保 険 数 学 1（問 題）

問題1．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（50点）

（I）次の(1)から(8)までについて、それぞれ選択肢の中から正しい答えを選んで、所定の解答用紙の指定欄にその記号 [(1)については(A)から(F)のうちいずれか一つ、(5)については(A)から(E)のうち正しいものすべて、それ以外は(A)から(J)のうちいずれか一つ。] を記入せよ。

(1) 死力 $\mu_x\ (>0)$ が x の増加関数であれば、μ_x と q_{x-1} と $\dfrac{q_x}{p_x}$ の大小関係を示す式は次のうちどれか。

(A) $\mu_x < q_{x-1} < \dfrac{q_x}{p_x}$　(B) $\mu_x < \dfrac{q_x}{p_x} < q_{x-1}$　(C) $q_{x-1} < \mu_x < \dfrac{q_x}{p_x}$

(D) $q_{x-1} < \dfrac{q_x}{p_x} < \mu_x$　(E) $\dfrac{q_x}{p_x} < \mu_x < q_{x-1}$　(F) $\dfrac{q_x}{p_x} < q_{x-1} < \mu_x$

(2) 第1の生命表の死力を $\mu_x^{(1)}$，第2の生命表の死力を $\mu_x^{(2)}$ とする。

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\mu_x^{(1)}}\right) = -0.08\cdot\dfrac{1}{\mu_x^{(1)}}$，$\mu_x^{(2)} = 3\mu_x^{(1)}$ のとき、第2の生命表の ${}_n p_x^{(2)}$ は、第1の生命表の ${}_n p_{x+a}^{(1)}$ $(a>0)$ に等しくなる。このとき、a の値に最も近いものは次のうちどれか。必要ならば $\log 0.08 = -2.5257$，$\log 3 = 1.0986$ を用いよ。

(A)	7	(B)	8	(C)	9	(D)	10	(E)	11
(F)	12	(G)	13	(H)	14	(I)	15	(J)	16

(3) $l_{40} = 98{,}092$，$l_{45} = 97{,}465$，$\mathring{e}_{40} = 43.21$，$\mathring{e}_{45} = 38.47$ のとき、${}_5m_{40}$ の値に最も近いものは次のうちどれか。なお、$l_x\ (40 \leqq x < 45)$ は直線では近似されないものとする。

(A)	0.0012800	(B)	0.0012805	(C)	0.0012810	(D)	0.0012815	(E)	0.0012820
(F)	0.0012825	(G)	0.0012830	(H)	0.0012835	(I)	0.0012840	(J)	0.0012845

(4) x歳加入 保険期間n年 年払 全期払込 保険金年末支払の次の表(a) (b) (c)のとおりの保険を考える。

	種類	平準払純保険料
(a)	定期保険	死亡保険金 1 に対して 11.0‰
(b)	死亡時に満期保険金の 2 倍を支払う養老保険	満期保険金 1 に対して 51.5‰
(c)	死亡時に既払込純保険料を返還する生存保険	満期保険金 1 に対して 36.0‰

このとき、死亡時に既払込純保険料の 50.0%を返還する生存保険について満期保険金 1 に対する平準払純保険料の値に最も近いものは次のうちどれか。

(A) 31.2‰ (B) 31.4‰ (C) 31.6‰ (D) 31.8‰ (E) 32.0‰
(F) 32.2‰ (G) 32.4‰ (H) 32.6‰ (I) 32.8‰ (J) 33.0‰

(5)次の不等式のうち、正しい関係を表している不等式の記号をすべて解答欄に記入せよ。 ただし、$k>1, n>1$とする。
（正しい不等式が一つもない場合は、解答欄に「解なし」と記入せよ）

(A) $i^{(k)} < \delta$ (B) $v \cdot (Ia)_{\overline{n|}} < (a_{\overline{n|}})^2$ (C) $\overline{a}_x < \dfrac{1}{\delta}$

(D) $\overline{A}^{\ 1}_{x:\overline{n|}} < A^{(k)\,1}_{x:\overline{n|}}$ (E) $P_{x:\overline{n|}} < P^{(k)}_{x:\overline{n|}}$

(6) x歳加入 保険期間 n年 年払 全期払込養老保険 (保険金額 1 保険金年末支払)において ${}_tV_{x:\overline{n|}} = 0.24372$, $\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} = 14.92181$, $q_{x+t} = 0.00167$ とするとき、
第 $t+1$ 年度の危険保険料の値に最も近いものは次のうちどれか。

