損保数理（問題）

問題1. 次の(1)から(10)について、それぞれ選択肢の中から正しい答えを一つ選んで、指定の解答用紙の所定欄にその記号を記入せよ。 (70点)

(1) ある保険の発売にあたり、次のとおり保険料収入と保険金支払について計画を作成した。

発売開始日： 平成14年4月1日 （保険始期は毎月1日のみとする。）

保険期間： 1年間のみ

保険料： 払込方法は一時払のみで、保険始期と同日に収入するものとする。

各月の収入保険料は、平成14年度は毎月2,000万円、平成15年度は前年同月比10%増とする。

支払保険金： 予定損害率60%とし、事故は保険期間中均一に発生すると仮定する。

事故発生から保険金支払までの期間は1か月とする。

このとき、次の各問に最も近い解答を選択肢の中から選べ。

① 平成14年度のアーンドベーシス損害率

② 平成14年度のリトンベーシス損害率

③ 平成15年度のリトンベーシス損害率

(a) 10.0% (b) 12.5% (c) 15.0% (d) 20.0% (e) 22.5%

(f) 25.0% (g) 27.5% (h) 32.5% (i) 40.0% (j) 52.5%

(k) 55.0% (l) 57.0% (m) 58.5% (n) 60.0% (o) 62.0%

(p) 65.0% (q) 66.7% (r) 71.0%

(2) ある保険種類のクレーム額 X は、指数分布 $f(x)=\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}\ (x>0)$ に従うことがわかっており、支払限度額を1,000として引き受けた保険契約の支払データとして、次のデータを得た。

クレーム額	クレーム件数	クレーム総額
1,000未満	60	24,800
1,000	40	40,000
合計	100	64,800

① 最尤法により θ を求めた場合、それに最も近いものは、次のうちどれか。

(a) 1,000 (b) 1,020 (c) 1,040 (d) 1,080

(e) 1,100 (f) 1,120 (g) 1,140 (h) 1,160

② 支払限度額をすべて300とした場合のクレーム額の平均として最も近いものは、次のうちどれか。なお、e^x の値が必要な場合には、$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}$ で近似せよ。

(a) 160 (b) 180 (c) 200 (d) 220

(e) 240 (f) 260 (g) 280 (h) 300

(3) 次のような支払保険金のロスディベロップメントがある。

	経過年数			
事故年度	1	2	3	4
1				10
2			21	12
3		40	18	4
4	50	25	20	
5	60	40		
6	65			

ここで、記号を次のように定義する。

$C_{i,j}$: i 年度発生事故の経過年数 j 年における当該年度の支払保険金

χ_i : i 年度発生事故の最終発生保険金

p_j : 経過年数 j 年において支払われる保険金の最終発生保険金に対する割合で、事故発生年度 i によらず一定とする

今、$\sum_{i,j}(\chi_i p_j - C_{i,j})^2$ の値が最小となるように、χ_i および p_j を推定することにし、p_j の推定値として次の値を得た。

p_1	p_2	p_3	p_4
0.48	0.30	0.16	0.06

p_j の推定値をこの数値に固定したとき、χ_4, χ_5, χ_6 の推定値に最も近いものは、次のうちどれか。

(a) 100　(b) 102.5　(c) 105　(d) 107.5
(e) 110　(f) 112.5　(g) 115　(h) 117.5
(i) 120　(j) 122.5　(k) 125　(l) 127.5
(m) 130　(n) 132.5　(o) 135　(p) 137.5　(q) 140

(4) 損害額 X の分布関数が

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{100}} & (x\geq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

で表されるとき、平均支払額について、エクセス方式の場合を S_E (免責金額10)、フランチャイズ方式の場合を S_F (免責金額20)とすると、S_F / S_E に最も近いものは、次のうちどれか。

なお、e^x の値が必要な場合には、$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ で近似せよ。

(a) 0.824　(b) 0.833　(c) 0.909　(d) 0.920
(e) 1.087　(f) 1.100　(g) 1.200　(h) 1.214

(5) ある保険会社では、割引率0%(等級0)、20%(等級1)の無事故割引制度を実施している。1年間に少なくとも1件の保険金請求をした場合は等級0になり、また等級0から等級1に上がるためには2年間連続で保険金請求がないことが条件であるとする。この割引制度の定常状態での平均割引率に最も近いものは、次のうちどれか。ただし、1年間に少なくとも1件の保険金請求をする確率はすべての契約者について0.5であるものとする。

