数学（問題）

［問題１から問題４を通じて、必要であれば（付表）に記載された数値を用いよ。］

問題１．　次の各問の $\boxed{}$ に入る答のみを、所定の解答用紙に記入せよ。（３２点）

(1)　確率変数 X の確率密度関数が $f(x)=\dfrac{a}{2}e^{-a|x|}$　$(-\infty<x<\infty\,;\,a>0)$ のとき、$E(X)=\boxed{}$ 、$V(X)=\boxed{}$ である。

(2)　確率変数 X が $f(x)=\begin{cases}1-|x| & (-1<x<1)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$ なる確率密度関数をもつとき、X の積率母関数は $M(t)=\boxed{}$ である。

(3) 番号札①②③④⑤を入れた箱から1枚の札を取り出し、番号を見てから箱に戻すという試行を繰り返す。1回目の試行で取り出した札の番号を X とし、条件 $Y\geq X$ を満たす番号 Y の札が出るまで試行を続けるとき、試行がちょうど3回で終わる確率は $\boxed{}$ となる。
（小数第 3 位を四捨五入して第 2 位まで求めよ。）

(4) バスは、毎時 0 分、20 分、50 分に発車する。Aさんがバス停に到着する時刻は 7 時から 8 時の間で一様である。Aさんの待ち時間の期待値は $\boxed{}$ 分である。
（小数第 3 位を四捨五入して第 2 位まで求めよ。）

(5)　確率変数 X、Y が互いに独立で、同じ幾何分布 $P(X=i)=pq^i$　$(i=0,1,2,\cdot\cdot\cdot)$ に従うとする。この時 $U=\min(X,Y)$ の確率分布は、$P(U=u)=\boxed{}$　$(u=0,1,2,\cdot\cdot\cdot)$　となる。

(6)　毎年の一定期間（N日間）における気温の変化について予測を行う。過去のデータより、そのN日間の各日の一日の平均気温 X_i は、それぞれ独立に $N(\mu,\sigma^2)$ 、$(-\infty<x<\infty)$ なる正規分布に従っているということがわかっている。一日の平均気温が a 度以下となる日数が、N日中k日である確率は記号 $\Phi(x)$ を用いると、$\boxed{}$ と表される。

ここで Φ は標準正規分布の累積密度関数　$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ を表す。

(7) ある植物の種の重さを、10g きざみの度数分布表(例、0g 超 10g 以下、10g 超 20g 以下…)に整理して平均を求める。

平均の誤差が 0.2g以下となる確率が、0.95以上となるためには、種の数を $\boxed{}$ 個抽出すればよい。ただし、種の数は十分大きいとし、中心極限定理を用いて求めよ。

(8) 1 つのサイコロを続けて投げて、最初の n 回に出た目の数をその順序のまま小数点以下に並べて実数を作り、それを a_n とする。例えば出た目の数が 5,2,6・・・・であれば、$a_1 = 0.5$、$a_2 = 0.52$、$a_3 = 0.526$、・・・である。

実数 α に対して $a_n \leq \alpha$ となる確率を $p_n(\alpha)$ とすると $\lim_{n \to \infty} p_n(\frac{41}{333}) = \boxed{}$ となる。

(小数第4位を四捨五入して小数第3位まで求めよ。)

問題２．　次の各問の $\boxed{}$ に入る答のみを、所定の解答用紙に記入せよ。（３２点）

(1) 確率密度関数　$f(x;\theta)=(1+5\theta)x^{5\theta}$　$(0<x<1;\theta>-\frac{1}{5})$　を分布にもつ母集団からの、大きさｎの標本変量を $X_1,X_2,\cdots,X_n$ とするとき、θ の最尤推定量は $\boxed{}$ となる。

(2) 正規母集団 $N(\mu,1)$ の母平均 μ について、帰無仮説 $H_0:\mu=0$ を、対立仮説 $H_1:\mu=1$ に対して検定する。第１種の誤りのおこる確率=0.01、第２種の誤りのおこる確率=0.01 としたとき、この検定に要する標本の大きさは $\boxed{}$ となる。（小数点以下を四捨五入して、整数で求めよ。）

(3) ある都市におけるある月（10日間）の交通死亡事故の件数は、次のとおりであった。

１，１，３，２，５，０，０，３，１，１

1日あたりの交通死亡事故の件数はポアソン分布に従うものとして、その件数の母平均を信頼係数95%で精密法を用いて区間推定すると、信頼区間は（ $\boxed{}$ ， $\boxed{}$ ）である。