(A) 0.00112 (B) 0.00114 (C) 0.00116 (D) 0.00118 (E) 0.00120
(F) 0.00122 (G) 0.00124 (H) 0.00126 (I) 0.00128 (J) 0.00130

(7) $P_{x:\overline{n|}} = 0.079$, $P^{1}_{x:\overline{n-1|}} = 0.001$, $P_{x:\overset{\ \ 1}{\overline{n-1|}}} = 0.088$ のとき、予定利率 i の値に最も近いものは次のうちどれか。

(A) 0.028 (B) 0.029 (C) 0.030 (D) 0.031 (E) 0.032
(F) 0.033 (G) 0.034 (H) 0.035 (I) 0.036 (J) 0.037

(8) x歳加入 年払　終身払込終身保険（保険金額１ 保険金年末支払）において、予定利率$i=0.05$、純保険料$P_x=0.010892$、$q_{\omega-2}=0.7199$（ωは最終年齢）のとき、${}_{\omega-x-2}V_x$の値に最も近いものは次のうちどれか。

(A)	0.92024	(B)	0.92588	(C)	0.93698	(D)	0.93735	(E)	0.94149
(F)	0.95065	(G)	0.96112	(H)	0.96950	(I)	0.98606	(J)	0.98911

(Ⅱ) 次の (1) と(2) について、それぞれ空欄に当てはまる最も適当な数値、記号または算式を最も簡潔な形で所定の解答用紙の指定欄に記入し、その計算過程を指定欄に簡潔に明示せよ。計算過程の記入のない答案は採点の対象とならない。

(1) $\left(\dfrac{dv^n}{d\delta}\right)\div\left(\dfrac{dv^n}{di}\right)=\boxed{}$

(2) x歳加入 保険期間n年の定期保険（保険金額１ 保険金年末支払）について、第t保険年度の予定利率i_tが

$$i_t=(1+j)^{t-1}(1+i)-1 \quad (1>j>0\ ,\ j\text{は定数})$$

を満たすように変動する場合、この保険に対する一時払純保険料を考える。

任意のnおよびxに対して、この一時払純保険料の値は、x歳加入 保険期間n年 予定利率iの定期保険（第t保険年度の保険金は$\boxed{}$、保険金年末支払）の一時払純保険料に一致する。

問題２． 次の空欄に当てはまる最も適当な数値、記号または算式を所定の解答用紙の指定欄に記入せよ。 (30点)

(1) x歳加入　保険期間n年　年払　全期払込保険のt年経過時の責任準備金を考える。

養老保険の場合、$P_{x:\overline{n}|}$, $P^1_{x:\overline{t}|}$ および $P_{x:\overline{t}|}^{\;\;1}$ を用いて ${}_tV_{x:\overline{n}|}$ を表すと、${}_tV_{x:\overline{n}|}=\boxed{\text{①}}$、

定期保険の場合、$P^1_{x:\overline{n}|}$, $P^1_{x:\overline{t}|}$ および $P_{x:\overline{t}|}^{\;\;1}$ を用いて ${}_tV^1_{x:\overline{n}|}$ を表すと、${}_tV^1_{x:\overline{n}|}=\boxed{\text{②}}$ となる。

(2) また、x歳加入　保険期間n年　年払　全期払込養老保険のt年経過時の責任準備金は生命年金現価のみを用いて、${}_tV_{x:\overline{n}|}=1-\boxed{\text{③}}$ となる。

これを利用すれば、$(1-{}_tV_{x:\overline{n}|})\,P_{x:\overline{t}|}^{\;\;1}$ は生命年金現価のみを用いて、

$$(1-{}_tV_{x:\overline{n}|})\,P_{x:\overline{t}|}^{\;\;1}=\boxed{\text{④}}$$ と表せる。

$s<t<n$ を満たす s について、同様に、$(1-{}_sV_{x:\overline{n}|})\,P_{x:\overline{s}|}^{\;\;1}$ および $(1-{}_sV_{x:\overline{t}|})\,P_{x:\overline{s}|}^{\;\;1}$ も生命年金現価のみを用いて表せる。

(3) (1)および(2)の結果より、${}_sV_{x:\overline{t}|}$, ${}_sV_{x:\overline{n}|}$ および ${}_tV_{x:\overline{n}|}$ を用いて ${}_sV_{x:\overline{t}|}^{\;\;1}$ および ${}_sV^1_{x:\overline{t}|}$ を表すと、${}_sV_{x:\overline{t}|}^{\;\;1}=\boxed{\text{⑤}}$, ${}_sV^1_{x:\overline{t}|}=\boxed{\text{⑥}}$ となる。

この後者の式を変形すると、保険期間n年の養老保険のs年経過時の責任準備金は、

「保険期間 $\boxed{\text{⑦}}$ 年、保険金額が $\boxed{\text{⑧}}$ の養老保険の $\boxed{\text{⑨}}$ 年経過時の責任準備金」 と

