}$
（C） $\mu\cdot\left(1-e^{-\lambda}\right)\cdot\left\{\lambda\cdot(1-e^{-1})+m\cdot e^{-1}\right\}$　（D） $\mu\cdot\left(1-e^{-\lambda}\right)\cdot\left\{\lambda\cdot(e-1)+m\cdot e\right\}$
（E） $\mu\cdot\left(1-e^{-\lambda}\right)\cdot(m+\lambda)\cdot(1-e^{-1})$　（F） $\mu\cdot\left(1-e^{-\lambda}\right)\cdot(m+\lambda)\cdot(e-1)$
（G） $\mu\cdot\left(1-e^{-\lambda}\right)\cdot(m+\lambda)$　（H） $\mu\cdot\left(1-e^{-\lambda}\right)\cdot(m+\lambda)\cdot e$
（I） $\mu\cdot m\cdot\left(1-e^{-\lambda}\right)\cdot(1-e^{-1})$　（J） $\mu\cdot m\cdot\left(1-e^{-\lambda}\right)\cdot(e-1)$

問題２.

ある保険の年間発生保険金はX、Y、Zの料率測定基準に依存しており、純保険料を以下のとおり算出している。

契約者別純保険料 ＝ 基本保険料$\times \alpha \exp\left(\dfrac{X}{\beta}\right)\times Y\times Z$ （α、βは定数）

即ち、$X=10$、$Y=5$、$Z=0.5$の場合、契約者別純保険料は、

基本保険料$\times \alpha \exp\left(\dfrac{10}{\beta}\right)\times 5\times 0.5$

と計算される。なお、X、Y、Zはそれぞれ独立とする。次の各問いについて、それぞれ選択肢の中から正しい答えを一つ選んで、マークシートの所定の欄にマークせよ。（15点）

(1) 契約者ごとのリスク状況によるXが、平均１の指数分布 $f(x)=e^{-x}\ (x\geq 0)$に従っているものとする。

このとき$X_2=\alpha \exp\left(\dfrac{X}{\beta}\right)$の従う分布の確率密度関数は、$\dfrac{\boxed{③}\times\boxed{④}^{\boxed{⑤}}}{\boxed{①}^{\boxed{②}}}$ $(x_2\geq\alpha)$ と表せる。

①から⑤に入るものは次の選択肢のうちのどれか（ただし同じ記号を用いてもよい）。

（A）x_2　（B）$\log x_2$　（C）α　（D）$\alpha+1$　（E）e^{α}
（F）$\log\alpha$　（G）β　（H）$\beta+1$　（I）e^{β}　（J）$\log\beta$

(2) 基本保険料を１とした場合、契約者別純保険料の期待値が6.75となるようにしたい。
$\beta=3$およびY、Zの確率密度関数が以下のとおり与えられた場合、αは次の選択肢のうちのどれか。

$$f(y)=\frac{81}{8y^4}\quad\left(y\geq\frac{3}{2}\right)$$
$$f(z)=\frac{8}{9z^4}\quad\left(z\geq\frac{2}{3}\right)$$

（A）0.25　（B）0.5　（C）0.75　（D）1　（E）1.25
（F）1.5　（G）1.75　（H）2　（I）2.25　（J）2.5

(3) (2)の条件のもと契約者別純保険料Wの確率密度関数は、

$$f(w)=3\times\left(\frac{\boxed{⑦}\times\boxed{⑧}}{\boxed{⑥}}\right)^{\boxed{⑨}}\quad\left(w\geq\boxed{⑩}\right)\text{と表せる。}$$

⑥から⑩に入るものは次の選択肢のうちのどれか（ただし同じ記号を用いてもよい）。

（A）w　（B）w^2　（C）e^{w}　（D）$\log w$　（E）$\log\dfrac{w}{2}$

（F）2　（G）3　（H）4　（I）6　（J）9

問題３.

ある保険商品のクレーム額Xは、以下の確率密度関数に従うことがわかっている。

$$f(x)=\sqrt{\frac{\theta}{2\pi x^3}}\exp\left(-\frac{\theta}{2x}\left(\frac{x-\mu}{\mu}\right)^2\right) \qquad (x>0)$$

この保険商品に対して、保険料率を再設定するために、以下の業務を行うこととする。

Ａ： Xの標本$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$を、実際のクレームデータから収集する。

Ｂ： 最尤法によりパラメータμとθを推定する。

Ｃ： 許容する破産確率を定め、必要な安全割増率を計算する。

次の各問いについて、それぞれ選択肢の中から正しい答えを一つ選んで、マークシートの所定の欄にマークせよ。 (15点)

(1) 以下の等式の①から⑤に入るものは、次の選択肢のうちのどれか（ただし同じ記号を用いてもよい）。

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{(x_j-\mu)^2}{x_j}=\boxed{①}\sum_{j=1}^{n}\left(\boxed{②}-\boxed{③}\right)+\frac{n}{\boxed{④}}\left(\boxed{⑤}-\mu\right)^2$$