（小数点以下第４位を四捨五入して、小数点以下第３位まで求めよ。）

(4) 確率変数 X の確率密度関数は　$f(x;\theta)=2x/\theta^2$　$(0<x<\theta)$

で、いま X について５個の観測値

0.7,　1.6,　0.9,　1.2,　1.5

が得られた。このとき、

(a) θ の不偏推定値は、$\boxed{}$ であり、

(b) θ^2 の不偏推定値は、$\boxed{}$ である。

（小数点以下第４位を四捨五入して、小数点以下第３位まで求めよ。）

(5) A，Bの２人が将棋を５戦したところ、Aは１勝４敗であった。Aが勝つ割合を信頼係数95%で精密法を用いて区間推定すると、信頼区間は（ $\boxed{}$ ， $\boxed{}$ ）である。

（小数点以下第４位を四捨五入して、小数点以下第３位まで求めよ。）

(6) ２次元正規母集団からの大きさ２０の標本の標本相関係数が r であった。これより母相関係数 ρ について、帰無仮説 $H_0:\rho=0$ を有意水準５％で検定するとき、棄却域は、$|r|>\boxed{}$ である。　（小数点以下第４位を四捨五入して、小数点以下第３位まで求めよ。）

(7) 303 人の男子社員と 277 人の女子社員に対し、次の①～⑤の項目について上司と意見が一致するかしないかの調査を行った。以下の数値は、提示された項目に「一致しない」と答えた男子社員、女子社員それぞれの標本比率である。どの項目が男女間で有意な差を示しているか、有意水準 5%で検定を行うと、男女間で有意な差のある項目は $\boxed{}$ である。(項目①～⑤で当てはまる数字(例、①、②など) をすべて選びなさい。)

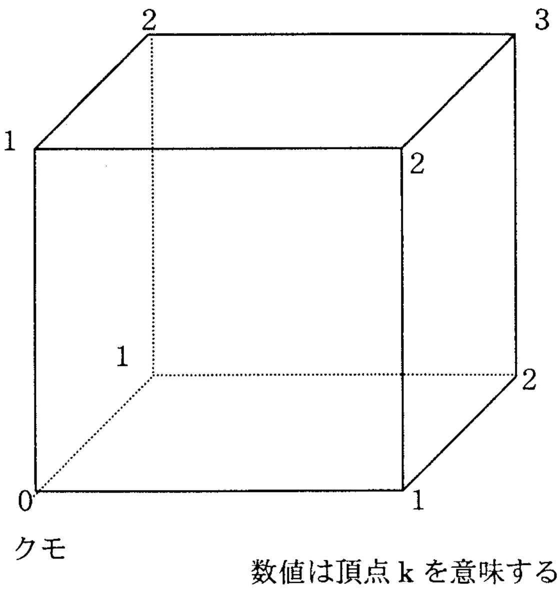
項目	標本比率	
	男子：$\hat{p}_1$	女子：$\hat{p}_2$
①仕事の適性	0.55	0.43
②給与の水準	0.45	0.39
③自己啓発	0.35	0.28
④服装	0.20	0.27
⑤アフター5 の過ごし方	0.60	0.68

(8) 確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が互いに独立でともに一様分布 $U(0,1)$ に従うとする。

$X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$、$Y_n = (n+1)(X_{(n)} - E(X_{(n)}))$ とすると、

Y_n の分布関数 $G_n(y) = \boxed{}$ となり、$\lim_{n\to\infty} G_n(y) = \boxed{}$ となる。

問題３．　立方体のある頂点０にクモが静止している。他方、てんとう虫は立方体の辺上を１分間に１辺の早さで休みなく動きまわっている。辺上では運動の向きを変えることなく進み、頂点に達したら３つの辺のうちどれか一つをランダムに選んで進む。(来た道をひき返す場合もある。)ただし、頂点０に達したときはクモに捕らえられて絶命してしまう。頂点０からk辺だけ離れた頂点を頂点k（k＝1、2、3）とする場合に、初めに０以外の各頂点kにいるてんとう虫の余命をX_kとした場合に以下の問に答えよ。(18点)



数値は頂点 k を意味する

(1) 期待値$E(X_k)_{k=1,2,3}$を$E(X_j)_{\substack{j=1,2,3\\ j\neq k}}$を用いて示せ。

(2) $E(X_k)_{k=1,2,3}$を求めよ。

(ヒント) 次に向かう頂点をY_kとした場合の条件付き期待値を考える。

問題4.　近接する 2 つのマーケットA, Bの 1 日あたりの利用者数を調べた。マーケットAは 8 日間で 1 日あたりの標本平均 955 人、標本分散 93^2 人、マーケットBは 10 日間で 1 日あたりの標本平均 677 人、標本分散 111^2 人であった。利用者数はそれぞれ正規分布 $N(\mu_A,\ \sigma_A^2)$, $N(\mu_B,\ \sigma_B^2)$ に従うものとして、次の問に答えよ。(18点)

(1) $\sigma_A^2=100^2$ 人、$\sigma_B^2=105^2$ 人であるとき、マーケットA, Bの 1 日あたりの利用者数の母平均の差 $\mu_A-\mu_B$ を信頼係数 95%で区間推定せよ。