「保険期間 $\boxed{\text{⑦}}$ 年、保険金額が $\boxed{\text{⑩}}$ の定期保険の $\boxed{\text{⑨}}$ 年経過時の責任準備金」 との和であることがわかる。

問題３． 次の空欄に当てはまる最も適当な数値、記号または算式を所定の解答用紙の指定欄に記入し、その計算過程を指定欄に明示せよ。
計算過程の記入のない答案は採点の対象とはならない。 (20 点)

40 歳加入 年払 保険料払込期間 20 年とし、次のような給付を行う保険を考える。

- 60 歳に到達するまでに死亡したときには、死亡保険金として 1 またはその年の保険年度末責任準備金のいずれか大きい額を保険年度末に支払う。
- 60 歳まで生存したときは、60 歳から年金年額が 0.1 の 20 年確定年金(期始払)を支払う。

この保険はある保険年度以降において責任準備金が 1 を超えることとなるが、その保険年度を以下のとおり求めることとする。なお、計算にあたっては下表の数値を用いること。

まず、60 歳まで生存したときの年金開始時点における年金原資(すなわち、即時開始年金の一時払保険料)は $\boxed{①}$ である。

(小数点以下第 5 位四捨五入で、小数点以下第 4 位まで求めよ。)

つぎに、保険年度末責任準備金が 1 を超える最初の保険年度を第 $k+1$ 保険年度としたとき、 k は以下の式を満たす最大の整数である。

$$\ddot{a}_{40:\overline{k|}} \leqq \{ \boxed{②} / (\boxed{①} -1)\}$$

したがって、上記の関係式より k の値を求めると、$k =$ $\boxed{③}$ となり、

求める保険年度 $k+1$ は $\boxed{③}$ +1 年度となることがわかる。

[表]

n	v^n	$\ddot{a}_{40:\overline{n|}}$	$\ddot{s}_{\overline{n|}}$
1	0.9804	1.0000	1.0200
2	0.9612	1.9789	2.0604
3	0.9423	2.9369	3.1216
4	0.9238	3.8744	4.2040
5	0.9057	4.7916	5.3081
6	0.8880	5.6887	6.4343
7	0.8706	6.5660	7.5830
8	0.8535	7.4238	8.7546
9	0.8368	8.2623	9.9497
10	0.8203	9.0817	11.1687

n	v^n	$\ddot{a}_{40:\overline{n|}}$	$\ddot{s}_{\overline{n|}}$
11	0.8043	9.8823	12.4121
12	0.7885	10.6641	13.6803
13	0.7730	11.4275	14.9739
14	0.7579	12.1724	16.2934
15	0.7430	12.8991	17.6393
16	0.7284	13.6075	19.0121
17	0.7142	14.2976	20.4123
18	0.7002	14.9695	21.8406
19	0.6864	15.6230	23.2974
20	0.6730	16.2582	24.7833

以上

保険数学１（解答）

問題１　（Ｉ）

設問番号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
解答欄	(C)	(H)	(E)	(G)	(B) (C) (E)	(D)	(I)	(B)

解答は上の表のとおりであり、以下に各設問の解答方法を略記する。

(1) ……… (C)　　二見隆著 生命保険数学　上巻 第２章　練習問題（1）　8を参照

$$q_{x-1} = \int_0^1 {}_t p_{x-1} \cdot \mu_{x-1+t} dt < \int_0^1 \mu_x dt = \mu_x$$

$$q_x = \int_0^1 {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt > \int_0^1 p_x \cdot \mu_x dt = p_x \cdot \mu_x$$

したがって、$q_{x-1} < \mu_x < \dfrac{q_x}{p_x}$

(2) ……… (H)

$h = 0.08$ とすると $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\mu_x^{(1)}}\right) = -h \cdot \dfrac{1}{\mu_x^{(1)}}$ より

$\mu_x^{(1)} = B c^x$ (Bは定数　、$h = \log c$)である。

$-\dfrac{d \log l_x^{(1)}}{dx} = \mu_x^{(1)} = Bc^x$ より、

$l_x^{(1)} = kg^{c^x}$ (kは定数、$\log\ g = -\dfrac{B}{\log c}$)、

${}_n p_x^{(1)} \ = \ g^{c^x (c^n - 1)}$ である。

$\mu_x^{(2)} = 3\mu_x^{(1)} \ = 3 B c^x$ であるので、

$\log g' = -\dfrac{3B}{\log c} = 3 \log g$ であるようなg'を用いて、

$l_x^{(2)} = k' g'^{c^x}$ 、${}_n p_x^{(2)} \ = \ g'^{c^x (c^n - 1)} = g^{3c^x (c^n - 1)}$ となる。

