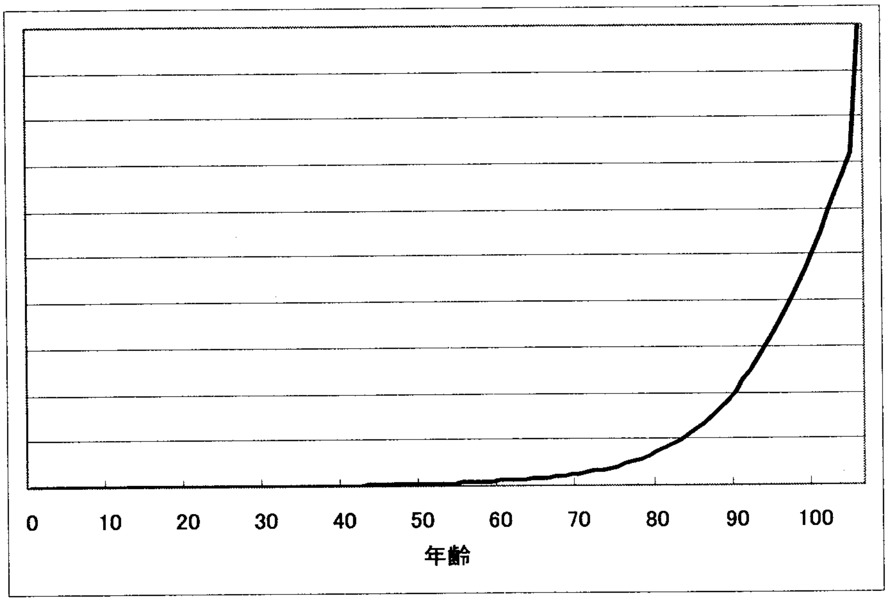
生 保 数 理 （問 題）

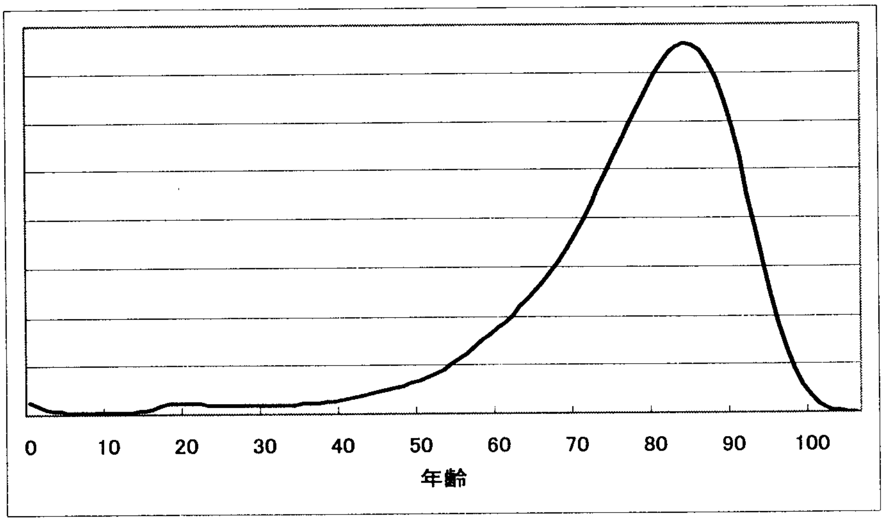
問題 1. 次の(1)から(8)までの各問について、それぞれ選択肢の中から正しい答えを選んで、所定の解答用紙の指定欄にその記号を記入せよ。 （４８点）

(1) グラフ 1 はある生命表の死亡率をグラフにしたものである。このとき、グラフ 2 が表す関数として最も適切なものは次のうちどれか。

グラフ 1



グラフ 2



(A)	μ_x	(B)	$l_x \cdot \mu_x$	(C)	$l_x \cdot p_x$	(D)	l_x	(E)	l_x^2
(F)	p_x	(G)	p_x^2	(H)	m_x	(I)	$\mathring{e}_x$	(J)	$l_x \cdot \mathring{e}_x$

(2) 以下はある保険の選択期間 3 年の選択表および終局表における生存率の一部である。

x	$p_{[x]}$	$p_{[x]+1}$	$p_{[x]+2}$	p_{x+3}	$x+3$
45	0.9885	0.9868	0.9854	0.9788	48
46	0.9878	0.9859	0.9838	0.9763	49
47	0.9872	0.9850	0.9822	0.9738	50
48	0.9865	0.9841	0.9806	0.9713	51
49	0.9858	0.9831	0.9790	0.9698	52
50	0.9849	0.9819	0.9774	0.9682	53
51	0.9838	0.9803	0.9758	0.9664	54
52	0.9827	0.9787	0.9742	0.9646	55
53	0.9816	0.9771	0.9726	0.9628	56
54	0.9805	0.9755	0.9710	0.9612	57