(小数点以下第 4 位を四捨五入して、小数点以下第 3 位まで求めよ。)

(2) σ_A^2, σ_B^2 がともに未知であるとき、マーケットA, Bの 1 日あたりの利用者数の母平均の差 $\mu_A-\mu_B$ を信頼係数 95%で区間推定せよ。

(小数点以下第 4 位を四捨五入して、小数点以下第 3 位まで求めよ。)

(3) (2)の場合で、$\mu_A>\mu_B$ といえるか。有意水準 5%で検定せよ。

以上

（付表）

Ⅰ．標準正規分布の上側ε点：$u(\varepsilon)$

ε	0.159	0.100	0.050	0.025	0.023	0.010	0.005
$u(\varepsilon)$	1.000	1.282	1.645	1.960	2.000	2.326	2.576

Ⅱ．自由度ϕのt分布の上側ε点：$t_\phi(\varepsilon)$

ϕ ＼ ε	0.100	0.050	0.025
6	1.440	1.943	2.447
7	1.415	1.896	2.365
8	1.397	1.860	2.306
9	1.383	1.833	2.262
10	1.372	1.812	2.228
11	1.363	1.796	2.201
12	1.356	1.782	2.179
13	1.350	1.771	2.160
14	1.345	1.761	2.145
15	1.341	1.753	2.131
16	1.337	1.746	2.120
17	1.333	1.740	2.110
18	1.330	1.734	2.101
19	1.328	1.729	2.093
20	1.325	1.725	2.086
21	1.323	1.721	2.080
22	1.321	1.717	2.074
23	1.319	1.714	2.069
24	1.318	1.711	2.064
25	1.316	1.708	2.060

Ⅲ. 自由度ϕのχ^2分布の上側ε点：$\chi_{\phi}^{2}(\varepsilon)$

ϕ ＼ ε	0.975	0.950	0.100	0.050	0.025
1	0.001	0.004	2.706	3.841	5.024
2	0.051	0.103	4.605	5.991	7.378
3	0.216	0.352	6.251	7.815	9.348
4	0.484	0.711	7.779	9.488	11.143
5	0.831	1.145	9.236	11.070	12.832
6	1.237	1.635	10.645	12.592	14.449
7	1.690	2.167	12.017	14.067	16.013
8	2.180	2.733	13.362	15.507	17.535
9	2.700	3.325	14.684	16.919	19.023
10	3.247	3.940	15.987	18.307	20.483
11	3.816	4.575	17.275	19.675	21.920
12	4.404	5.226	18.549	21.026	23.337
13	5.009	5.892	19.812	22.362	24.736
14	5.629	6.571	21.064	23.685	26.119
15	6.262	7.261	22.307	24.996	27.488
16	6.908	7.962	23.542	26.296	28.845
17	7.564	8.672	24.769	27.587	30.191
18	8.231	9.390	25.989	28.869	31.526
19	8.907	10.117	27.204	30.144	32.852
20	9.591	10.851	28.412	31.410	34.170
21	10.283	11.591	29.615	32.671	35.479
22	10.982	12.338	30.813	33.924	36.781
23	11.689	13.091	32.007	35.172	38.076
24	12.401	13.848	33.196	36.415	39.364
25	13.120	14.611	34.382	37.652	40.646
26	13.844	15.379	35.563	38.885	41.923
27	14.573	16.151	36.741	40.113	43.195
28	15.308	16.928	37.916	41.337	44.461
29	16.047	17.708	39.088	42.557	45.722
30	16.791	18.493	40.256	43.773	46.979
31	17.539	19.281	41.422	44.985	48.232
32	18.291	20.072	42.585	46.194	49.480
33	19.047	20.867	43.745	47.400	50.725
34	19.806	21.664	44.903	48.602	51.966
35	20.569	22.465	46.059	49.802	53.203
36	21.336	23.269	47.212	50.999	54.437
37	22.106	24.075	48.363	52.192	55.668
38	22.879	24.884	49.513	53.384	56.896
39	23.654	25.695	50.660	54.572	58.120
40	24.433	26.509	51.805	55.759	59.342
50	32.357	34.764	63.167	67.505	71.420
60	40.482	43.188	74.397	79.082	83.298
70	48.758	51.739	85.527	90.531	95.023
80	57.153	60.392	96.578	101.879	106.629
90	65.647	69.126	107.565	113.145	118.136
100	74.222	77.930	118.498	124.342	129.561