題意より $3 \ = \ c^a$ であるから、

$$a=\frac{\log 3}{\log c}=\frac{\log 3}{h}=\frac{1.0986}{0.08}=13.7325$$

$\boxed{\text{別解}}$

$${}_n p_x^{(2)} = {}_n p_{x+a}^{(1)} \cdots\cdots\cdots ①$$

$${}_n p_x^{*} = e^{-\int_0^n \mu_{x+t}^{*} dt} \cdots\cdots\cdots ②$$

全ての n において①式が成り立つので、②式により、

$\mu_x^{(2)} = \mu_{x+a}^{(1)}$ が成立する。

又、$\mu_x^{(2)} = 3\cdot\mu_x^{(1)}$ より、

$$3\cdot\mu_x^{(1)} = \mu_{x+a}^{(1)} \cdots\cdots\cdots ③$$

与式 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\mu_x^{(1)}}\right) = -0.08\cdot\dfrac{1}{\mu_x^{(1)}}$ より、

$$\log\mu_x^{(1)} = 0.08x + C\ (C\text{は定数}) \cdots\cdots\cdots ④$$

③ 式より

$\log 3\cdot\mu_x^{(1)} = \log\mu_{x+a}^{(1)}$

④ 式を代入すると、

$$\log\ 3 + 0.08x + C = 0.08(x+a) + C$$

$$a=\frac{\log 3}{0.08}=\frac{1.0986}{0.08}=13.7325$$

(3) ………(E)

$${}_5 m_{40} = \frac{l_{40}-l_{45}}{\int_0^5 l_{40+t}dt} = \frac{l_{40}-l_{45}}{l_{40}\times{}_5\mathring{e}_{40}} = \frac{l_{40}-l_{45}}{l_{40}\times\mathring{e}_{40}-l_{45}\times\mathring{e}_{45}} = 0.0012820$$

(注)テキスト(二見隆著　生命保険数学　上巻)P77 の関係式　${}_n m_x = \dfrac{{}_n q_x}{n\ (1-\frac{1}{2}\ {}_n q_x)}$

を用いると ${}_5m_{40}$=0.0012825 となるが、これは l_{x+t} が直線と仮定した場合の関係式であり、この関係式を用いた解(F)は不正解とした。

(4) ………(G)

（a）、（b）、（c）の保険料を、それぞれP$^{(a)}$、P$^{(b)}$、P$^{(c)}$とすると、

$$P^{(a)}=\frac{A^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}、\quad P^{(b)}=\frac{2A^{1}_{x:\overline{n}|}+A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\quad より、$$

$$\frac{A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}=P^{(b)}-2P^{(a)}=0.\ 0295$$

$$P^{(c)}=\frac{A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-(IA)^{1}_{x:\overline{n}|}}\quad より、\frac{(IA)^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}=1-\frac{A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\cdot P^{(c)}}$$

ここで、求める年払保険料をPとすると、

$$P=\frac{A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-\frac{1}{2}(IA)^{1}_{x:\overline{n}|}}\qquad=\frac{\dfrac{A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}}{1-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(IA)^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}}$$

$$=\frac{2P^{(c)}\left(P^{(b)}-2P^{(a)}\right)}{P^{(c)}+P^{(b)}-2P^{(a)}}\qquad=0.\ 03242\cdots$$

(5) ……… (B), (C), (E)

(A)

$$i^{(k)}=k\left\{e^{\frac{1}{k}\log(1+i)}-1\right\}$$
$$=k\left\{\frac{1}{k}\log(1+i)+\frac{\{\log(1+i)\}^2}{2k^2}+\cdots\right\}$$
$$>\log(1+i)=\delta$$

(B)

$$(a_{\overline{n}|})^2=(v+v^2+\cdots+v^n)(v+v^2+\cdots+v^n)$$
$$=v^2+2v^3+3v^4+\cdots+nv^{n+1}+\cdots$$
$$>v^2+2v^3+3v^4+\cdots+nv^{n+1}$$
$$=v(v+2v^2+3v^3+\cdots+nv^n)$$
$$=v\cdot(Ia)_{\overline{n}|}$$

(C)

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t {}_t p_x dt$$
$$< \int_0^\infty v^t dt = \frac{1}{\delta}$$

(D)，(E) は支払い時点から明らか。（テキスト　二見隆著　生命保険数学　上巻 P126, P167 参照）

(6) ……… (D)

第　$t+1$ 年度の危険保険料 ${}_{t+1}P^r$ は定義より

$${}_{t+1}P^r = vq_{x+t} \cdot (1 - {}_{t+1}V_{x:\overline{n}|}) \quad \cdots\cdots \text{①}$$ である。