(a) 0% (b) 2.5% (c) 5% (d) 7.5%
(e) 10% (f) 12.5% (g) 15% (h) 17.5% (i) 20%

(6) A保険会社では傷害による入院が10日以上となったときに10万円を支払う内容の保険契約を引き受けており、以下の情報が与えられている。

・保険契約はすべて1日を保険始期とする1年契約であり、毎月10,000件引き受ける。
・入院発生率は2.03%で、このうち20%の入院が10日以上となる。
・保険金請求は、平均して入院日の翌日から起算して30日目に行われる。

なお、入院は保険期間中均一に発生するものとして、この保険契約についての事業年度末のIBNR備金として最も適当なものは、次のうちどれか。

(a) 350万円 (b) 360万円 (c) 370万円 (d) 380万円
(e) 390万円 (f) 400万円 (g) 410万円 (h) 420万円

(7) 支払保険金総額Sがガンマ分布$\Gamma(\alpha,\beta)=\dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}$ $(0\le x<\infty)$に従う場合、その分布関数を$F_{\alpha,\beta}(x)$とする。このとき、エクセスポイントをdとするストップロス再保険のネット再保険料は、$E(I_d)=\dfrac{\alpha}{\beta}(1-①)-d(1-②)$となる。

この(①, ②)の組み合わせとして正しいものは、次のうちどれか。

(a) $\left(F_{\alpha+1,\beta}(d), F_{\alpha,\beta}(d)\right)$ (b) $\left(F_{\alpha,\beta}(d), F_{\alpha+1,\beta}(d)\right)$
(c) $\left(F_{\alpha,\beta+1}(d), F_{\alpha,\beta}(d)\right)$ (d) $\left(F_{\alpha,\beta}(d), F_{\alpha,\beta+1}(d)\right)$
(e) $\left(F_{\alpha+1,\beta+1}(d), F_{\alpha,\beta}(d)\right)$ (f) $\left(F_{\alpha,\beta}(d), F_{\alpha+1,\beta+1}(d)\right)$
(g) $\left(F_{\alpha,\beta}(d), F_{\alpha,\beta}(d)\right)$ (h) $\left(F_{\alpha+1,\beta+1}(d), F_{\alpha+1,\beta+1}(d)\right)$

(8) クレーム件数Nおよび各クレーム額X_i $(i=1,2,\cdots)$が、次の分布に従うものとする。

Nの確率関数: $f(n)=\begin{pmatrix} r+n-1 \\ n \end{pmatrix}p^r(1-p)^n,\quad n=0,1,2,\cdots,\ r=0.05,\ p=0.1$

X_iの確率密度関数: $g(x)=2e^{-2x}\quad (x>0)$

このとき、クレーム総額の分散に最も近いものは、次のうちどれか。ただし、X_iは同一分布に従い、NとX_iは互いに独立とする。

(a) 1.20 (b) 1.22 (c) 1.24 (d) 1.26
(e) 1.28 (f) 1.30 (g) 1.32 (h) 1.34

(9) ある保険群団において、クレーム件数Nが以下の分布に従うものとする。

k	$\Pr(N=k)$
0	0.4
1	0.3
2	0.2
3	0.1

また、個々のクレーム額Xは、次の分布に従うものとする。

x	$f_X(x)$
1	0.8
5	0.2

このとき、クレーム総額Sが$3E(S)$を超える確率に最も近いものは、次のうちどれか。

(a) 0.02　(b) 0.04　(c) 0.06　(d) 0.08
(e) 0.10　(f) 0.12　(g) 0.14　(h) 0.16

(10) ある保険会社の年間支払保険金が平均1億円の指数分布に従うとする。この保険会社には2億円のリザーブがあり、年間収入保険料とリザーブの和を年間支払保険金が超えると破産するものとする（経費や利息のような他の要素は考慮しない）。

今、この保険会社の引き受けているすべての契約に同じ出再率の比例再保険を行うことにより、破産確率を現在の半分にするためには、出再割合を何%にすればよいか。その最も近い数値は次のうちどれか。必要ならば$\log 2 = 0.693$を用いよ。