Ⅳ. 分母の自由度m、分子の自由度nのF分布の上側ε点：$F_m^n(\varepsilon)$

$\varepsilon = 0.100$

$m \diagdown n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	8.526	9.000	9.162	9.243	9.293	9.326	9.349	9.367	9.381	9.392
3	5.538	5.462	5.391	5.343	5.309	5.285	5.266	5.252	5.240	5.230
4	4.545	4.325	4.191	4.107	4.051	4.010	3.979	3.955	3.936	3.920
5	4.060	3.780	3.619	3.520	3.453	3.405	3.368	3.339	3.316	3.297
6	3.776	3.463	3.289	3.181	3.108	3.055	3.014	2.983	2.958	2.937
7	3.589	3.257	3.074	2.961	2.883	2.827	2.785	2.752	2.725	2.703
8	3.458	3.113	2.924	2.806	2.726	2.668	2.624	2.589	2.561	2.538
9	3.360	3.006	2.813	2.693	2.611	2.551	2.505	2.469	2.440	2.416
10	3.285	2.924	2.728	2.605	2.522	2.461	2.414	2.377	2.347	2.323

$\varepsilon = 0.050$

$m \diagdown n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.329	19.353	19.371	19.385	19.396
3	10.128	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845	8.812	8.785
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.688	3.581	3.500	3.438	3.388	3.347
9	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978

$\varepsilon = 0.025$

$m \diagdown n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	38.506	39.000	39.166	39.248	39.298	39.331	39.356	39.373	39.387	39.398
3	17.443	16.044	15.439	15.101	14.885	14.735	14.624	14.540	14.473	14.419
4	12.218	10.649	9.979	9.604	9.364	9.197	9.074	8.980	8.905	8.844
5	10.007	8.434	7.764	7.388	7.146	6.978	6.853	6.757	6.681	6.619
6	8.813	7.260	6.599	6.227	5.988	5.820	5.695	5.600	5.523	5.461
7	8.073	6.542	5.890	5.523	5.285	5.119	4.995	4.899	4.823	4.761
8	7.571	6.059	5.416	5.053	4.817	4.652	4.529	4.433	4.357	4.295
9	7.209	5.715	5.078	4.718	4.484	4.320	4.197	4.102	4.026	3.964
10	6.937	5.456	4.826	4.468	4.236	4.072	3.950	3.855	3.779	3.717

$\varepsilon = 0.01$

$m \diagdown n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	98.503	99.000	99.166	99.249	99.299	99.333	99.356	99.374	99.388	99.399
3	34.116	30.817	29.457	28.710	28.237	27.911	27.672	27.489	27.345	27.229
4	21.198	18.000	16.694	15.977	15.522	15.207	14.976	14.799	14.659	14.546
5	16.258	13.274	12.060	11.392	10.967	10.672	10.456	10.289	10.158	10.051
6	13.745	10.925	9.780	9.148	8.746	8.466	8.260	8.102	7.976	7.874
7	12.246	9.547	8.451	7.847	7.460	7.191	6.993	6.840	6.719	6.620
8	11.259	8.649	7.591	7.006	6.632	6.371	6.178	6.029	5.911	5.814
9	10.561	8.022	6.992	6.422	6.057	5.802	5.613	5.467	5.351	5.257
10	10.044	7.559	6.552	5.994	5.636	5.386	5.200	5.057	4.942	4.849

Ⅳ. 分母の自由度m、分子の自由度nのF分布の上側ε点：$F_m^n(\varepsilon)$（続き）

$\varepsilon = 0.005$

m ＼ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	198.501	199.000	199.166	199.250	199.300	199.333	199.357	199.375	199.388	199.400
3	55.552	49.799	47.467	46.195	45.392	44.838	44.434	44.126	43.882	43.686
4	31.333	26.284	24.259	23.155	22.456	21.975	21.622	21.352	21.139	20.967
5	22.785	18.314	16.530	15.556	14.940	14.513	14.200	13.961	13.772	13.618
6	18.635	14.544	12.917	12.028	11.464	11.073	10.786	10.566	10.391	10.250
7	16.236	12.404	10.882	10.050	9.522	9.155	8.885	8.678	8.514	8.380
8	14.688	11.042	9.596	8.805	8.302	7.952	7.694	7.496	7.339	7.211
9	13.614	10.107	8.717	7.956	7.471	7.134	6.885	6.693	6.541	6.417
10	12.826	9.427	8.081	7.343	6.872	6.545	6.302	6.116	5.968	5.847

数学　解答例

[解答　問題 1(1)]

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{a}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-a|x|}dx$ である。いま、$t=ax(a>0)$ とおけば、