責任準備金の再帰式より

$${}_tV_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|} - vq_{x+t} = vp_{x+t} \cdot {}_{t+1}V_{x:\overline{n}|}$$

$${}_{t+1}V_{x:\overline{n}|} = \frac{{}_tV_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|} - vq_{x+t}}{v \cdot (1 - q_{x+t})} \quad \cdots\cdots \text{②}$$

又、将来法により責任準備金は

$${}_tV_{x:\overline{n}|} = A_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} = 1 - (P_{x:\overline{n}|} + d) \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$ と表されるから、

$$d = \frac{1 - {}_tV_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}} - P_{x:\overline{n}|}$$

よって　$$v = 1 - d = 1 + P_{x:\overline{n}|} + \frac{{}_tV_{x:\overline{n}|} - 1}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}} \quad \cdots\cdots \text{③}$$

②、③式を①式に代入すると、

$${}_{t+1}P^r = vq_{x+t} \times \frac{v - vq_{x+t} - {}_tV_{x:\overline{n}|} - P_{x:\overline{n}|} + vq_{x+t}}{v \cdot (1 - q_{x+t})}$$

$$= q_{x+t} \times \frac{1 + \dfrac{{}_tV_{x:\overline{n}|} - 1}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}} - {}_tV_{x:\overline{n}|}}{(1 - q_{x+t})}$$

$$= \frac{q_{x+t}}{1 - q_{x+t}} \times (1 - {}_tV_{x:\overline{n}|}) \times (1 - \frac{1}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}})$$

$$=\frac{0.00167}{1-0.00167}\times(1-0.24372\ )\times(1-\frac{1}{14.92181})$$

$$=0.0011803183\cdots$$

$\boxed{\text{別解}}$

第 $t+1$ 年度の危険保険料 ${}_{t+1}P^{r}$ は定義より

$${}_{t+1}P^{r}=vq_{x+t}\cdot(1-{}_{t+1}V_{x:\overline{n}|})$$

したがって　${}_{t+1}P^{n}=vq_{x+t}\cdot\dfrac{\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$ ・・・・・・ ① である。

ここで、$\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}=1+vp_{x+t}\cdot\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}$　より

$$\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}=\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}-1}{v\cdot(1-q_{x+t})}\cdots\cdots ②$$

又、責任準備金の関係式　${}_{t}V_{x:\overline{n}|}=1-\dfrac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$ より

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=1-\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{1-{}_{t}V_{x:\overline{n}|}}\cdots\cdots ③$$

②、③式を①式に代入すると、

$${}_{t+1}P^{r}=\frac{q_{x+t}}{1-q_{x+t}}\cdot\frac{(\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}-1)\cdot(1-{}_{t}V_{x:\overline{n}|})}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}$$

$$=\frac{0.00167}{1-0.00167}\times\frac{(14.92181\ -1)\times(1-0.24372\ )}{14.92181}$$

$$=0.0011803183\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(7) ……… (I)

再帰式により

$${}_{n-1}V_{x:\overline{n}|}+P_{x:\overline{n}|}=vq_{x+n-1}+vp_{x+n-1}\cdot{}_{n}V_{x:\overline{n}|}=v\ \cdots\cdots ①$$

責任準備金の過去法の式により

$$
{}_{n-1}V_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n-1}}{D_{x+n-1}} \cdot P_{x:\overline{n}|} - \frac{M_x - M_{x+n-1}}{D_{x+n-1}}
$$

$$
= \frac{N_x - N_{x+n-1}}{D_{x+n-1}} \cdot P_{x:\overline{n}|} - \frac{N_x - N_{x+n-1}}{D_{x+n-1}} \times \frac{M_x - M_{x+n-1}}{N_x - N_{x+n-1}}
$$

$$
= \frac{P_{x:\overline{n}|} - P^{1}_{x:\overline{n-1}|}}{P_{x:\overline{n-1}|}^{\ \ \ 1}} \cdots\cdots\cdots ②
$$

②式を①式に代入すると、

$$
v = \frac{P_{x:\overline{n}|} - P^{1}_{x:\overline{n-1}|}}{P_{x:\overline{n-1}|}^{\ \ \ 1}} + P_{x:\overline{n}|}
$$

$$
i = \frac{1}{v} - 1 = \frac{1}{\dfrac{P_{x:\overline{n}|} - P^{1}_{x:\overline{n-1}|}}{P_{x:\overline{n-1}|}^{\ \ \ 1}} + P_{x:\overline{n}|}} - 1
$$

$$
= \frac{1}{\dfrac{0.079 - 0.001}{0.088} + 0.079} - 1 = 0.0358790\cdots\cdots
$$