現在、A さん、B さんはともに 50 歳であるが、A さんは 48 歳のときにこの保険に加入し B さんは 50 歳で加入した。いまからちょうど 5 年後にいずれか 1 人だけが生存している確率に最も近いものは次のうちどれか。

(A)	0.065	(B)	0.066	(C)	0.174	(D)	0.183	(E)	0.195
(F)	0.207	(G)	0.220	(H)	0.231	(I)	0.236	(J)	0.248

(3) $\mu_x = \dfrac{1}{a-x}(0 \leqq x < a)$ の時、$\dfrac{2-\mu_{x-\frac{1}{2}}}{2+\mu_{x-\frac{1}{2}}}$ (ただし、$1 < x < a$ とする。)に等しいものは次のうちどれか。

(A)	p_{x-1}	(B)	$p_{x-\frac{1}{2}}$	(C)	p_x	(D)	$p_{x+\frac{1}{2}}$	(E)	p_{x+1}
(F)	q_{x-1}	(G)	$q_{x-\frac{1}{2}}$	(H)	q_x	(I)	$q_{x+\frac{1}{2}}$	(J)	q_{x+1}

(4) 現在、夫 x 歳、妻 y 歳で、即時開始の n 年保証期間付最終生存者終身年金(n 年間は確定年金で、それ以降は夫または妻が生きている限り支払い続ける年金)の現価の値に最も近いものは次のうちどれか(年 1 回期始払、年金額 1)。
ただし、$v=0.980$、$v^n=0.820$、${}_np_x=0.904$、${}_np_y=0.993$、$\ddot{a}_{x+n}=17.2$、$\ddot{a}_{y+n}=44.2$、$\ddot{a}_{x+n:y+n}=14.1$ とする。

(A)	19.3	(B)	21.6	(C)	22.9	(D)	43.9	(E)	45.3
(F)	47.4	(G)	51.5	(H)	55.8	(I)	56.4	(J)	68.1

(5) 額面100円、年利率6%(利息年1回期末払)の公債で、あと5年で償還されるものを購入した。この公債を満期まで保有するものとし、毎年の利回りが 5%となるように、年度末に評価損を計上して帳簿価格を変更するものとする。この時、購入時から 3 年後の年度末に計上すべき評価損の値に最も近いものは次のうちどれか。
必要ならば、$v^5 = 0.783526$ (利率5%)、$v'^5 = 0.747258$ (利率6%)を用いよ。

(単位：円)

(A)	-0.814	(B)	-0.824	(C)	-0.834	(D)	-0.844	(E)	-0.854
(F)	-0.864	(G)	-0.874	(H)	-0.884	(I)	-0.894	(J)	-0.904

(6) 40 歳および 41 歳加入の終身払終身保険(保険金額 1、保険金年末支払)の年払平準純保険料を、それぞれ $P_{40} = 0.01116, P_{41} = 0.01175$ とする。この時、 q_{40} の値に最も近いものは次のうちどれか。ただし、利率は 5.0%とする。

(A)	0.00170	(B)	0.00175	(C)	0.00180	(D)	0.00185
(E)	0.00190	(F)	0.00195	(G)	0.00200	(H)	0.00205
(I)	0.00210	(J)	0.00215				

(7) 以下の(ア)、(イ)の給付を行う契約年齢x歳、保険期間20年、保険料払込期間20年の保険があり、責任準備金はチルメル割合 0.020 の 10 年チルメル式で積むものとする。この保険の第 11 年度以降の年払純保険料の値に最も近いものは次のうちどれか。
(ア) 保険期間中の死亡に対しては、その保険年度末責任準備金を年度末に支払う(各年度末の責任準備金は正である)。
(イ) 満期まで生存したときは保険金 1 を支払う。
ただし付加保険料は新契約費のみで、チルメル割合に等しいものとし、$\ddot{a}_{x:\overline{10}|} = 6.5$、予定利率は 2%とする。なお、必要ならば$v^{10} = 0.820348$ を使用すること。

(A)	0.035	(B)	0.036	(C)	0.037	(D)	0.038	(E)	0.039
(F)	0.040	(G)	0.041	(H)	0.042	(I)	0.043	(J)	0.044

(8) ${}_tV_x$ に等しいものの記号を全て列挙せよ。等しいものがない場合は×を記入せよ。

(A) $\dfrac{P_x - P^{\ \ 1}_{x:\overline{t}|}}{P^{\ \ 1}_{x:\overline{t}|}}$ (B) $\dfrac{P_{x+t} - P_x}{P_x + d}$ (C) $\dfrac{A_{x+t} - A_x}{1 - A_x}$ (D) $\dfrac{1}{d}P_x A_{x+t} + A_{x+t} - \dfrac{1}{d}P_x$