(a) 10%　(b) 15%　(c) 20%　(d) 25%
(e) 30%　(f) 35%　(g) 40%　(h) 45%　(i) 50%

問題2. それぞれ独立したリスクの集団がある。リスクはAとBの二つのクラスに分類され、かつクラスAとクラスBのリスクの数は同一である。

ここで、次の条件が与えられたとする。

① それぞれのリスクは、1年間に1回だけ事故が発生する確率が20%で、1回も事故が発生しない確率が80%である。

② クラスAのクレーム額は、すべて2である。

③ クラスBのクレーム額は、すべてc（定数）である。

無作為に一つのリスクを抽出して1年間のクレームを観察し、翌年のクレームコストの期待値を算出したい。このとき、次の問いに答えよ。（14点）

(1) Bühlmannモデルの信頼度Zを、cを用いて表せ。

(2) $c > 10$であることがわかっているとするとき、Zの取りうる値の範囲を求めよ。

問題3. 時刻$t\ (\geq 0)$での事故発生件数の確率過程$\{N_t\}$は、ポアソン過程に従うものとする。ただし、単位時間あたりの事故発生件数の平均をλとする。また、T_nをn件目の事故が発生する時刻を表す確率変数とする。このとき次の問いに答えよ。（16点）

(1) T_1の確率密度関数$f_1(t_1)$を求めよ。

(2) $T_{n-1} = t_{n-1}, \cdots, T_1 = t_1$の条件の下での$T_n$の条件付確率密度関数$f(t_n \mid t_{n-1}, \cdots, t_1)$を求めよ。

(3) $(T_1, \cdots, T_n)$の結合確率密度関数$f(t_1, \cdots, t_n)$を求めよ。

(4) (3)の結果からT_nの周辺確率密度関数$f_n(t_n)$を求めることにより、T_nがガンマ分布に従うことを示せ。

損保数理（解答例）

問題1.

(1) （テキスト1－5ページ参照）

① (n)

「事故は保険期間中均一に発生する」という条件から、アーンドベーシス損害率は予定損害率と等しい。

② (g)

平成14年度の収入保険料　2,000(万円)×12＝24,000(万円)

平成14年度の支払保険金　$2{,}000(\text{万円})\times 60\%\times\dfrac{11+10+\cdots+1+0}{12}=6{,}600(\text{万円})$

よって、6,600／24,000＝27.5%

③ (l)

平成15年度の収入保険料　2,000(万円)×1.1×12＝26,400(万円)

平成15年度の支払保険金

$$2{,}000(\text{万円})\times 60\%\times\frac{1+2+\cdots+11+12}{12}+2{,}000(\text{万円})\times 1.1\times 60\%\times\frac{11+10+\cdots+1+0}{12}$$

$$=15{,}060(\text{万円})$$

よって、15,060／26,400＝57.0%

(2) （テキスト2－8、0－20ページ参照）

① (d)

X の分布関数は、$F(x)=1-e^{-\frac{x}{\theta}}\quad(x>0)$ であるから、

$$P(x\geq 1000)=1-F(1000)=e^{-\frac{1000}{\theta}}$$

尤度関数を $L(\theta)$ で表すと、

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{100}f(x_i;\theta)=\left\{\prod_{i=1}^{60}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_i}{\theta}}\right\}\left\{\prod_{i=61}^{100}e^{-\frac{1000}{\theta}}\right\}$$

$$=\theta^{-60}e^{-\frac{24800}{\theta}}\cdot e^{-\frac{40000}{\theta}}=\theta^{-60}e^{-\frac{64800}{\theta}}$$

したがって、$\dfrac{\partial}{\partial\theta}\log L(\theta)=0$ となる θ が求める値となる。

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log L(\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-60\log\theta-\frac{64800}{\theta}\right)=-\frac{60}{\theta}+\frac{64800}{\theta^2}=0$$

これを θ について解いて、

$$\theta=\frac{64800}{60}=1080$$

② (f)

支払限度額を300とした場合のクレーム額を Y とすると、

$$E(Y)=\int_0^{300}y\cdot f(y)\,dy+300\cdot P(Y=300)=\int_0^{300}y\cdot\frac{1}{\theta}e^{-\frac{y}{\theta}}dy+300\cdot\{1-F(300)\}$$

$$=\theta\cdot(1-e^{-\frac{300}{\theta}})=1080\cdot(1-e^{-\frac{5}{18}})$$

$$=1080\cdot\left(\frac{5}{18}-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{18}\right)^2\right)=258.33$$