(8) ……… (B)

$$
l_{\omega-2}({}_{\omega-x-2}V_x + P_x)(1+i) - d_{\omega-2} = l_{\omega-1} \cdot {}_{\omega-x-1}V_x \cdots ①
$$

$$
l_{\omega-1}({}_{\omega-x-1}V_x + P_x)(1+i) - d_{\omega-1} = l_{\omega} \cdot {}_{\omega-x}V_x \cdots\cdots\cdots ②
$$

前提条件および$d_{\omega-1} = l_{\omega-1}$ 、 $l_\omega = 0$を②に代入し、${}_{\omega-x-1}V_x$=0.94148895238•••

この${}_{\omega-x-1}V_x$、および前提条件を①に代入し、${}_{\omega-x-2}V_x$=0.92588134222•••

問題1 （II）（1）二見隆著 生命保険数学 上巻 第1章 練習問題（1） 8 を参照

$\frac{1}{v}$ または $1+i$, e^{δ} , v^{-1}

$v^n = e^{-n\delta}$ より $\dfrac{dv^n}{d\delta} = -ne^{-n\delta} = -nv^n$

また、$\dfrac{dv^n}{di} = \dfrac{d\delta}{di} \cdot \dfrac{dv^n}{d\delta} = \dfrac{d\log(1+i)}{di} \cdot (-nv^n) = \dfrac{1}{1+i} \cdot (-nv^n) = -nv^{n+1}$

$$\therefore \left(\frac{dv^n}{d\delta}\right) \div \left(\frac{dv^n}{di}\right) = \frac{1}{v} = 1+i$$

(2) …… $(1+j)^{-\frac{t(t-1)}{2}}$

第t保険年度の保険金をα_tとおき、$v_t = \frac{1}{1+i_t}$とおく。このとき、

$$\sum_{t=1}^{n}\prod_{s=1}^{t} v_s \cdot {}_{t-1|}q_x = \sum_{t=1}^{n} \alpha_t \cdot v^t \cdot {}_{t-1|}q_x \quad \text{となる。}$$

この式が任意のnで成立することから、

$$\prod_{s=1}^{t} v_s \cdot {}_{t-1|}q_x = \alpha_t \cdot v^t \cdot {}_{t-1|}q_x \quad \text{となる。}$$

さらに、任意のxで成立することから、

$$\prod_{s=1}^{t} v_s = \alpha_t \cdot v^t \quad \text{となる。}$$

したがって、$\dfrac{\alpha_t}{\alpha_{t-1}} = \dfrac{1}{(1-j)^{t-1}}$となり、この漸化式を解くと、

$\alpha_1 = 1$　であることから $\alpha_t = (1+j)^{-\frac{t(t-1)}{2}}$

したがって、第t保険年度の保険金は$\boxed{(1+j)^{-\frac{t(t-1)}{2}}}$ と表わされる。

別解

題意の式　$i_t = (1+j)^{t-1}(1+i) - 1$　から

$$i_t + 1 = (1+j)^{t-1}(1+i)$$

$$\prod_{s=1}^{t}(1+i_s)^{-1} = (1+j)^{-\sum_{s=1}^{t}(s-1)} \times (1+i)^{-t}$$

が成立する。

予定利率i_tの定期保険の保険金１は予定利率ｉの定期保険の保険金Ｓｔに任意のｎ、ｘで一致することから

$$S_t \times (1+i)^{-t} = \prod_{s=1}^{t}(1+i_s)^{-1} \quad \text{が成立}$$

$$S_t = (1+j)^{-\sum_{s=1}^{t}(s-1)} = (1+j)^{-\frac{1}{2}t(t-1)}$$

問題2

（1）過去法による責任準備金の式から

$$A_{x:\overline{t}|}^{\ \ 1}\cdot {}_tV_{x:\overline{n}|} = P_{x:\overline{n}|}\cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}|} - A^{1}_{x:\overline{t}|}$$

両辺を$\ddot{a}_{x:\overline{t}|}$で割ると　$P_{x:\overline{t}|}^{\ \ 1}\cdot {}_tV_{x:\overline{n}|} = P_{x:\overline{n}|} - P^{1}_{x:\overline{t}|}$

ゆえに　$${}_tV_{x:\overline{n}|} = \frac{P_{x:\overline{n}|} - P^{1}_{x:\overline{t}|}}{P_{x:\overline{t}|}^{\ \ 1}}$$

定期保険の場合も同様にして、

$$A_{x:\overline{t}|}^{\ \ 1}\cdot {}_tV^{1}_{x:\overline{n}|} = P^{1}_{x:\overline{n}|}\cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}|} - A^{1}_{x:\overline{t}|}$$

両辺を$\ddot{a}_{x:\overline{t}|}$で割ると　$P_{x:\overline{t}|}^{\ \ 1}\cdot {}_tV^{1}_{x:\overline{n}|} = P^{1}_{x:\overline{n}|} - P^{1}_{x:\overline{t}|}$