(E) $1 - \prod_{k=0}^{t-1}\left(1 - {}_1V_{x+k}\right)$

問題2　次の(1)、(2)の各問について最も適当な数値または最も簡潔な算式を、所定の解答用紙の指定欄に記入せよ。　(20点)

(1)　次の問題文中の①～④をiを使った式で表せ。

第t年度($1 \leqq t \leqq n$)の死亡には保険金$\ddot{a}_{\overline{t}|}$をその年度末に支払い、n年後の生存には保険金$\ddot{a}_{\overline{n}|}$を支払う予定利率iのn年満期の保険を考える。
ここで、予定利率jの保険金1に対する保険金年末払の養老保険の一時払保険料を$A_{x:\overline{n}|}^{[j]}$と表わすとき、この保険の一時払保険料$A$は次のとおり表せる。

$$A = \frac{\boxed{①}}{\boxed{②}}\left(A_{x:\overline{n}|}^{[\boxed{③}]} - A_{x:\overline{n}|}^{[\boxed{④}]}\right)$$

(2)　次の問題文中の⑤～⑩に適切な記号を埋めよ。ただし、分数による表記は不可とする。

(I) 生命年金現価a_xとa_{x+1}の間の関係を示す式は、以下のように書くことができる。

$$a_x = \boxed{⑤} \cdot (1 + a_{x+1})$$

本問において、このような関係を示す式を再帰式と呼ぶこととする。

(II) 就業不能に関する年金現価のうち、a_x^{ai}について、上記(I)に対応する再帰式を以下の考え方に基づき求める。

・就業者(x)が1年未満に就業不能となり$x+1$歳になるまで生存する確率は、$\boxed{⑥}$であり、その就業不能年金(その就業不能者($x+1$)が就業不能状態のまま生存する限り支払われる期始払年金)のx歳時点の現価は$\boxed{⑦}$である。

・また、就業者(x)が1年後も就業者のまま生存する確率は、$\boxed{⑧}$であり、

その就業者が就業不能となって給付される年金現価は、$\boxed{⑨} \cdot a_{x+1}^{ai}$である。

したがって、a_x^{ai}の再帰式は上記(I)にならい、以下のとおりとなる。

$$a_x^{ai} = \boxed{⑩}$$

(注) ただし、就業不能状態からの回復はないものとする。

問題3　次の空欄に当てはまる記号を所定の解答用紙の指定欄に記入せよ。　(16点)

次の給付を行う健常者が加入する介護保険を考える。

【給付内容】

・x歳加入、$x+n$歳満期、保険料全期払込(年払)

・保険期間中に健常者のまま死亡した場合は、既払込保険料を死亡給付金として即時に給付する。

・保険期間中に要介護状態になった場合は、その時点を第1回年金支払開始時とする10年保証期間付終身年金(年金年額1、毎年始払)を支払う。

・死亡、要介護状態にならずに満期まで生存した場合は、健康祝金1を支払う。

・要介護状態になった場合には以降の保険料の払込を免除する。

・なお、要介護状態からの回復はないものとする。

【記号の定義】

・健常者が要介護状態にならずに生存・死亡する場合　：D_x^{aa}、$\overline{C}_x^{aa}$、N_x^{aa}、$\overline{M}_x^{aa}$等

・健常者が要介護状態になる場合　：$\overline{C}_x^{(i)}$、$\overline{M}_x^{(i)}$等

・要介護者が生存・死亡する場合　：D_x^i、$\overline{C}_x^i$、N_x^i、$\overline{M}_x^i$等

まず、年金年額1あたりの年払平準純保険料(年始払)を求める。

x歳の健常者がt年後から1年未満に要介護状態になった場合に支払われる年金の原資F_{x+t}は、$x+t$歳時および$x+t+1$歳時において要介護状態となった場合に支払われる年金原資の和半として表すとすると、$F_{x+t}=$ ① となる。

x歳の健常者がt年後から1年未満に死亡した場合に支払われる死亡給付金S_{x+t}は

$S_{x+t}=$ ②　(年払営業保険料をP'として使用する。)

年払平準純保険料P_x^{net}はF_{x+t}、S_{x+t}を使用すると次のとおりとなる。

$P_x^{net}=$ ③

ここで、予定事業費を以下のとおりとする。

	新契約費	維持費	集金費
平均死亡給付金額1あたり※1	α_1	γ_1	—
介護年金額1あたり※2	α_2	γ_2	
健康祝金1あたり	α_3	γ_3	
保険料1あたり	—	—	β