（Ａ） 0　（Ｂ） 1　（Ｃ） $\bar{x}$　（Ｄ） x_j　（Ｅ） x_j^2

（Ｆ） $\dfrac{1}{x_j}$　（Ｇ） $\dfrac{1}{\bar{x}}$　（Ｈ） μ　（Ｉ） μ^2　（Ｊ） $\dfrac{1}{\mu}$

ただし、$\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j$ である。

(2) 最尤法により推定される結果として、⑥から⑧に入るものは次の選択肢のうちのどれか（ただし同じ記号を用いてもよい）。

$$\hat{\theta}=\frac{\boxed{⑧}}{\sum_{j=1}^{n}\left(\boxed{⑥}-\boxed{⑦}\right)}$$

（Ａ） 1　（Ｂ） n　（Ｃ） $\sqrt{n}$　（Ｄ） $\bar{x}$　（Ｅ） x_j

（Ｆ） x_j^2　（Ｇ） $\dfrac{1}{x_j}$　（Ｈ） $\dfrac{1}{\bar{x}}$　（Ｉ） $x_j-\bar{x}$　（Ｊ） $(x_j-\bar{x})^2$

(3)　$\hat{\mu}=1.2$ と $\hat{\theta}=1$ が得られた場合、以下の条件のもとで必要な安全割増率は次式のとおり表せる。⑨から⑫に入るものは次の選択肢のうちのどれか（ただし同じ記号を用いてもよい）。

$$\frac{20\left(\exp\left(\frac{1}{\boxed{⑩}}\right)-\boxed{⑪}\right)-\boxed{⑫}}{\boxed{⑨}}$$

【条件】

・期初サープラスを 16、複合ポアソン過程のポアソンパラメータを 10 とする。
・破産確率を e^{-2} まで許容する。
・破産確率は Lundberg の不等式を用いて保守的に近似し、これが許容値以下となるように、必要な安全割増率を定める。

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4　（E）5
（F）6　（G）7　（H）8　（I）9　（J）0

以　上

損保数理（解答例）

問題１．

(1)　（Ｆ）　　（テキスト1-45ページ参照）

純保険料の割引率は、以下の計算から0.067となる。

$$\int_{e^{-1}}^{\infty}\frac{x}{\sqrt{8\pi}x}\exp\left(-\frac{(\log x+2)^2}{8}\right)dx=\int_{\frac{-\log e+2}{2}}^{\infty}\frac{e^{2y-2}}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy=\int_{0.5}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(y-2)^2}{2}\right)dy$$

$$=\int_{-1.5}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz=1-0.067=0.933$$

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x}{\sqrt{8\pi}x}\exp\left(-\frac{(\log x+2)^2}{8}\right)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2y-2}}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(y-2)^2}{2}\right)dy=1$$

また、フランチャイズ免責の導入により、保険金支払が発生しない割合は、

$$\int_{0}^{e^{-1}}\frac{1}{\sqrt{8\pi}x}\exp\left(-\frac{(\log x+2)^2}{8}\right)dx=\int_{-\infty}^{\frac{-\log e+2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{0.5}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy=1-0.309=0.691$$ となる。

従って、

$$1-\frac{0.5\times(1-0.067)+0.15+0.15\times(1-0.691)}{1-0.15-0.05}=0.1714\cdots$$

正解は（Ｆ）。

(2)　（Ｇ）　　（テキスト8-14ページ参照）

求めるべきネット再保険料をPとすると、

$$P=E(S)-d+\sum_{x=0}^{d-1}(5-x)f(x)=\lambda E(X)-5+\sum_{x=0}^{4}(5-x)f(x)$$

（Sは年間クレーム総額、$f(x)$は年間クレーム総額がxとなる確率）

ここで、漸化式　$f(x)=\lambda\sum_{i=1}^{\min(x,3)}\frac{i}{x}p(i)f(x-i)$　（$p(i)$はクレーム1件の額がiとなる確率）を用いて、$f(0)$、$f(1)$、$f(2)$、$f(3)$、$f(4)$を計算する。

年間クレーム総額が0となる確率は、クレーム件数が0件となる確率と等しいので、

$$f(0)=p(0)=e^{-3}$$

以下、漸化式を用いて$f(1)$、$f(2)$、$f(3)$、$f(4)$を計算すると$f(1)=0.9\times e^{-3}$、$f(2)=3.81/2\times e^{-3}$、$f(3)=4.143/2\times e^{-3}$、$f(4)=18.3987/8\times e^{-3}$となる。