(3) χ_4 :(a)、χ_5 :(l)、χ_6 :(o) （テキスト5－22ページ参照）

$\sum_{i,j}(\chi_i p_j - C_{i,j})^2$ の χ_i による偏微分がゼロになることから、

$$\chi_i=\frac{\sum_j C_{i,j}p_j}{\sum_j p_j^2}$$

よって、

$$\chi_4=\frac{50\times 0.48+25\times 0.3+20\times 0.16}{0.48^2+0.3^2+0.16^2}=100.289\cdots$$

$$\chi_5=\frac{60\times 0.48+40\times 0.3}{0.48^2+0.3^2}=127.34\cdots$$

$$\chi_6=\frac{65\times 0.48}{0.48^2}=135.41\cdots$$

(4) (e) （テキスト1－42ページ参照）

確率密度関数 $f(x)$ は、

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{100}e^{-\frac{x}{100}} & (x\geq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

で表されるから、平均支払額 S_E および S_F をそれぞれ求めると、

$$S_E=\int_{10}^{\infty}(x-10)\frac{1}{100}\exp\left(-\frac{x}{100}\right)dx=100\exp\left(-\frac{1}{10}\right)$$

$$S_F=\int_{20}^{\infty}x\frac{1}{100}\exp\left(-\frac{x}{100}\right)dx=120\exp\left(-\frac{2}{10}\right)$$

となる。よって、求める値は次のようになる。

$$S_F/S_E=1.2\,e^{-\frac{1}{10}}=1.2\times\left(1-\frac{1}{10}+\frac{1}{200}\right)=1.086$$

[別解]

「平均支払額」には、「支払額ゼロの場合を含めた平均支払額」のほかに「支払われた場合の条件付平均支払額」という捉え方もある。この場合の平均支払額 S_E および S_F をそれぞれ求めると、

$$S_E=\frac{\int_{10}^{\infty}(x-10)\frac{1}{100}\exp\left(-\frac{x}{100}\right)dx}{\int_{10}^{\infty}\frac{1}{100}\exp\left(-\frac{x}{100}\right)dx}=100$$

$$S_F=\frac{\int_{20}^{\infty}x\frac{1}{100}\exp\left(-\frac{x}{100}\right)dx}{\int_{20}^{\infty}\frac{1}{100}\exp\left(-\frac{x}{100}\right)dx}=120$$

となる。よって、$S_F/S_E=1.2$ となり、この場合には(g)が正解となる。

(5) (c)　(テキスト3－8ページ参照)

カテゴリーを、A:等級0かつ前年事故あり、B:等級0かつ前年事故無し、C:等級1の三つに分けると、

推移行列は、$Q=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$ である。よって、定常状態でのA、B、Cの契約者数をそれぞれ

x, y, z とすると、$(x, y, z)\cdot Q=(x, y, z)$ であることより、$x:y:z=2:1:1$ であることが分かる。

よって、平均割引率は $\dfrac{2\times 0\%+1\times 0\%+1\times 20\%}{4}=5\%$ となる。

(6) (f)　(テキスト5－6ページ参照)

年間契約件数は、1,000×12=12,000件。問題の条件から入院は毎日同数発生すると考えてよい。また、保険金請求が入院日の翌日から30日目に行われるため、事業年度の末日から30日以内に発生した入院がIBNR損害となる。したがって、

120,000×2.03%×20%×30／365×10万円＝400万円

(7) (a)　(テキスト8－14ページ参照)

$f_{\alpha,\beta}(x)$ を S の確率密度関数とすると、ネット再保険料 $E(I_d)$ は、次のように求めることができる。

$$\begin{aligned}
E(I_d) &= \int_d^{\infty}(x-d)f_{\alpha,\beta}(x)dx \\
&= \int_d^{\infty} x\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx-\int_d^{\infty} d\cdot f_{\alpha,\beta}(x)dx \\
&= \int_d^{\infty}\frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{\alpha}{\beta}x^{\alpha}e^{-\beta x}dx-d(1-F_{\alpha,\beta}(d)) \\
&= \frac{\alpha}{\beta}\int_d^{\infty} f_{\alpha+1,\beta}(x)dx-d(1-F_{\alpha,\beta}(d)) \\
&= \frac{\alpha}{\beta}(1-F_{\alpha+1,\beta}(d))-d(1-F_{\alpha,\beta}(d))
\end{aligned}$$