※1 平均死亡給付金額とは死亡時に支払われる死亡給付金の全保険期間分の単純平均値とする。

※2 保険料払込期間中のみ予定事業費を徴収するものとする。

以上より、年払平準営業保険料 P' は以下のとおりとなる。(F_{x+t} は使用してもいいが、P_x^{net} 、S_{x+t} は使用しないこと)

$P' =$ ④

問題4.　次の設問に対する解答を所定の解答用紙に記入せよ。　（１６点）

（１）保険期間 n 年、保険料払込期間 n 年で、満期時に保険金1、死亡時には年末に平準純保険料式責任準備金を支払う保険の年払純保険料 P^1 を求めよ。

（２）$P^2 = \dfrac{\displaystyle\sum_{t=1}^{n}\left\{\left(1-\dfrac{\ddot{s}_{\overline{t}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}\right)\cdot C_{x+t-1}\right\}}{N_x - N_{x+n}} + P^1$ となる P^2 を簡潔な式により求めよ。また P^2 はどのような保険の保険料か、言葉で簡潔に説明せよ。ここで $\ddot{a}_{\overline{0}|} = \ddot{s}_{\overline{0}|} = 0$ とする。

以上

生 保 数 理 （解答）

問題1.

設問番号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
解答欄	(B)	(G)	(A)	(F)	(F)	(C)	(F)	(A),(C),(D),(E)

(1)　二見隆　生命保険数学(上)P. 48 のグラフのとおり、これは死亡数曲線(d_x)と同じ形状である。したがって、解答:(B)

なお、μ_x, q_x は単調増加、$l_x, p_x, e_x, \mathring{e}_x$ は単調減少であり、(B)以外は問題文のようなグラフの形状にはならないことからも分かる。

(2)　A さんが 5 年後に生存している確率は

$$(0.9806)(0.9713)(0.9698)(0.9682)(0.9664)=0.864270$$

同様に B さんが 5 年後に生存している確率は

$$(0.9849)(0.9819)(0.9774)(0.9682)(0.9664)=0.884410$$

ゆえに求める確率は、

$$0.864270\cdot(1\text{-}0.884410)+(1\text{-}0.864270)\cdot 0.884410=0.219942$$

解答:(G)

(3)　$\mu_x=-\dfrac{d\log l_x}{dx}$ より $\log l_x=\displaystyle\int\frac{-1}{a-x}dx=\log(a-x)+\log A$ (A は定数)

したがって、$l_x=A(a-x)$ (A は定数)

$$\frac{2-\mu_{x-\frac{1}{2}}}{2+\mu_{x-\frac{1}{2}}}=\frac{\dfrac{2}{\mu_{x-\frac{1}{2}}}-1}{\dfrac{2}{\mu_{x-\frac{1}{2}}}+1}=\frac{2(a-x+\frac{1}{2})-1}{2(a-x+\frac{1}{2})+1}=\frac{a-x}{a-x+1}=\frac{l_x}{l_{x-1}}=p_{x-1}$$

解答: (A)

(4)　求める年金の現価は、

$$\ddot{a}_{\overline{n|}}+v^n{}_np_x(1-{}_np_y)\ddot{a}_{x+n}+v^n{}_np_y(1-{}_np_x)\ddot{a}_{y+n}+v^n{}_np_{xy}\ddot{a}_{\overline{x+n:y+n}}$$

$$=\ddot{a}_{\overline{n|}}+v^n{}_np_x(1-{}_np_y)\ddot{a}_{x+n}+v^n{}_np_y(1-{}_np_x)\ddot{a}_{y+n}+v^n{}_np_{xy}(\ddot{a}_{x+n}+\ddot{a}_{y+n}-\ddot{a}_{x+n:y+n})$$

$$=\frac{1-v^n}{1-v}+v^n({}_np_x\ddot{a}_{x+n}+{}_np_y\ddot{a}_{y+n}-{}_np_{x\,n}p_y\ddot{a}_{x+n:y+n})$$

$$=\frac{1-0.820}{1-0.980}+0.820\times(0.904\times17.2+0.993\times44.2-0.904\times0.993\times14.1)\fallingdotseq 47.4$$

解答: (F)

(5) まず、第1年度の年始の帳簿価格(x)を求める。

$$x = 100v^5 + 6a_{\overline{5|}} = 100 \times 0.783526 + 6 \times \frac{1-0.783526}{0.05} = 104.32948$$ となる。

この帳簿価格を元に各年度の年末帳簿価格を求めると、以下の表のようになる。

年度	年始 帳簿価格	帳簿価格 に対する 5%の利息	公債利息	評価損	年末 帳簿価格
1	104.32948	5.21647	6.00000	−0.78353	103.54595
2	103.54595	5.17730	6.00000	−0.82270	102.72325
3	102.72325	5.13616	6.00000	−0.86384	101.85941
4	101.85941	5.09297	6.00000	−0.90703	100.95238
5	100.95238	5.04762	6.00000	−0.95238	100.00000