よって、求めるべきネット再保険料は以下のとおりとなる。

$$P=\lambda E(X)-5+\sum_{x=0}^{d-1}(5-x)f(x)$$

$$=3\times1.9-5+5f(0)+4f(1)+3f(2)+2f(3)+f(4)$$

$$=1.73$$

正解は(G)。

(3)　①(G)②(F)　(テキスト2-2ページ参照)

$$\int_0^\infty\left(\frac{u^x}{x!}e^{-u}\right)\frac{t}{\Gamma(s)}e^{-t\mu}(t\mu)^{s-1}du=\frac{t^s}{\Gamma(s)x!}\int_0^\infty e^{-(t+1)\mu}\mu^{x+s-1}du$$

$$=\frac{t^s}{(s-1)!x!}\cdot\frac{\Gamma(x+s)}{(t+1)^{x+s}}=\binom{s+x-1}{x}\left(\frac{t}{1+t}\right)^s\left(1-\frac{t}{1+t}\right)^x$$

これは負の二項分布となる。
また、この積率母関数が

$$M(z)=\frac{\left(\frac{t}{1+t}\right)^s}{\left(1-\frac{1}{1+t}e^z\right)^s}$$

となることから、契約件数がc倍になった時のクレーム件数が従う確率関数は、

$$\binom{cs+x-1}{x}\left(\frac{t}{1+t}\right)^{cs}\left(1-\frac{t}{1+t}\right)^x$$

となる。従って、$k=cs\quad p=\frac{t}{1+t}$　となる。

正解は①(G)②(F)。

(4)　①(C)②(B)　(テキスト3-38ページ参照)
契約集団の契約件数をNとし、ポアソン分布の性質を用い、

$$\hat{\mu}=0.35\times0+0.30\times1+0.20\times2+0.1\times3+0.05\times4=1.2$$

$$\hat{\sigma}^2=\left(0.35\times(0-1.2)^2+0.30\times(1-1.2)^2+0.2\times(2-1.2)^2+0.1\times(3-1.2)^2+0.05\times(4-1.2)^2\right)\times\frac{N}{N-1}$$

$$=1.36\times\frac{N}{N-1}$$

$$\hat{v}=\hat{\mu}=1.2$$

$$\hat{\omega}=\hat{\sigma}^2-\hat{\mu}=1.36\times\frac{N}{N-1}-1.2$$

従って信頼度は

$$Z=\frac{1}{1+\frac{\hat{v}}{\hat{\omega}}}=\frac{1}{1+\frac{1.2}{1.36\times\frac{N}{N-1}-1.2}}=\frac{1.36\times\frac{N}{N-1}-1.20}{1.36\times\frac{N}{N-1}}=\frac{0.16N+1.2}{1.36N}$$

題意より、$\frac{0.16N+1.2}{1.36N}\geq0.125$

$N\leq120$

正解は①(C)②(B)。

(5)　①(G) ②(B)　　(テキスト3-8ページ参照)

無事故の確率を p_0、事故が1回起こる確率を p_1、事故が2回以上起こる確率を p_2 とする。

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} & & \text{移動後の等級} & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{c}\text{移}\\\text{動}\\\text{前}\\\text{等}\\\text{級}\end{array} &
\begin{bmatrix}
p_1+p_2 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
p_1+p_2 & 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 \\
p_2 & p_1 & 0 & p_0 & 0 & 0 \\
0 & p_2 & p_1 & 0 & p_0 & 0 \\
0 & 0 & p_2 & p_1 & 0 & p_0 \\
0 & 0 & 0 & p_2 & p_1 & p_0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.4 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\
0.1 & 0.3 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \\
0 & 0.1 & 0.3 & 0 & 0.6 & 0 \\
0 & 0 & 0.1 & 0.3 & 0 & 0.6 \\
0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.3 & 0.6
\end{bmatrix}
$$

上記の推移行列を X とし、y_i を第 i 年度における等級 j の契約件数 y_{ij} を要素に持つベクトル $y_i=[y_{i1}\quad y_{i2}\quad y_{i3}\quad y_{i4}\quad y_{i5}\quad y_{i6}]$、契約者数を a とすると、定常状態では、

$$
\begin{cases}
y_\infty = y_\infty \cdot X \\
y_{\infty 1}+y_{\infty 2}+y_{\infty 3}+y_{\infty 4}+y_{\infty 5}+y_{\infty 6}=a
\end{cases}
$$

上記より、

$$
\begin{cases}
y_{\infty 1}=0.4\cdot y_{\infty 1}+0.4\cdot y_{\infty 2}+0.1\cdot y_{\infty 3} \\
y_{\infty 2}=0.6\cdot y_{\infty 1}+0.3\cdot y_{\infty 3}+0.1\cdot y_{\infty 4} \\
y_{\infty 3}=0.6\cdot y_{\infty 2}+0.3\cdot y_{\infty 4}+0.1\cdot y_{\infty 5} \\
y_{\infty 4}=0.6\cdot y_{\infty 3}+0.3\cdot y_{\infty 5}+0.1\cdot y_{\infty 6} \\
y_{\infty 5}=0.6\cdot y_{\infty 4}+0.3\cdot y_{\infty 6} \\
y_{\infty 6}=0.6\cdot y_{\infty 5}+0.6\cdot y_{\infty 6} \\
y_{\infty 1}+y_{\infty 2}+y_{\infty 3}+y_{\infty 4}+y_{\infty 5}+y_{\infty 6}=a
\end{cases}
$$