$a|x|=|t|$、$dx=\frac{1}{a}dt$ で、$x:-\infty\to+\infty$ のとき、$t:-\infty\to+\infty$ より、

$$E(X)=\frac{a}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{a}e^{-|t|}\frac{1}{a}dt=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-|t|}dt=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{0}te^{t}dt+\frac{1}{2a}\int_{0}^{+\infty}te^{-t}dt$$

$$=\frac{1}{2a}\Big[te^{t}-e^{t}\Big]_{-\infty}^{0}+\frac{1}{2a}\Big[-te^{t}-e^{t}\Big]_{0}^{\infty}=-\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}=\boxed{0}$$

$$E(X^2)=\frac{a}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-a|x|}dx=\frac{1}{2a^2}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-|t|}dt=\frac{1}{2a^2}\int_{-\infty}^{0}t^2e^{t}dt+\frac{1}{2a^2}\int_{0}^{+\infty}t^2e^{-t}dt$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{0}t^2e^{t}dt=\frac{1}{a^2}\left(\Big[t^2e^{t}\Big]_{-\infty}^{0}-2\int_{-\infty}^{0}te^{t}dt\right)=\frac{2}{a^2}$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=\boxed{\frac{2}{a^2}}$$

[解答　問題1(2)]

$$M(t)=\int_{-1}^{1}e^{tx}(1-|x|)dx=\int_{-1}^{0}e^{tx}(1+x)dx+\int_{0}^{1}e^{tx}(1-x)dx$$

ここで、

$$\int_{-1}^{0}e^{tx}(1+x)dx=\left[\frac{1}{t}e^{tx}(1+x)\right]_{-1}^{0}-\frac{1}{t}\int_{-1}^{0}e^{tx}dx=\frac{1}{t}-\frac{1}{t}\left[\frac{1}{t}e^{tx}\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{t}-\frac{1-e^{-t}}{t^2}$$

同様に、$\int_{0}^{1}e^{tx}(1-x)dx=-\frac{1}{t}-\frac{1-e^{t}}{t^2}$

よって、$M(t)=(\frac{1}{t}-\frac{1-e^{-t}}{t^2})+(-\frac{1}{t}-\frac{1-e^{t}}{t^2})=\boxed{\frac{e^{t}+e^{-t}-2}{t^2}}$

[解答　問題 1(3)]

X=1 のとき、試行は必ず2回目で終わってしまう。

ちょうど3回目で終わるには、$2\le X\le 5$ でなければならない。

3回で終わるには、3回の札が{X、X 未満の札、X 以上の札}となることである。

よって、求むべき確率は

$$\sum_{X=2}^{5}\frac{1}{5}\times\frac{X-1}{5}\times\frac{6-X}{5}=\frac{1}{5^3}\times(1\times4+2\times3+3\times2+4\times1)=\frac{4}{25}=\boxed{0.16}$$

[解答　問題 1(4)]

Aさんの 7 時台の到着時刻(分)は、U(0,60)の一様分布に従う。よってこの時刻をTで表せば、待ち時間(分)は $0 \le T \le 20, 20 \le T \le 50, 50 \le T \le 60$ においてそれぞれ $20-T, 50-T, 60-T$ 分となる。

よって、求むべき期待値は

$$\int_0^{20}(20-t)\cdot\frac{1}{60}dt+\int_{20}^{50}(50-t)\cdot\frac{1}{60}dt+\int_{50}^{60}(60-t)\cdot\frac{1}{60}dt=11.666......=\boxed{11.67}\text{ 分}$$

[解答　問題 1(5)]

$$P(U=u)=P(X=u,Y\ge u)+P(X>u,Y=u)$$

$$=P(X=u)P(Y\ge u)+P(X>u)P(Y=u)=q^u p\left(\sum_{j=0}^{\infty}q^{u+j}p\right)+\left(\sum_{k=1}^{\infty}q^{u+k}p\right)q^u p$$

$$=\boxed{pq^{2u}(1+q)}\qquad (u=0,1,2,\cdot\cdot\cdot)$$

[解答　問題 1(6)]

i 日目の平均気温が a 度以下となる場合に 1、それ以外の場合に 0 をとる確率変数 Y_i を考える。

問題より i 日目の平均気温 X_i は $N(\mu,\sigma^2)$ なる正規分布に従っているから、この日の平均気温が a 度以下となる確率pを考えると

$$p=P(Y_i=1)=P(X_i\le a)=P(z=\frac{X_i-\mu}{\sigma}\le\frac{a-\mu}{\sigma})=\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$ である。

N日の平均気温は互いに独立であるから、$W=\sum_{i=1}^{N}Y_i$ なる確率変数は 2 項分布、Bin(N, p)に従う。

以上から、$\boxed{P(W=k)={}_N C_k\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})^k(1-\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma}))^{N-k}}$

[解答　問題1(7)]

度数分布表にあてはめる際に、種の重さとあてはめた階級の中央値との差をX_iとすると、X_iは区間$(-5 < X_i \leq 5)$の一様分布に従う。また、各X_iは互いに独立である。

中心極限定理より、

$\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdot\ \cdot\ \cdot + X_n}{n}$は、平均0、分散$\dfrac{10^2}{12n}$の正規分布に従う。