よって、求める答えは-0.864となる。

解答：(F)

(6) $\ddot{a}_x = 1 + vp_x\ddot{a}_{x+1}$、$P_x = \dfrac{1}{\ddot{a}_x} - d$、$P_{x+1} = \dfrac{1}{\ddot{a}_{x+1}} - d$ より、

$$p_x = \frac{\ddot{a}_x - 1}{v\ddot{a}_{x+1}} = \left(\frac{1}{P_x + d} - 1\right) \times \frac{P_{x+1} + d}{v} = \frac{v - P_x}{v} \times \frac{P_{x+1} + d}{P_x + d} = \{1 - (1+i)P_x\} \frac{P_{x+1} + \frac{i}{1+i}}{P_x + \frac{i}{1+i}}$$

ここで、$P_{40} = 0.01116$、$P_{41} = 0.01175$、$i = 5.0\%$を代入してq_{40}を求めると、

$$q_{40} = 1 - \{1 - 1.05 \times P_{40}\} \frac{P_{41} + \frac{0.05}{1.05}}{P_{40} + \frac{0.05}{1.05}}$$

$$= 1 - \{1 - 1.05 \times 0.01116\} \frac{0.01175 + \frac{0.05}{1.05}}{0.01116 + \frac{0.05}{1.05}}$$

$$= 1 - 0.988282 \times \frac{0.05937}{0.05878} = 0.00180$$

解答：(C)

（7） 第1年度の年払純保険料をP_1、第2年度以降第10年度までの年払純保険料をP_2、第 11 年度以降の年払純保険料をP_3、新契約費(= チルメル割合)をα、第t年度末の責任準備金を${}_t\mathrm{V}$とすると、

$$P_1 = \overline{P}_{x:\overline{20|}} - \alpha + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{10|}}}、P_2 = \overline{P}_{x:\overline{20|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{10|}}}、P_3 = \overline{P}_{x:\overline{20|}}$$

（$\overline{P}_{x:\overline{20|}}$は責任準備金を平準純保険料式で積む場合の年払純保険料）

$$P_1 = P_3 - \alpha + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{10|}}} = vq_{40} \cdot {}_1\mathrm{V} + vp_{40} \cdot {}_1\mathrm{V}$$

$$P_2 + {}_{t-1}\mathrm{V} = P_3 + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{10|}}} + {}_{t-1}\mathrm{V} = vq_{40+t-1} \cdot {}_t\mathrm{V} + vp_{40+t-1} \cdot {}_t\mathrm{V} \ (2 \leqq \mathrm{t} \leqq 10)$$

$$P_3 + {}_{t-1}\mathrm{V} = vq_{40+t-1} \cdot {}_t\mathrm{V} + vp_{40+t-1} \cdot {}_t\mathrm{V} \ (11 \leqq t \leqq 20)$$

すなわち、$P_3 - \alpha + \dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{10|}}} = v \cdot {}_1\mathrm{V}$ … ①

$P_3 + \dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{10|}}} + {}_{t-1}\mathrm{V} = v \cdot {}_t\mathrm{V} \quad (2 \leqq \mathrm{t} \leqq 10)$ … ②

$P_3 + {}_{t-1}\mathrm{V} = v \cdot {}_t\mathrm{V} \quad (11 \leqq \mathrm{t} \leqq 20)$ … ③

②、③の両辺にv^{t-1}を乗じたもの（t = 2～20）と①を合計すると

$$P_3 \cdot \sum_{t=0}^{19} v^t + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{10|}}} \cdot \sum_{t=0}^{9} v^t - \alpha = v^{20}{}_{20}\mathrm{V} = v^{20}$$

$$\therefore P_3 = \frac{\alpha - \dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{10|}}} \cdot \ddot{a}_{\overline{10|}} + v^{20}}{\ddot{a}_{\overline{20|}}} = \frac{0.02 - \dfrac{0.02}{6.5} \cdot \dfrac{1-0.820348}{1-1/1.02} + 0.820348^2}{\dfrac{1-0.820348^2}{1-1/1.02}} = 0.039858$$

なお、

$P_1 = v \cdot {}_1V > 0$、$P_2 + {}_{t-1}\mathrm{V} = v \cdot {}_t\mathrm{V} > 0 \, (2 \leqq t \leqq 10)$、

$P_3 + {}_{t-1}\mathrm{V} = v \cdot {}_t\mathrm{V} > 0 \, (11 \leqq t \leqq 20)$

であるため、問題文の指示にある「各年度末の責任準備金は正である」ことがわかる。

解答：(F)