ゆえに　$${}_tV^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{P^{1}_{x:\overline{n}|} - P^{1}_{x:\overline{t}|}}{P_{x:\overline{t}|}^{\ \ 1}}$$

（2）　$${}_tV_{x:\overline{n}|} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

$$(1-{}_tV_{x:\overline{n}|})P_{x:\overline{t}|}^{\ \ 1} = \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \times \frac{A_{x:\overline{t}|}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}}$$

$$= \frac{\dfrac{N_{x+t}-N_{x+n}}{D_{x+t}}\cdot\dfrac{D_{x+t}}{D_x}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\cdot\ddot{a}_{x:\overline{t}|}}$$

$$= \frac{\dfrac{N_{x+t}-N_{x+n}}{D_x}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\cdot\ddot{a}_{x:\overline{t}|}}$$

$$= \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} - \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

同様に、$(1-{}_sV_{x:\overline{n}|})P_{x:\overline{s}|}^{\ \ \ 1}=\dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}-\dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$

$$(1-{}_sV_{x:\overline{t}|})P_{x:\overline{s}|}^{\ \ \ 1}=\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}-\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}}$$

（３）（１）および（２）の結果より、

$$\begin{aligned}(1-{}_tV_{x:\overline{n}|})P_{x:\overline{t}|}^{\ \ \ 1}&=\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}}-\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}=\left(\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}-\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\right)-\left(\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{s}|}}-\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}}\right)\\&=(1-{}_sV_{x:\overline{n}|})P_{x:\overline{s}|}^{\ \ \ 1}-(1-{}_sV_{x:\overline{t}|})P_{x:\overline{s}|}^{\ \ \ 1}\\&=({}_sV_{x:\overline{t}|}-{}_sV_{x:\overline{n}|})P_{x:\overline{s}|}^{\ \ \ 1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore {}_sV_{x:\overline{t}|}^{\ \ \ 1}&={}_sV_{x:\overline{t}|}-{}_sV^{1}_{x:\overline{t}|}\\&=\frac{P_{x:\overline{t}|}-P^{1}_{x:\overline{s}|}}{P_{x:\overline{s}|}^{\ \ \ 1}}-\frac{P^{1}_{x:\overline{t}|}-P^{1}_{x:\overline{s}|}}{P_{x:\overline{s}|}^{\ \ \ 1}}\\&=\frac{P_{x:\overline{t}|}^{\ \ \ 1}}{P_{x:\overline{s}|}^{\ \ \ 1}}\\&=\frac{{}_sV_{x:\overline{t}|}-{}_sV_{x:\overline{n}|}}{1-{}_tV_{x:\overline{n}|}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}_sV^{1}_{x:\overline{t}|}&={}_sV_{x:\overline{t}|}-{}_sV_{x:\overline{t}|}^{\ \ \ 1}\\&=\frac{{}_sV_{x:\overline{t}|}-{}_sV_{x:\overline{t}|}\cdot{}_tV_{x:\overline{n}|}-{}_sV_{x:\overline{t}|}+{}_sV_{x:\overline{n}|}}{1-{}_tV_{x:\overline{n}|}}\\&=\frac{{}_sV_{x:\overline{n}|}-{}_sV_{x:\overline{t}|}\cdot{}_tV_{x:\overline{n}|}}{1-{}_tV_{x:\overline{n}|}}\end{aligned}$$

後者の式を変形すると、

$${}_sV_{x:\overline{n}|}={}_sV_{x:\overline{t}|}\cdot{}_tV_{x:\overline{n}|}+{}_sV^{1}_{x:\overline{t}|}\cdot(1-{}_tV_{x:\overline{n}|})$$

設問番号	解答
①	$\dfrac{P_{x:\overline{n}\vert}-P_{\substack{1\\x:\overline{t}\vert}}}{P_{\substack{1\\x:\overline{t}\vert}}}$
②	$\dfrac{P_{\substack{1\\x:\overline{n}\vert}}-P_{\substack{1\\x:\overline{t}\vert}}}{P_{\substack{1\\x:\overline{t}\vert}}}$
③	$\dfrac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}\vert}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}}$
④	$\dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{t}\vert}}-\dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}}$
⑤	$\dfrac{{}_sV_{x:\overline{t}\vert}-{}_sV_{x:\overline{n}\vert}}{1-{}_tV_{x:\overline{n}\vert}}$
⑥	$\dfrac{{}_sV_{x:\overline{n}\vert}-{}_sV_{x:\overline{t}\vert}\cdot{}_tV_{x:\overline{n}\vert}}{1-{}_tV_{x:\overline{n}\vert}}$
⑦	t
⑧	${}_tV_{x:\overline{n}\vert}$
⑨	s
⑩	$1-{}_tV_{x:\overline{n}\vert}$