題意より、

$$P(|\overline{X} - 0| \leq 0.2) \geq 0.95 = P\left(\frac{|\overline{X} - 0|}{\sqrt{10^2/12n}} \leq \frac{0.2}{\sqrt{10^2/12n}}\right) \geq 0.95$$

$$\frac{0.2}{\sqrt{10^2/12n}} \geq 1.96 \qquad \therefore n \geq 800.333$$

よって、$\boxed{801}$

[解答　問題1(8)]

次のどれかが起きる確率を求めればよい。

(無限小数を) $0.d_1d_2d_3 \cdot\ \cdot\ \cdot$であらわすと

①$d_1 = 1$、$d_2 = 1$

②$d_1 = 1$、$d_2 = 2$、$d_3 \leq 2$

③$d_1 = 1$、$d_2 = 2$、$d_3 = 3$でかつ 4 回目から新たに小数を作るとして、その小数が$0.1\dot{2}\dot{3}$以下になる

従って求める確率をPとすると

$$P = \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)^3 P$$

よって$P = \dfrac{8}{215} = 0.0372 \cdot\cdot\cdot\cdot = \boxed{0.037}$

[解答　問題2(1)]

尤度関数 $L(\theta)$ を求めると、

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(X_i;\theta)=(1+5\theta)^n (X_1 X_2\cdot\cdot\cdot X_n)^{5\theta}$$

両辺の対数をとれば、

$$\log L(\theta)=n\log(1+5\theta)+5\theta\sum_{i=1}^{n}\log X_i$$

θ の最尤推定量 $\hat{\theta}$ を求めるためには、$\dfrac{\partial \log L(\theta)}{\partial\theta}=0$ を θ に関して解けばよい。

従って、$\dfrac{\partial \log L(\theta)}{\partial\theta}=\dfrac{5n}{1+5\theta}+5\sum_{i=1}^{n}\log X_i=0$ を解くと、

$$\hat{\theta}=-\left(\frac{n}{5\sum_{i=1}^{n}\log X_i}+\frac{1}{5}\right)$$

[解答　問題2(2)]

求める標本の大きさを n 、標本を $X_1, X_2, \cdots, X_n$ とし、$\overline{X}=\dfrac{(X_1+X_2+\cdots+X_n)}{n}$ とする。

棄却域を $\overline{X}\geq\lambda$ とすると、題意より、$P(\overline{X}\geq\lambda|\mu=0)=0.01$ 、$P(\overline{X}\geq\lambda|\mu=1)=0.99$ である。

ここで、$\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)$ は正規分布 $N(0,1)$ に従うので、

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\sqrt{n}\lambda}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=0.01、\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\sqrt{n}(\lambda-1)}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=0.99$$ となる。

従って、$\sqrt{n}\lambda=2.326$ 、$\sqrt{n}(\lambda-1)=-2.326$ より、$n=22$

[解答　問題2(3)]

交通死亡事故の総発生件数＝1＋1＋3＋2＋5＋0＋0＋3＋1＋1＝17

求める信頼区間を(p_L, p_U)とし、題意より精密法を用いると、

$$p_L = \frac{\chi^2_{34}(0.975)}{2\times 10} = \frac{19.806}{20} = 0.990$$

$$p_U = \frac{\chi^2_{36}(0.025)}{2\times 10} = \frac{54.437}{20} = 2.722$$

よって、求める信頼区間は(0.990,2.722)である。

[解答　問題2(4)]

(a) Xの平均　μは、

$$\mu = E(X) = \int_0^{\theta} x\cdot\frac{2x}{\theta^2}dx = \frac{2}{\theta^2}\int_0^{\theta} x^2 dx = \frac{2}{3}\theta$$

で、 $E(\overline{X}) = \mu = \frac{2}{3}\theta$であるから、　$E(\frac{3}{2}\overline{X}) = \theta$

ゆえに、　θの不偏推定量は　$\frac{3}{2}\overline{X}$で、その不偏推定値は

$$\frac{3}{2}\times\frac{1}{5}(0.7+1.6+0.9+1.2+1.5) = \frac{3}{2}\times 1.180 = 1.770$$

(b) $E(X^2) = \int_0^{\theta} x^2\cdot\frac{2x}{\theta^2}dx = \frac{2}{\theta^2}\int_0^{\theta} x^3 dx = \frac{1}{2}\theta^2$

$$\sigma^2 \equiv V(X) = E(X^2) - \mu^2 = \frac{1}{2}\theta^2 - \left(\frac{2}{3}\theta\right)^2 = \frac{1}{18}\theta^2$$