(8) (c)　(テキスト2－11ページ参照)

N は負の二項分布に従うことから、

$$E(N)=\frac{r(1-p)}{p}=\frac{0.05\times 0.9}{0.1}=0.45$$

$$V(N)=\frac{r(1-p)}{p^2}=\frac{0.05\times 0.9}{0.1^2}=4.5$$

また、X_i は指数分布に従うことから、

$$E(X_i)=0.5,\quad V(X_i)=0.25$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}
V(S) &= V(X)\cdot E(N)+E(X)^2\cdot V(N) \\
&= 0.25\times 0.45+0.25\times 4.5=1.2375
\end{aligned}$$

(9) (f)　(テキスト2－16ページ参照)

N の平均は $E(N)=1.0$ であり、クレーム額 X の平均は $E(X)=1.8$ となることから、クレーム総額 S の平均は、$E(S)=1.0\times 1.8=1.8$ となる。したがって、$d=3E(S)=5.4$ であるから、$\Pr(S>d)=\Pr(S>5)$ となる。

ここで、畳み込みを用いてSの分布を計算する。5以下の数値xについて、次表のとおり畳み込みの値を求めることができる。

$\Pr(N=n)$:	0.4	0.3	0.2	0.1		
n :	0	1	2	3		
x	$f^{*0}(x)$	$f^{*1}(x)$	$f^{*2}(x)$	$f^{*3}(x)$	$f_S(x)$	$F_S(x)$
0	1	0	0	0	0.4000	0.4000
1	0	0.8	0	0	0.2400	0.6400
2	0	0	0.64	0	0.1280	0.7680
3	0	0	0	0.512	0.0512	0.8192
4	0	0	0	0	0	0.8192
5	0	0.2	0	0	0.0600	0.8792

これより、$\Pr(S>d)=1-F_S(5)=0.1208$となる。

(10) (d) (テキスト8－6ページ参照)

年間収入保険料をp、リザーブをu、年間支払保険金をX（平均μ）とすると、出再割合をαとしたときの破産確率$\phi(\alpha)$は、

$$\phi(\alpha)=P\left(u+(1-\alpha)p-(1-\alpha)X<0\right)=P\left(X>\frac{u}{1-\alpha}+p\right)=e^{-\frac{1}{\mu}\left(\frac{u}{1-\alpha}+p\right)}$$

である。題意より、$\phi(\alpha)=\dfrac{1}{2}\phi(0)$であるから、これを解いて、

$$\alpha=1-\frac{1}{1+\dfrac{\mu}{u}\log 2}=0.2573\cdots$$

問題2.

(1) (テキスト3－30ページ参照)

クラスAおよびクラスBのリスクについて1年間のクレーム総額を、それぞれX_A, X_Bで表すと、

$$E(X_A)=0.2\times 2+0.8\times 0=0.4$$
$$E(X_B)=0.2\times c+0.8\times 0=0.2c$$
$$V(X_A)=(0.2\times 2^2+0.8\times 0^2)-0.4^2=0.64$$
$$V(X_B)=(0.2\times c^2+0.8\times 0^2)-(0.2c)^2=0.16c^2$$

クラスAとクラスBのリスクの数は同一であるから、無作為に一つのリスクを抽出したときクラスAから抽出する確率は0.5と考えてよい。したがって、

$$\begin{aligned}\mu&=E[E(X_i|\Theta)]=0.5\cdot\{E(X_A)+E(X_B)\}\\&=0.5\times(0.4+0.2c)=0.2+0.1c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V[E(X_i|\Theta)]&=0.5\cdot\{E(X_A)-\mu^2\}+0.5\cdot\{E(X_B)-\mu^2\}\\&=0.5\cdot(0.4-0.2-0.1c)^2+0.5\cdot(0.2c-0.2-0.1c)^2\\&=0.01\,(c-2)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E[V(X_i|\Theta)]&=0.5\cdot\{V(X_A)+V(X_B)\}\\&=0.5\cdot(0.64+0.16c^2)=0.08\,(c^2+4)\end{aligned}$$

よって、観察期間は1年であることを考慮すると、

$$Z=\frac{n}{n+\dfrac{E[V(X_i|\Theta)]}{V[E(X_i|\Theta)]}}=\frac{1}{1+\dfrac{0.08\,(c^2+4)}{0.01\,(c-2)^2}}=\frac{(c-2)^2}{9c^2-4c+36}$$