これを解いて、$y_\infty=[0.106a\quad 0.123a\quad 0.143a\quad 0.168a\quad 0.184a\quad 0.276a]$

平均割増率は、

$$
\frac{0.106a\times 0.3+0.123a\times 0.15+0.143a\times 0+0.168a\times(-0.1)+0.184a\times(-0.2)+0.276a\times(-0.3)}{a}
$$

$$
=-0.086
$$

正解は①(G) ②(B)。

(6)　(C)　　(テキスト5-30ページ参照)

第1事故年度・第2事故年度の事故件数は、各事故年度における（第1経過年度の受付件数）＋（第2経過年度の受付件数）－（第1経過年度の無責・放棄件数）－（第2経過年度の無責・放棄件数）で計算されるため、23件、25件となる。

ロスディベロップメントを単年度支払に修正すると

	第1経過年度	第2経過年度	第3経過年度
第1事故年度	320	412	120
第2事故年度	392	505	
第3事故年度	285		

となり、さらに、これを単位ロスディベロップメント（事故年度別の事故件数で除したもの）に修正すると

	第1経過年度	第2経過年度	第3経過年度
第1事故年度	13.91	17.91	5.22
第2事故年度	15.68	20.20	
第3事故年度	14.25		

となる。

単位ロスディベロップメントの要素を$\{S_{i,j}\}(0 \le i, j \le 2, i+j=2)$とおくと、テキスト5-31ページ記載の分離法の考え方からパラメータ$\lambda_i(i=0,1,2)$と$r_j(j=0,1,2)$によって$S_{i,j}=\lambda_{i+j}\times r_j$と表すことができる。

パラメータ$\lambda_i(i=0,1,2)$, $r_j(j=0,1,2)$を推定するために、テキスト5-32ページ例5-6のように計算を行うと

$$d_2=\lambda_2(r_0+r_1+r_2)=\lambda_2$$

$$r_2=\frac{v_2}{\lambda_2}$$

$$\lambda_1=\frac{d_1}{r_0+r_1}=\frac{d_1}{1-r_2}$$

$$r_1=\frac{v_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$\lambda_0=\frac{d_0}{r_0}=\frac{d_0}{1-r_1-r_2}$$

$$r_0=\frac{v_0}{\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2}$$

と表せる（ただし、$d_t(t=0,1,2)$は単位ロスディベロップメントの斜めの和で各々$d_0=S_{0,0}$、$d_1=S_{0,1}+S_{1,0}$、$d_2=S_{0,2}+S_{1,1}+S_{2,0}$を表す。また、$v_t(t=0,1,2)$は単位ロスディベロップメントの第t列の和を表す)。

上記連立方程式から$\lambda_i(i=0,1,2)$, $r_j(j=0,1,2)$を求めると

$r_0=0.38$, $r_1=0.49$, $r_2=0.13$, $\lambda_0=36.61$, $\lambda_1=38.61$, $\lambda_2=39.67$

となる。

第3事故年度の第3経過年度の予測損害額を$S_{i,j}$を用いて表すと、$20S_{2,2}=20\lambda_4\times r_2$と書ける。

問題文においてλの将来変化は前提としていないので、λ_4について直近年度の値（λ_2）を使用することにより、$20S_{2,2}=20\lambda_4\times r_2=20\lambda_2\times r_2=0.13\times 39.67\times 20=103.14$

正解は(C)。

(7)　①(C)②(G)③(I)④(C)⑤(H)　(テキスト8-12ページ参照)

正味クレーム額の期待値は、　$\int_0^{\alpha} xe^{-x}dx+\int_{\alpha}^{\alpha+\beta}\alpha e^{-x}dx+\int_{\alpha+\beta}^{\infty}(x-\beta)e^{-x}dx$

$=\left[-xe^{-x}-e^{-x}\right]_0^{\alpha}+\left[-\alpha e^{-x}\right]_{\alpha}^{\alpha+\beta}+\left[-(x-\beta)e^{-x}-e^{-x}\right]_{\alpha+\beta}^{\infty}$

$=-\alpha e^{-\alpha}-e^{-\alpha}+1-\alpha e^{-(\alpha+\beta)}+\alpha e^{-\alpha}+\alpha e^{-(\alpha+\beta)}+e^{-(\alpha+\beta)}=1-e^{-\alpha}+e^{-(\alpha+\beta)}=1-(1-e^{-\beta})e^{-\alpha}$