［注］実際の試験問題では適切な選択肢がなかったため、本会報では選択肢を修正し掲載した。

(8)

(A) $\dfrac{P_x - P^{\ 1}_{x:\overline{t|}}}{P_{x:\overline{t|}}^{\ \ 1}} = \left(\dfrac{M_x}{N_x} - \dfrac{M_x - M_{x+t}}{N_x - N_{x+t}}\right) \Big/ \left(\dfrac{D_{x+t}}{N_x - N_{x+t}}\right) = \dfrac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} P_x - \dfrac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}} = {}_tV_x$

したがって、○

(B) $\dfrac{P_{x+t} - P_x}{P_x + d} = \dfrac{\left(\dfrac{1}{\ddot{a}_{x+t}} - d\right) - \left(\dfrac{1}{\ddot{a}_x} - d\right)}{\dfrac{1}{\ddot{a}_x}} = \dfrac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x+t}}\left(1 - \dfrac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x}\right) = \dfrac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x+t}} {}_tV_x$

したがって、×

なお、$\dfrac{P_{x+t} - P_x}{P_{x+t} + d} = \dfrac{\left(\dfrac{1}{\ddot{a}_{x+t}} - d\right) - \left(\dfrac{1}{\ddot{a}_x} - d\right)}{\dfrac{1}{\ddot{a}_{x+t}}} = 1 - \dfrac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x} = {}_tV_x$

(C) $\dfrac{A_{x+t} - A_x}{1 - A_x} = \dfrac{(1 - d\ddot{a}_{x+t}) - (1 - d\ddot{a}_x)}{d\ddot{a}_x} = 1 - \dfrac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x} = {}_tV_x$

したがって、○

(D) $\dfrac{1}{d} P_x A_{x+t} + A_{x+t} - \dfrac{1}{d} P_x = \dfrac{1}{d} P_x (A_{x+t} - 1) + A_{x+t} = A_{x+t} - P_x \ddot{a}_{x+t} = {}_tV_x$

したがって、○

(E) $1 - \prod_{k=0}^{t-1} \left(1 - {}_1V_{x+k}\right) = 1 - \prod_{k=0}^{t-1} \left(\dfrac{\ddot{a}_{x+k+1}}{\ddot{a}_{x+k}}\right) = 1 - \dfrac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x} = {}_tV_x$

したがって、○

解答:(A)、(C)、(D)、(E)

問題2.

(1)　$\ddot{a}_{\overline{t|}}=1+v+\cdots+v^{t-1}=\dfrac{1-v^t}{1-v}=\dfrac{1-v^t}{d}$

であるので、一時払保険料Aは

$$A=vq_x\ddot{a}_{\overline{1|}}+v^2{}_{1|}q_x\ddot{a}_{\overline{2|}}+\cdots+v^n{}_{n-1|}q_x\ddot{a}_{\overline{n|}}+v^n{}_np_x\ddot{a}_{\overline{n|}}$$

$$=\frac{1}{d}\left\{vq_x(1-v)+v^2{}_{1|}q_x(1-v^2)+\cdots+v^n{}_{n-1|}q_x(1-v^n)+v^n{}_np_x(1-v^n)\right\}$$

$$=\frac{1}{d}\left[\left\{vq_x+v^2{}_{1|}q_x+\cdots+v^n{}_{n-1|}q_x+v^n{}_np_x\right\}-\left\{v^2q_x+v^4{}_{1|}q_x+\cdots+v^{2n}{}_{n-1|}q_x+v^{2n}{}_np_x\right\}\right]$$

ここで上記の 2 番目の{ }内の式は、予定利率i^2+2iとする養老保険（保険金年末払）の一時払保険料である。ゆえに求める式は

$$A=\frac{1}{d}\left(A_{x:\overline{n|}}^{[i]}-A_{x:\overline{n|}}^{[i^2+2i]}\right)=\frac{1+i}{i}\left(A_{x:\overline{n|}}^{[i]}-A_{x:\overline{n|}}^{[i^2+2i]}\right)$$

ゆえに

①　$1+i$　　②　i　　③　i　　④　i^2+2i

(2) (I) 生命年金現価 a_x の再帰式は、以下のように書ける。

$$a_x = vp_x(1 + a_{x+1})$$

(II) 就業不能に関する年金現価のうち、a_x^{ai} について上記(I)に対応する a_x^{ai} の再帰式を以下の考え方に基づき求める。

・就業者 (x) が 1 年未満に就業不能になり $x+1$ 歳になるまで生存する確率は、p_x^{ai} であり、その就業不能年金の現価は $vp_x^{ai}(1 + a_{x+1}^{i})$ である。