よって、σ^2の標本不偏分散をU^2とすると、

$$E(U^2) = \sigma^2 = \frac{1}{18}\theta^2$$

したがって、$18U^2$がθ^2の不偏推定量である。

$$u^2 = \frac{1}{n-1}\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\}$$

$$= \frac{1}{4}\{(0.7^2+1.6^2+0.9^2+1.2^2+1.5^2) - 5\times 1.18^2\} = 0.147$$

よって、θ^2の不偏推定値は、　$18\times 0.147 = 2.646$

問題２（４）（ｂ）の別解

(b) $E(X^2)=\int_0^\theta x^2\cdot\frac{2x}{\theta^2}dx=\frac{2}{\theta^2}\int_0^\theta x^3dx=\frac{1}{2}\theta^2$

よって、$U^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$とすると、$E(U^2)=\frac{5}{2}\theta^2$

したがって、$\frac{2}{5}U^2$がθ^2の不偏推定量である。

$$u^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0.7^2+1.6^2+0.9^2+1.2^2+1.5^2=7.550$$

よって、θ^2の不偏推定値は、　$\frac{2}{5}\times 7.550=3.020$

なお、問題２（４）の(a)、(b)について、上記以外の不偏推定量を考えて不偏推定値を求めた場合でも正解とした。

［解答　問題2(5)］

求める信頼区間を（ p_L, p_U ）とし、題意より精密　法を用いると、

$$p_L=\frac{n_2}{n_1F_{n_2}^{n_1}(\varepsilon/2)+n_2},\ p_U=\frac{m_1F_{m_2}^{m_1}(\varepsilon/2)}{m_1F_{m_2}^{m_1}(\varepsilon/2)+m_2}$$

ただし、

$$n_1=2(n-k+1),\quad n_2=2k, m_1=2(k+1),\quad m_2=2(n-k)$$

ここで、 $n=5,\ k=1$だから、

$$n_1=10,\quad n_2=2$$

$$m_1=4,\quad m_2=8$$

F分布表より

$$F_2^{10}(0.025)=39.398, F_8^4(0.025)=5.053$$

したがって、

$$p_L=\frac{2}{10\times 39.398+2}=0.00505\ \rightarrow\ 0.005$$

$$p_U=\frac{4\times 5.053}{4\times 5.053+8}=0.71643\ \rightarrow\ 0.716$$

よって、求める信頼区　間は（ 0.005 ,0.716）である。

[解答　問題2(6)]

仮説 $\rho = 0$ のもとでは、$\dfrac{\sqrt{18}r}{\sqrt{1-r^2}}$ は自由度 18 の t 分布に従う。

よって、棄却域は $\left|\dfrac{\sqrt{18}r}{\sqrt{1-r^2}}\right| > t_{18}(0.025) = 2.101$ となる。

従って、$\dfrac{18r^2}{1-r^2} > 2.101^2$ より、$|r| > \sqrt{\dfrac{2.101^2}{18+2.101^2}} = 0.444$

[解答　問題2(7)]

項目	$\mid \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \mid$	$\mid z \mid = \dfrac{\mid \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \mid}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \dfrac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}}$
①仕事の適正	0.12	2.909
②給与の水準	0.06	1.466
③資格の取得	0.07	1.820
④服装	0.07	1.988
⑤アフター5 の過ごし方	0.08	2.014

棄却域は、$|z|>1.96$ より、①、④、⑤

[解答　問題2(8)]

$X_{(n)}$ の分布関数を $F_n(x)$ とすると、

$$F_n(x) = P(X_{(n)} \le x) = P(X_1 \le x, X_2 \le x, \cdots, X_n \le x) = x^n$$

よって、$X_{(n)}$ の確率密度関数は nx^{n-1} となるため、

$$E(X_{(n)}) = \int_0^1 nx^n dx = \left[\frac{n}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{n}{n+1}$$

従って、

$$G_n(y) = P(Y_n \le y) = P\left\{(n+1)\left(X_{(n)} - \frac{n}{n+1}\right) \le y\right\} = P\left(X_{(n)} \le \frac{y+n}{n+1}\right) = \left(\frac{y+n}{n+1}\right)^n$$

よって、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} G_n(y) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{y+n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y-1}{n+1}\right)^n = e^{y-1}$

[解答　問題3]

(1)

頂点kから出発してクモに捕らえられるまでの時間(余命)をX_k、次に向かう頂点の番号をY_kとする。

このY_kにより条件付けると$E(X_k)=E(E(X_k\,|\,Y_k))$　k=1,2,3

これを具体的に書き表す。

①k＝1 のとき

頂点 1 から出ている 3 つの辺は、1 つは頂点 0 に、2 つは頂点 2 に通じているから

$E(X_1)=E(X_1\,|\,Y_1=0)P(Y_1=0)+E(X_1\,|\,Y_1=2)P(Y_1=2)$

方向の選択はランダムであるから$P(Y_1=0)=\dfrac{1}{3},P(Y_1=2)=\dfrac{2}{3}$であり、$E(X_1\,|\,Y_1=0)$は移動後捕らえられてしまうから余命は 1 である。　$E(X_1\,|\,Y_1=2)$については移動後、頂点 2 から出発する場合の余命に等しいくなるから$E(X_1\,|\,Y_1=2)=1+E(X_2)$であることがわかる。