従って、正味クレーム額の分散は、

$\int_0^{\alpha} x^2e^{-x}dx+\int_{\alpha}^{\alpha+\beta}\alpha^2e^{-x}dx+\int_{\alpha+\beta}^{\infty}(x-\beta)^2e^{-x}dx-(1-e^{-\alpha}+e^{-(\alpha+\beta)})^2$

$=\left[-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}\right]_0^{\alpha}+\left[-\alpha^2e^{-x}\right]_{\alpha}^{\alpha+\beta}+\left[-(x-\beta)^2e^{-x}-2(x-\beta)e^{-x}-2e^{-x}\right]_{\alpha+\beta}^{\infty}-(1-e^{-\alpha}+e^{-(\alpha+\beta)})^2$

$=2-2\alpha e^{-\alpha}-2e^{-\alpha}+2e^{-(\alpha+\beta)}+2\alpha e^{-(\alpha+\beta)}-(1-e^{-\alpha}+e^{-(\alpha+\beta)})^2$

$=1-2\alpha e^{-\alpha}+2\alpha e^{-(\alpha+\beta)}-e^{-2\alpha}-e^{-2(\alpha+\beta)}+2e^{-2\alpha-\beta}$

$=\left(2e^{-\beta}-e^{-2\beta}-1\right)e^{-2\alpha}+\left(2\alpha e^{-\beta}-2\alpha\right)e^{-\alpha}+1$

再保険適用後のクレーム総額の分散は、

$10\left(2e^{-\beta}-e^{-2\beta}-1\right)e^{-2\alpha}+10\left(2\alpha e^{-\beta}-2\alpha\right)e^{-\alpha}+10+12-24(1-e^{-\beta})e^{-\alpha}+12(1-2e^{-\beta}+e^{-2\beta})e^{-2\alpha}$

$=2\left(e^{-\beta}-1\right)^2e^{-2\alpha}+4\left(5\alpha+6\right)\left(e^{-\beta}-1\right)e^{-\alpha}+22$　　となるので、題意を満たす式は

$2\left(e^{-\beta}-1\right)^2e^{-2\alpha}+4\left(5\alpha+6\right)\left(e^{-\beta}-1\right)e^{-\alpha}+22<16$

$\left(e^{-\beta}-1\right)^2e^{-2\alpha}+2\left(5\alpha+6\right)\left(e^{-\beta}-1\right)e^{-\alpha}+3<0$

正解は①(C)②(G)③(I)④(C)⑤(H)。

(8)　(A)　(テキスト6-16ページ参照)

第t保険年度末の払戻積立金を${}_tV$、年払積立保険料を${}_nP$とする。

再帰式より、

$${}_tV\times(1-q)=({}_{t-1}V+{}_nP)\times(1+i)-\alpha\cdot q\cdot{}_tV$$

$${}_tV\times\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v={}_{t-1}V+{}_nP$$

第1保険年度から第n保険年度まで関係式は下記の通りである

$${}_1V\times[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v]={}_0V+{}_nP$$

$${}_2V\times[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v]^2=({}_1V+{}_nP)\times[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v]$$

・・・

$${}_nV\times[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v]^n=({}_1V+{}_nP)\times[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v]^{n-1}$$

加算すると、

$${}_0V+{}_nP\times\left\langle 1+[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v]+[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v]^2+\cdots+[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v]^{n-1}\right\rangle$$
$$={}_nV\times[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v]^n$$

${}_0V=0$、${}_nV=W$より

$${}_nP=W\times[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v]^n\times\frac{1-[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v]}{1-[\{1-(1-\alpha)\cdot q\}\times v]^n}$$

となる

正解は(A)。

(9)　(B)　　(テキスト4-18ページ参照)

リスク区分ごとのクレームコスト$R_{ij}=\dfrac{C_{ij}}{E_{ij}}$　および相対クレームコスト指数　$r_{ij}=\dfrac{R_{ij}}{R_{\bullet\bullet}}$　を計算すると下表のようになる。