・また、就業者 (x) が1年後も就業者のまま生存する確率は、$\dfrac{l_{x+1}^{aa}}{l_x^{aa}} = p_x^{aa}$ であり、その就業者が就業不能となって給付される年金現価は $vp_x^{aa}a_{x+1}^{ai}$ である。

したがって、a_x^{ai} の再帰式は上記(I)にならい、以下のとおりとなる。

$$a_x^{ai} = vp_x^{ai}(1 + a_{x+1}^{i}) + vp_x^{aa}a_{x+1}^{ai}$$

⑤ vp_x　⑥ p_x^{ai}　⑦ $vp_x^{ai}(1 + a_{x+1}^{i})$　⑧ p_x^{aa}　⑨ vp_x^{aa}

⑩ $vp_x^{ai}(1 + a_{x+1}^{i}) + vp_x^{aa}a_{x+1}^{ai}$

問題3

x 歳の健常者が t 年後から 1 年未満に要介護状態になった場合に支払われる年金の原資 F_{x+t} は、$x+t$ 歳時および $x+t+1$ 歳時において要介護状態となった場合に支払われる年金原資の和半として表すとすると、

$$F_{x+t}=\frac{1}{2}\left\{\left(\ddot{a}_{\overline{10}|}+\frac{N^{i}_{x+t+10}}{D^{i}_{x+t}}\right)+\left(\ddot{a}_{\overline{10}|}+\frac{N^{i}_{x+t+11}}{D^{i}_{x+t+1}}\right)\right\}=\ddot{a}_{\overline{10}|}+\frac{1}{2}\left(\frac{N^{i}_{x+t+10}}{D^{i}_{x+t}}+\frac{N^{i}_{x+t+11}}{D^{i}_{x+t+1}}\right)$$

x 歳の健常者が t 年後から 1 年未満に死亡した場合に支払われる死亡給付金 S_{x+t} は

$$S_{x+t}=(t+1)\times P'$$

年払平準純保険料 P^{net}_{x} は次のとおりとなる。

$$P^{net}_{x}=\frac{\sum_{\tau=0}^{n-1}\left(S_{x+\tau}\times\overline{C}^{aa}_{x+\tau}+F_{x+\tau}\times\overline{C}^{(i)}_{x+\tau}\right)+D^{aa}_{x+n}}{N^{aa}_{x}-N^{aa}_{x+n}}$$

年払平準営業保険料を P' とすると、

$$P'\times\frac{N^{aa}_{x}-N^{aa}_{x+n}}{D^{aa}_{x}}=P^{net}_{x}\times\frac{N^{aa}_{x}-N^{aa}_{x+n}}{D^{aa}_{x}}+\left\{\alpha_2+\alpha_3+(\gamma_2+\gamma_3)\times\frac{N^{aa}_{x}-N^{aa}_{x+n}}{D^{aa}_{x}}\right\}$$

$$+P'\times\frac{N^{aa}_{x}-N^{aa}_{x+n}}{D^{aa}_{x}}\times\beta+P'\times\frac{n+1}{2}\times\left(\alpha_1+\gamma_1\times\frac{N^{aa}_{x}-N^{aa}_{x+n}}{D^{aa}_{x}}\right)$$

以上より、

$$P'=\left\{\frac{\sum_{\tau=0}^{n-1}\left(F_{x+\tau}\times\overline{C}^{(i)}_{x+\tau}\right)+D^{aa}_{x+n}}{D^{aa}_{x}}+\alpha_2+\alpha_3+(\gamma_2+\gamma_3)\times\frac{N^{aa}_{x}-N^{aa}_{x+n}}{D^{aa}_{x}}\right\}$$

$$\div\left\{\frac{N^{aa}_{x}-N^{aa}_{x+n}}{D^{aa}_{x}}\times(1-\beta)-\left[\frac{\sum_{\tau=0}^{n-1}(\tau+1)\times\overline{C}^{aa}_{x+\tau}}{D^{aa}_{x}}+\left(\alpha_1+\gamma_1\times\frac{N^{aa}_{x}-N^{aa}_{x+n}}{D^{aa}_{x}}\right)\times\frac{n+1}{2}\right]\right\}$$

① $\ddot{a}_{\overline{10|}} + \frac{1}{2}\left(\frac{N^{i}_{x+t+10}}{D^{i}_{x+t}} + \frac{N^{i}_{x+t+11}}{D^{i}_{x+t+1}} \right)$

② $(t+1) \times P'$

③ $\dfrac{\sum_{\tau=0}^{n-1}\left(S_{x+\tau} \times \overline{C}^{aa}_{x+\tau} + F_{x+\tau} \times \overline{C}^{(i)}_{x+\tau}\right) + D^{aa}_{x+n}}{N^{aa}_{x} - N^{aa}_{x+n}}$