以上から

$$E(X_1)=E(X_1\,|\,Y_1=0)P(Y_1=0)+E(X_1\,|\,Y_1=2)P(Y_1=2)=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{2}{3}(1+E(X_2))\ ..\mathrm{A}$$

②k=2 のとき

頂点 2 から出ている 3 つの辺は、1 つは頂点 3 に、2 つは頂点 1 に通じているから

$E(X_2)=E(X_2\,|\,Y_2=3)P(Y_2=3)+E(X_2\,|\,Y_2=1)P(Y_2=1)$

①同様に考えて$E(X_2\,|\,Y_2=3)=1+E(X_3),E(X_2\,|\,Y_2=1)=1+E(X_1)$

従って$E(X_2)=\dfrac{1}{3}\cdot(1+E(X_3))+\dfrac{2}{3}\cdot(1+E(X_1))\ ..\mathrm{B}$

③k=3 のとき

頂点 3 から出る辺はどれも頂点 2 に通じているから

$E(X_3)=1+E(X_2)\ ..\mathrm{C}$

答えは以上のA, B, C式となる。

(2)

A, B, Cの連立方程式をといて

$E(X_1)=7$

$E(X_2)=9$

$E(X_3)=10$

[解答　問題3](別解)

(1)

X_k の余命が t である確率を $P(X_k=t)$ とする。

$$\underline{E(X_1)}=\sum_{t=1}^{\infty}t\times P(X_1=t)=1\times P(X_1=1)+\sum_{t=2}^{\infty}t\times P(X_1=t)$$

今、$P(X_1=1)=1/3$　、$P(X_1=t)=\frac{2}{3}\times P(X_2=t-1)$　$(t\geq 2)$ が成り立つことより

$$\underline{E(X_1)}=\frac{1}{3}+\sum_{t=2}^{\infty}t\times\frac{2}{3}\times P(X_2=t-1)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\sum_{i=1}^{\infty}(i+1)\times P(X_2=i)$$

$$\underline{E(X_1)}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\sum_{i=1}^{\infty}P(X_2=i)+\frac{2}{3}\times\sum_{i=1}^{\infty}i\times P(X_2=i)=1+\frac{2}{3}\underline{E(X_2)}$$

同様に、

$$\underline{E(X_2)}=1+\frac{2}{3}\times\underline{E(X_1)}+\frac{1}{3}\times\underline{E(X_3)}$$

$$\underline{E(X_3)}=1+\underline{E(X_2)}$$

となる。

［解答　問題4］

(1) $u(0.025) = 1.960$。

上限：$(955-677)+1.960\cdot\sqrt{\dfrac{100^2}{8}+\dfrac{105^2}{10}} = 373.065$

下限：$(955-677)-1.960\cdot\sqrt{\dfrac{100^2}{8}+\dfrac{105^2}{10}} = 182.935$

ゆえに、$182.935 \leqq \mu_A - \mu_B \leqq 373.065$

(2) 各マーケット利用者数の分散は等しいことを検定する。（等分散検定）

$$F_0 = \frac{10\times 111^2/(10-1)}{8\times 93^2/(8-1)} = 1.385$$

であるが、これをF－分布の上側 2.5%点と比べると、

$1.385 < F_7^9(0.025) = 4.823$

を得る。したがって、帰無仮説 $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ は採択され、等分散性を認めることができる。

t分布の自由度は $8+10-2=16$。$\varepsilon/2 = 0.05/2 = 0.025$。t分布表より $t_{16}(0.025) = 2.120$。

上限：$(955-677)+2.120\cdot\sqrt{\dfrac{8\cdot 93^2+10\cdot 111^2}{8+10-2}\cdot\left(\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{10}\right)} = 388.274$

下限：$(955-677)-2.120\cdot\sqrt{\dfrac{8\cdot 93^2+10\cdot 111^2}{8+10-2}\cdot\left(\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{10}\right)} = 167.726$

ゆえに、$167.726 \leqq \mu_A - \mu_B \leqq 388.274$

(3) 帰無仮説 $H_0 : \mu_A = \mu_B$、対立仮説 $H_1 : \mu_A > \mu_B$ である。

$$t = \frac{|955-677|}{\sqrt{\dfrac{8\cdot 93^2+10\cdot 111^2}{8+10-2}\cdot\left(\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{10}\right)}} = 5.345 > t_{16}(0.05) = 1.746$$

よって、帰無仮説は棄却され、$\mu_A > \mu_B$ といえる。