<クレームコストR_{ij}>

	B地域	C地域	計
A歳未満	3.000	4.500	4.000
A歳以上	9.000	10.000	9.235
計	8.571	8.167	8.450

<相対クレームコスト指数r_{ij}>

	B地域	C地域	計
A歳未満	0.355	0.533	0.473
A歳以上	1.065	1.183	1.093
計	1.014	0.967	1.000

相対クレームコスト指数の推定値を$\hat{r}_{ij}$としたときに、Minimum　Bias法における満たすべき条件は、次の連立方程式のようになる。

$E_{11}\times(r_{11}-\hat{r}_{11})+E_{12}\times(r_{12}-\hat{r}_{12})=0$

$E_{21}\times(r_{21}-\hat{r}_{21})+E_{22}\times(r_{22}-\hat{r}_{22})=0$

$E_{11}\times(r_{11}-\hat{r}_{11})+E_{21}\times(r_{21}-\hat{r}_{21})=0$

$E_{12}\times(r_{12}-\hat{r}_{12})+E_{22}\times(r_{22}-\hat{r}_{22})=0$

この連立方程式において、$E_{ij}\times(r_{ij}-\hat{r}_{ij})$をそれぞれ変数とみなして求めると

$E_{11}\times(r_{11}-\hat{r}_{11})=E_{22}\times(r_{22}-\hat{r}_{22})=C$

$E_{12}\times(r_{12}-\hat{r}_{12})=E_{21}\times(r_{21}-\hat{r}_{21})=-C$

となる。ここでCは定数とする。

さて、この複合分類リスクの構造が加法型であることから、各相対クレームコスト指数の推定値は料率係数を用いて表すと、次のようになる。

$\hat{r}_{ij}=x_i+y_j \quad (i,j=1,2)$

$x_1+y_1=r_{11}-\dfrac{C}{E_{11}}$

$x_2+y_2=r_{22}-\dfrac{C}{E_{22}}$

$x_1+y_2=r_{12}+\dfrac{C}{E_{12}}$

$x_2+y_1=r_{21}+\dfrac{C}{E_{21}}$

$$\left(r_{11}-r_{12}-r_{21}+r_{22}\right)-\frac{C}{E_{11}}-\frac{C}{E_{12}}-\frac{C}{E_{21}}-\frac{C}{E_{22}}=0$$

$$C=\left(r_{11}-r_{12}-r_{21}+r_{22}\right)/\left(\frac{1}{E_{11}}+\frac{1}{E_{12}}+\frac{1}{E_{21}}+\frac{1}{E_{22}}\right)$$

$$C=-0.164$$

$$x_1=0.473$$

$$y_1=-x_1+r_{11}-C/E_{11}=-0.085$$

$$y_2=-x_1+r_{12}+C/E_{12}=0.044$$

$$x_2=-y_1+r_{21}+C/E_{21}=1.147$$

正解は（B）。

(10) 正解の選択肢なし　(テキスト1-40ページ参照)

本問については、問題文中の選択肢に正解が存在しませんでした。
ここに深くお詫びするとともに、以下に本問で意図していた解法を記載いたします。

クレーム件数を N 、i 件目のクレーム額を $X_i\ (i=1,2,\cdots)$ とする。
免責金額の設定条件から1件あたりの支払保険金は、$i\le m$ の場合 $\left(X_i-\min(X_i,0)\right)$ であり、また、$i>m$ の場合は $\left(X_i-\min(X_i,\mu)\right)$ となる。

よって、題意を満たす純保険料は

$$\sum_{n=1}^{m}E\left[\left(X_1-\min(X_1,0)\right)+\left(X_2-\min(X_2,0)\right)+\cdots\left(X_n-\min(X_n,0)\right)\right]\cdot P(N=n)$$

$$+\sum_{n=m+1}^{\infty}E\left[\left(X_1-\min(X_1,0)\right)+\cdots+\left(X_m-\min(X_m,0)\right)+\left(X_{m+1}-\min(X_{m+1},\mu)\right)+\cdots+\left(X_n-\min(X_n,\mu)\right)\right]\cdot P(N=n)$$

$$\left(\begin{array}{l} E\left[X_i-\min(X_i,0)\right]=\int_0^{\infty}(x_i-0)\cdot\frac{1}{\mu}e^{-\frac{x_i}{\mu}}dx_i=\mu \\ E\left[X_i-\min(X_i,\mu)\right]=\int_{\mu}^{\infty}(x_i-\mu)\cdot\frac{1}{\mu}e^{-\frac{x_i}{\mu}}dx_i=\mu\cdot e^{-1}\end{array}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{m}n\cdot\mu\cdot\Pr(N=n)+\sum_{n=m+1}^{\infty}\left\{m\cdot\mu+(n-m)\cdot\mu\cdot e^{-1}\right\}\times\Pr(N=n)$$

$$\left(\sum_{n=1}^{m}n\cdot\Pr(N=n)=\lambda-\sum_{n=m+1}^{\infty}n\cdot\Pr(N=n)\right)$$

$$=\lambda\cdot\mu-\sum_{n=m+1}^{\infty}n\cdot\mu\times\Pr(N=n)+\sum_{n=m+1}^{\infty}\left\{m\cdot\mu+(n-m)\cdot\mu\cdot e^{-1}\right\}\times\Pr(N=n)$$

$$=\lambda\cdot\mu+\sum_{n=m+1}^{\infty}(n-m)\cdot\mu\cdot\left(e^{-1}-1\right)\cdot\Pr(N=n)$$

と表せる。

問題２.