(2)

$f(c)=\dfrac{c^2+4}{(c-2)^2}\quad(c>10)$ とおくと、$Z=\dfrac{1}{1+8f(c)}$ と表すことができる。

$f'(c)=-4\cdot\dfrac{c+2}{(c-2)^3}<0\quad(c>10)$ であるから、$f(c)$ は $c>10$ のとき単調減少関数となる。

したがって、Z は $c>10$ のとき単調増加であるから、$Z_{c=10}<Z<Z_{c\to\infty}\quad(c>10)$ となる。

また、

$$Z_{c=10}=\frac{1}{14}$$

$$Z_{c\to\infty}=\frac{1}{1+8\cdot\lim\limits_{c\to\infty}f(c)}=\frac{1}{9}$$

であるから、以上より次のとおりとなる。

$$\frac{1}{14}<Z<\frac{1}{9}\quad(c>10)$$

問題3.

(1) (テキスト7－10ページ参照)

$t_1\geq 0$ において、

$$\begin{aligned}P(T_1\leq t_1)&=P(0\leq t\leq t_1\text{の間に事故が1回以上発生})\\&=P(N_{t_1}\geq 1)\\&=1-P(N_{t_1}=0)\\&=1-e^{-\lambda t_1}\end{aligned}$$

であることから、求める $f_1(t_1)$ は次のとおりとなる。

$$f_1(t_1)=\begin{cases}\dfrac{d}{dt}P(T_1\leq t_1)=\lambda e^{-\lambda t_1} & (t_1\geq 0)\\ 0 & (t_1<0)\end{cases}$$

(2)

$0\leq t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n$ において、

$$\begin{aligned}P(T_n\leq t_n\,|\,T_{n-1}=t_{n-1},\cdots,T_1=t_1)&=P(t_{n-1}<t\leq t_n\text{の間に事故が1回以上発生})\\&=P(N_{t_n}-N_{t_{n-1}}\geq 1)\end{aligned}$$

ここで、ポアソン過程の定常性を用いると、上式は次のようになる。

$$\begin{aligned}&=P(N_{t_n-t_{n-1}}\geq 1)\\&=1-P(N_{t_n-t_{n-1}}=0)\\&=1-e^{-\lambda(t_n-t_{n-1})}\end{aligned}$$

したがって、求める $f(t_n\,|\,t_{n-1},\cdots,t_1)$ は次のとおりとなる。

$$f(t_n \mid t_{n-1},\cdots,t_1)$$
$$=\begin{cases} \dfrac{d}{dt_n}P(T_n \le t_n \mid T_{n-1}=t_{n-1},\cdots,T_1=t_1)=\lambda e^{-\lambda(t_n-t_{n-1})} & (0\le t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

(3)

$$f(t_1,\cdots,t_n)=f(t_n|t_{n-1},\cdots,t_1)\,f(t_{n-1}|t_{n-2},\cdots,t_1)\cdots f(t_2|t_1)\,f(t_1)$$
$$=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda(t_n-t_{n-1})}\,\lambda e^{-\lambda(t_{n-1}-t_{n-2})}\cdots\lambda e^{-\lambda(t_2-t_1)}\,\lambda e^{-\lambda t_1}=\lambda^n e^{-\lambda t_n} & (0\le t_1<\cdots<t_n) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

(4)

$$\begin{aligned} f_n(t_n) &= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(t_1,\cdots,t_n)\,dt_1\cdots dt_{n-1} \\ &= \int_0^{t_n}\cdots\int_0^{t_2}\lambda^n\ e^{-\lambda t_n}\,dt_1\cdots dt_{n-1} \\ &= \int_0^{t_n}\cdots\int_0^{t_3}\lambda^n\,t_2\,e^{-\lambda t_n}\,dt_2\cdots dt_{n-1} \\ &= \cdots \\ &= \int_0^{t_n}\lambda^n\,\frac{t_{n-1}^{n-2}}{(n-2)!}e^{-\lambda t_n}\,dt_{n-1} \\ &= \lambda^n\,\frac{t_n^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t_n} \quad (t_n\ge 0) \\ &= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}t_n^{n-1}\,e^{-\lambda t_n} \quad (t_n\ge 0) \end{aligned}$$