④ $$P' = \left\{ \frac{\sum_{\tau=0}^{n-1}\left(F_{x+\tau} \times \overline{C}^{(i)}_{x+\tau}\right) + D^{aa}_{x+n}}{D^{aa}_{x}} + \alpha_2 + \alpha_3 + (\gamma_2 + \gamma_3) \times \frac{N^{aa}_{x} - N^{aa}_{x+n}}{D^{aa}_{x}} \right\}$$

$$\div \left\{ \frac{N^{aa}_{x} - N^{aa}_{x+n}}{D^{aa}_{x}} \times (1-\beta) - \left[\frac{\sum_{\tau=0}^{n-1}(\tau+1) \times \overline{C}^{aa}_{x+\tau}}{D^{aa}_{x}} + \left(\alpha_1 + \gamma_1 \times \frac{N^{aa}_{x} - N^{aa}_{x+n}}{D^{aa}_{x}} \right) \times \frac{n+1}{2} \right] \right\}$$

問題4

(1) この保険の責任準備金を${}_tV^1_{x:\overline{n}|}$とすると

責任準備金の再帰式より

$$({}_{t-1}V^1_{x:\overline{n}|}+P^1)\cdot(1+i)=q_{x+t-1}\cdot{}_tV^1_{x:\overline{n}|}+p_{x+t-1}\cdot{}_tV^1_{x:\overline{n}|}={}_tV^1_{x:\overline{n}|}$$

$$\therefore P^1=v\cdot{}_tV^1_{x:\overline{n}|}-{}_{t-1}V^1_{x:\overline{n}|}$$

$$P^1=v\cdot{}_nV^1_{x:\overline{n}|}-{}_{n-1}V^1_{x:\overline{n}|}\quad,\quad P^1=v\cdot{}_{n-1}V^1_{x:\overline{n}|}-{}_{n-2}V^1_{x:\overline{n}|}\quad,\quad\cdots\quad,\quad P^1=v\cdot{}_1V^1_{x:\overline{n}|}-{}_0V^1_{x:\overline{n}|}$$

これらの式にそれぞれ$v^{n-1},v^{n-2},\cdots,1$を乗じて合計すると

$$(v^{n-1}+v^{n-2}+\cdots+1)P^1=v^n\cdot{}_nV^1_{x:\overline{n}|}-{}_0V^1_{x:\overline{n}|}=v^n\quad(\because \text{題意より}\ {}_nV^1_{x:\overline{n}|}=1,\ {}_0V^1_{x:\overline{n}|}=0)$$

$$\therefore P^1=\frac{v^n}{(1+v+\cdots+v^{n-1})}=\frac{v^n}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}\left(or\ \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}\right)$$

(2) (1)の結果より

$$P^2=\frac{\sum_{t=1}^{n}\left\{\left(1-\frac{\ddot{s}_{\overline{t}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}\right)\cdot C_{x+t-1}\right\}}{N_x-N_{x+n}}+\frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}=\frac{\sum_{t=1}^{n}\left\{\left(1-\frac{\ddot{s}_{\overline{t}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}\right)\cdot C_{x+t-1}\right\}+\frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}\sum_{t=1}^{n}D_{x+t-1}}{N_x-N_{x+n}}$$

$$=\frac{M_x-M_{x+n}+\frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}\sum_{t=1}^{n}(D_{x+t-1}-\ddot{s}_{\overline{t}|}\cdot C_{x+t-1})}{N_x-N_{x+n}}$$

ここで分子のΣの括弧の中の式をAとすると$C_{x+t-1}=vD_{x+t-1}-D_{x+t}$より

$$A=D_{x+t-1}-\ddot{s}_{\overline{t}|}(vD_{x+t-1}-D_{x+t})=(1-v\ddot{s}_{\overline{t}|})D_{x+t-1}+\ddot{s}_{\overline{t}|}D_{x+t}=-\ddot{s}_{\overline{t-1}|}D_{x+t-1}+\ddot{s}_{\overline{t}|}D_{x+t}$$

ゆえに

$$\sum_{t=1}^{n}(D_{x+t-1}-\ddot{s}_{\overline{t}|}\cdot C_{x+t-1})=-\ddot{s}_{\overline{0}|}D_x+\ddot{s}_{\overline{n}|}D_{x+n}=\ddot{s}_{\overline{n}|}D_{x+n}$$

$$P^2=\frac{M_x-M_{x+n}+D_{x+n}}{N_x-N_{x+n}}=P_{x:\overline{n}|}$$

で保険期間n年の養老保険(保険金年末払)の保険金1に対しての年払純保険料となる。