(1) $\Pr(X_2 < x_2) = \Pr(\alpha \exp\left(\dfrac{X}{\beta}\right) < x_2) = \Pr(X < \beta \log \dfrac{x_2}{\alpha})$

$$= \int_0^{\beta \log \frac{x_2}{\alpha}} e^{-x} dx = 1 - e^{-\beta \log \frac{x_2}{\alpha}} = 1 - \left(\frac{x_2}{\alpha}\right)^{-\beta}$$

この場合、確率密度関数は$\dfrac{d}{dx_2}\left(1-\left(\dfrac{x_2}{\alpha}\right)^{-\beta}\right) = \dfrac{\beta}{\alpha}\left(\dfrac{x_2}{\alpha}\right)^{-\beta-1} = \dfrac{\beta\alpha^{\beta}}{x_2^{\beta+1}}$

正解は①(A) ②(H) ③(G) ④(C) ⑤(G)。

(2) $E\left(\alpha \exp\left(\dfrac{X}{\beta}\right) \times Y \times Z\right) = E\left(\alpha \exp\left(\dfrac{X}{\beta}\right)\right) E(Y) E(Z)$

$$\int_{\alpha}^{\infty} x_2 \frac{\beta\alpha^{\beta}}{x_2^{\beta+1}} dx_2 = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\beta\alpha^{\beta}}{x_2^{\beta}} dx_2 = \frac{\alpha\beta}{\beta-1} = \frac{3\alpha}{2}$$

$$\int_{\frac{3}{2}}^{\infty} y \frac{81}{8y^4} dy = \frac{81}{16}\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{9}{4} = 2.25$$

$$\int_{\frac{2}{3}}^{\infty} y \frac{8}{9y^4} dy = \frac{8}{18}\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = 1$$

従って、$\dfrac{3\alpha}{2} \times \dfrac{9}{4} \times 1 = 6.75$　から、$\alpha = 2$

正解は(H)。

(３) $f(y) = \dfrac{81}{8y^4} = \dfrac{3 \times (\frac{3}{2})^3}{y^{3+1}}$　　$f(z) = \dfrac{8}{9z^4} = \dfrac{3 \times (\frac{2}{3})^3}{z^{3+1}}$　と変形できることと、(1)の結果を利用して

契約者別純保険料$=2\exp\left(\dfrac{X}{3}\right) \times Y \times Z = 2\exp\left(\dfrac{X}{3}\right) \times \dfrac{3}{2}\exp\left(\dfrac{Y_2}{3}\right) \times \dfrac{2}{3}\exp\left(\dfrac{Z_2}{3}\right)$

$=2\exp\left(\dfrac{X+Y_2+Z_2}{3}\right)$　　と変形でき、X, Y_2, Z_2は互いに独立で平均１の指数分布（$=\Gamma(1,1)$）

に従う。したがって、$\dfrac{X+Y_2+Z_2}{3}$　は$\Gamma(3,3)$に従うので、

$$\Pr(2\exp\left(\frac{X+Y_2+Z_2}{3}\right) < w) = \int_0^{\log \frac{w}{2}} \frac{27x^2 e^{-3x}}{2} dx$$

$$\frac{3}{2}\left[-3x^2 e^{-3x} - 2xe^{-3x} - \frac{2}{3}e^{-3x}\right]_0^{\log \frac{w}{2}} = \frac{3}{2}\left[\frac{2}{3} - 3\left(\log \frac{w}{2}\right)^2 e^{-3\log \frac{w}{2}} - 2\log \frac{w}{2} e^{-3\log \frac{w}{2}} - \frac{2}{3} e^{-3\log \frac{w}{2}}\right]$$

よって、

$$\frac{3}{2dw} d\left[\frac{2}{3} - 3\left(\log \frac{w}{2}\right)^2 e^{-3\log \frac{w}{2}} - 2\log \frac{w}{2} e^{-3\log \frac{w}{2}} - \frac{2}{3} e^{-3\log \frac{w}{2}}\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left[-\frac{6}{w}\left(\log \frac{w}{2}\right) e^{-3\log \frac{w}{2}} + \frac{9}{w}\left(\log \frac{w}{2}\right)^2 e^{-3\log \frac{w}{2}} - \frac{2}{w} e^{-3\log \frac{w}{2}} + \frac{6}{w}\log \frac{w}{2} e^{-3\log \frac{w}{2}} + \frac{2}{w} e^{-3\log \frac{w}{2}}\right]$$

$$=\frac{3}{2}\left[\frac{9}{w}\left(\log\frac{w}{2}\right)^2\left(\frac{w}{2}\right)^{-3}\right] \quad =\frac{108}{w^4}\left(\log\frac{w}{2}\right)^2 \quad =3\times\left(\frac{6\log\frac{w}{2}}{w^2}\right)^2 \quad (w\geq 2)$$

正解は⑥（B）⑦（I）⑧（E）⑨（F）⑩（F）。（⑦と⑧は逆になっても正解）

問題３．　　　　(テキスト0-20、7-38ページ参照)