問題3

$\ddot{a}_{\overline{20}\vert}=v^{20}\cdot s_{\overline{20}\vert}=0.6730\times24.7833=16.6791609$　　　後記(注)参照

よって、年金原資は $16.6791609\times0.1=1.6679$

（答）① $\boxed{1.6679}$

年払純保険料を P、第 t 保険年度末責任準備金を ${}_tV$、年金原資を F とする。
題意より次の再帰式が成り立つ。

$${}_tV+P=v\cdot q_{40+t}+v\cdot p_{40+t}\cdot{}_{t+1}V \qquad (0\le t<k) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$${}_tV+P=v\cdot{}_{t+1}V \qquad (k\le t<19) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)式の両辺に $v^t\cdot{}_tp_{40}$ を掛けて、$t=0,1,\ldots\ldots,k-1$ について加えると、${}_0V=0$ により、

$$P\cdot\ddot{a}_{40:\overline{k}\vert}=A^{1}_{40:\overline{k}\vert}+v^k\cdot{}_kp_{40}\cdot{}_kV \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$ となる。

同様に、(2) 式の両辺に v^{t-k} を掛けて $t=k,k+1,\ldots,19$ について加えると、${}_{20}V=F$ により、

$$P \cdot \ddot{a}_{\overline{20-k|}} = v^{20-k} \cdot F - {}_kV \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$ となる。

$(3) \times \ddot{a}_{\overline{20-k|}} - (4) \times \ddot{a}_{40:\overline{k|}}$ として P を消去し、${}_kV$ について解くと、

$$_kV = \frac{v^{20-k} \cdot F \cdot \ddot{a}_{40:\overline{k|}} - A^{1}_{40:\overline{k|}} \cdot \ddot{a}_{\overline{20-k|}}}{\ddot{a}_{40:\overline{k|}} + v^k \cdot {}_kp_{40} \cdot \ddot{a}_{\overline{20-k|}}}$$ となる。

k は ${}_kV \le 1$ を満たす最大の整数なので、

$$v^{20-k} \cdot F \cdot \ddot{a}_{40:\overline{k|}} - A^{1}_{40:\overline{k|}} \cdot \ddot{a}_{\overline{20-k|}} \le \ddot{a}_{40:\overline{k|}} + v^k \cdot {}_kp_{40} \cdot \ddot{a}_{\overline{20-k|}}$$

$$v^{20-k} \cdot F \cdot \ddot{a}_{40:\overline{k|}} - \left(1 - d \cdot \ddot{a}_{40:\overline{k|}}\right) \cdot \ddot{a}_{\overline{20-k|}} \le \ddot{a}_{40:\overline{k|}}$$

$$\ddot{a}_{40:\overline{k|}}\left(v^{20-k} \cdot F - 1 + d \cdot \ddot{a}_{\overline{20-k|}}\right) \le \ddot{a}_{\overline{20-k|}}$$

$$\ddot{a}_{40:\overline{k|}}\left(v^{20-k} \cdot F - v^{20-k}\right) \le \ddot{a}_{\overline{20-k|}}$$

$$\therefore \quad \ddot{a}_{40:\overline{k|}} \le \frac{\ddot{s}_{\overline{20-k|}}}{F-1}$$

（答） ② $\boxed{\ddot{s}_{\overline{20-k|}}}$

k	$(F-1)\ddot{a}_{40:\overline{k|}}$	$\ddot{S}_{\overline{20-k|}}$
12	7.1226	8.7546
13	7.6324	7.5830

よって、

（答） ③ $\boxed{12}$

(注) ①の数値を計算するには次の方法が考えられる。

正しい計算過程によって求められていれば、それぞれ正解とした。

（例）

(1) $\ddot{a}_{\overline{20|}} \times 0.1 = \dfrac{1-v^{20}}{1-v} \times 0.1 = \dfrac{1-0.6730}{1-0.9804} \times 0.1 = \dfrac{0.3270}{0.0196} \times 0.1 = 1.668367 \fallingdotseq 1.6684$

(2) $\ddot{a}_{\overline{20|}} \times 0.1 = v^{20} \cdot \ddot{s}_{\overline{20|}} \times 0.1 = 0.6730 \times 24.7833 \times 0.1 = 1.667916 \fallingdotseq 1.6679$

(3) $\ddot{a}_{\overline{20|}} \times 0.1 = \sum_{t=0}^{19} v^t \times 0.1 = (1 + 0.9804 + 0.9612 + \cdots\cdots + 0.6864) \times 0.1 = 1.66785 \fallingdotseq 1.6679$