（１） $$\sum_{j=1}^{n}\frac{(x_j-\mu)^2}{x_j}=\sum_{j=1}^{n}\left(x_j-2\mu+\frac{\mu^2}{x_j}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\mu^2}{x_j}-\frac{\mu^2}{\bar{x}}\right)+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\mu^2}{\bar{x}}-2\mu+x_j\right)$$

$$=\mu^2\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{x_j}-\frac{1}{\bar{x}}\right)+\frac{n\mu^2}{\bar{x}}-2n\mu+n\bar{x}\quad=\mu^2\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{x_j}-\frac{1}{\bar{x}}\right)+\frac{n}{\bar{x}}(\bar{x}-\mu)^2$$

<u>正解は①(Ｉ) ②(Ｆ) ③(Ｇ) ④(Ｃ) ⑤(Ｃ)。</u>

(2) $L\propto\theta^{\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{\theta}{2\mu^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{(x_j-\mu)^2}{x_j}\right)$ であるから、

$$\log L\propto\frac{n}{2}\log\theta-\frac{\theta}{2\mu^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{(x_j-\mu)^2}{x_j}=\frac{n}{2}\log\theta-\frac{\theta}{2\mu^2}\left(\mu^2\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{x_j}-\frac{1}{\bar{x}}\right)+\frac{n}{\bar{x}}(\bar{x}-\mu)^2\right)$$

$$=\frac{n}{2}\log\theta-\frac{\theta}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{x_j}-\frac{1}{\bar{x}}\right)-\frac{n\theta}{2\mu^2\bar{x}}(\bar{x}-\mu)^2$$

これをμで偏微分すると

$$-\frac{n\theta}{2\bar{x}}\cdot\frac{-2\mu^2(\bar{x}-\mu)-2(\bar{x}-\mu)^2\mu}{\mu^4}$$ となるので、$\hat{\mu}=\bar{x}$

また、θについて偏微分すると

$$\frac{n}{2\theta}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{x_j}-\frac{1}{\bar{x}}\right)-\frac{n}{2\mu^2\bar{x}}(\bar{x}-\mu)^2$$ となるので、$\hat{\theta}=\dfrac{n}{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{x_j}-\frac{1}{\bar{x}}\right)}$

<u>正解は⑥(Ｇ) ⑦(Ｈ) ⑧ (Ｂ)。</u>

(3) Xの積率母関数は、$M_X(t)=\int_0^\infty\exp(tx)\sqrt{\frac{\theta}{2\pi x^3}}\exp\left(-\frac{\theta}{2x}\left(\frac{x-\mu}{\mu}\right)^2\right)dx$

$$=\int_0^\infty\sqrt{\frac{\theta}{2\pi x^3}}\exp\left(-\frac{\theta\left(x^2-2\mu x+\mu^2-\frac{2\mu^2tx^2}{\theta}\right)}{2\mu^2x}\right)dx$$

$$=\int_0^\infty\sqrt{\frac{\theta}{2\pi x^3}}\exp\left(-\frac{\theta\left(x^2-\frac{2\mu x}{1-\frac{2\mu^2t}{\theta}}+\frac{\mu^2}{1-\frac{2\mu^2t}{\theta}}\right)}{\frac{2\mu^2x}{1-\frac{2\mu^2t}{\theta}}}\right)dx$$

$$=\exp\left(\frac{\theta}{\mu}\left(1-\sqrt{1-\frac{2\mu^2 t}{\theta}}\right)\right)\int_0^\infty \sqrt{\frac{\theta}{2\pi x^3}}\exp\left(-\frac{\theta\left(x-\sqrt{\frac{\mu^2}{1-\frac{2\mu^2 t}{\theta}}}\right)^2}{\frac{2\mu^2 x}{1-\frac{2\mu^2 t}{\theta}}}\right)dx$$

$$=\exp\left(\frac{\theta}{\mu}\left(1-\sqrt{1-\frac{2\mu^2 t}{\theta}}\right)\right)$$

従って、必要な安全割増率は、

$$\frac{u_0\left(\exp\left(\frac{\hat{\theta}}{\hat{\mu}}\left(1-\sqrt{1-\frac{2\hat{\mu}^2\left(-\frac{\log\varepsilon}{u_0}\right)}{\hat{\theta}}}\right)\right)-1\right)}{-\hat{\mu}\log\varepsilon}-1$$

$$=\frac{16\left(\exp\left(\frac{1}{1.2}\left(1-\sqrt{1-2\times1.44\times\left(\frac{2}{16}\right)}\right)\right)-1\right)}{2\times1.2}-1=\frac{16\left(\exp\left(\frac{1}{6}\right)-1\right)}{2.4}-1=\frac{20\left(\exp\left(\frac{1}{6}\right)-1\right)-3}{3}$$

正解は⑨（C）⑩（F）⑪（A）⑫（C）。

以上