数学２（問題）

［問題１から問題４を通じて、必要があれば（付表）に記載された数値を用いよ。］

問題１．次の各問の $\boxed{}$ に入る答のみを、所定の解答用紙に記入せよ。（３５点）

(1) 正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従う母集団があり、σ^2 は既知とする。

有意水準 0.01 による帰無仮説 $\mu=\mu_0$、対立仮説 $\mu=\mu_0+\dfrac{\sigma}{4}$ の右側検定で、第２種の誤りの起こる確率を 0.05 以下とするには標本の大きさを少なくとも $\boxed{}$ 以上とする必要がある。

(2) ある工場では、１日の作業の終わりにその日に製造した製品の中から n 個のサンプルを抜き取り、その中の不良品の数が２個以上の時には製造工程に何らかの問題があると判断することにしている。母集団の不良品率を p とするとき、この抜取検査の検定方式の検出力関数は、$\beta(p)=$ $\boxed{}$ である。

(3) １から 15 までの相異なる数字を書いた１組 15 枚のカードを２組混ぜ合わせ、そこから重複を許さないで独立に４枚のカードを抽出するとき、抽出された４枚のカードの数字の標本平均を $\bar{x}$ とする。このとき、標本変量平均 $\bar{X}$ の分散は、$V(\bar{X})=$ $\boxed{}$ である。（小数点以下第３位四捨五入）

(4) 平均値 μ_1、分散 $(1.5)^2$ の母集団から抽出した大きさ n_1 の標本の標本変量平均を $\bar{X}$、平均値 μ_2、分散 $(2.5)^2$ の母集団から抽出した大きさ n_2 の標本の標本変量平均を $\bar{Y}$ とする。今、平均値の差 $\mu_1-\mu_2$ の推定量として $\bar{X}-\bar{Y}$ をとるとき、$n_1+n_2=136$ という条件の下で、分散 $V(\bar{X}-\bar{Y})$ を最小とするためには、$n_1=$ $\boxed{}$ とすればよい。

(5) 区間 $(\theta,\theta+1)$ 上の一様分布に従う母集団から大きさ n の標本をとり、$T=X_{max}+C$（C は定数）を用いて θ を推定する。ここに、X_{max} は最大標本値 $X_{max}=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ とする。T が θ の不偏推定量となるのは C= $\boxed{}$ の場合であり、このとき、T の分散は $\boxed{}$ である。

(6)　母集団分布が次の確率密度関数 $f(x;\lambda,\alpha)$ を持つガンマ (Γ) 分布に従っているとする。

$$\text{確率密度関数}\quad f(x;\lambda,\alpha)=\begin{cases}\dfrac{\alpha^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)}x^{\lambda-1}e^{-\alpha x} & (x>0)\\ 0 & (x\le 0)\end{cases}$$

（ここに、$\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数を表し、$\lambda>0,\ \alpha>0$）

この母集団から n 個の標本をとるとき、標本変量平均 $\overline{X}$ を用いた α の最尤推定量は $\boxed{}$ となる。（ただし、λ は既知とする。）

また、この推定量は、不偏性、有効性、充足性（十分性）のうち $\boxed{}$ （複数解答可）を有する。

（注）$\overline{X}$ は確率密度関数 $f(x;n\lambda,n\alpha)$ を持つ分布に従う。

(7)　母集団が確率密度関数 $f(x)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1} & (0\le x\le 1)\\ 0 & (x<0,1<x)\end{cases}$ により定義される分布に従うとき、１個の標本 x をとり、帰無仮説 $H_0:\theta=\theta_0=2$ を対立仮説 $H_1:\theta=\theta_1=3$ に対して検定する。

このとき、有意水準 0.05 に対する最強力（最有力）検定の棄却域は $\boxed{}$ である。

問題２．次の文中の①から⑮の空欄に当てはまる最も適当な数値、語句あるいは算式を所定の解答用紙に記入せよ。（１５点）

(1) サイコロを 120 回振ったところ、次の表のような結果を得た。

目の数	1	2	3	4	5	6
回数	24	19	17	25	14	21

今、帰無仮説 $H_0: p_i = \frac{1}{6}$ （p_i は i の目が出る確率、i=1, 2, …, 6）として、このサイコロが正しいと言えるかどうかを有意水準 0.05 で検定する。

帰無仮説 H_0 の下では、120 回中、各目の出る期待回数は 20 回となるので、f_i を i の目が出る回数を表わす確率変数とすると、統計量 $T = \boxed{\text{①}}$ は自由度 $\boxed{\text{②}}$ の $\boxed{\text{③}}$ 分布に従う。

ここで、統計量の実現値は、$T_0 = \boxed{\text{④}}$ となるので、この検定の結果、H_0 は $\boxed{\text{⑤}}$ される。

(2) 平均値が σ（σ は未知）の指数分布に従う母集団から抽出された大きさ n の標本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を用いて信頼係数 $(1-\varepsilon)$ の σ の信頼区間を次のように求める。

一つの標本変量 X は平均値 σ の指数分布に従うことから、その確率密度関数 $f(x)$ は、$f(x) = \boxed{\text{⑥}}\ (x \geq 0)$ となる。また、その分布関数を $F(x)$ とする。

今、$Y = \frac{2}{\sigma}X$ とし、その確率密度関数を $g(y)$、分布関数を $G(y)$ とすると、

$$g(y) = \frac{d}{dy}G(y) = \frac{d}{dy}P(Y \leq y) = \frac{d}{dy}F(\boxed{\text{⑦}}) = \boxed{\text{⑧}} \quad (y \geq 0) \text{ となる。}$$

この $g(y)$ は自由度 $\boxed{\text{⑨}}$ の $\boxed{\text{⑩}}$ 分布の確率密度関数に一致する。

よって、$Y_i = \frac{2}{\sigma}X_i$ とした時、$Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = \frac{2}{\sigma}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ は、$\boxed{\text{⑩}}$ 分布の $\boxed{\text{⑪}}$ 性により自由度 $\boxed{\text{⑫}}$ の $\boxed{\text{⑬}}$ 分布に従うことになる。

以上より、信頼係数 $(1-\varepsilon)$ の σ の信頼区間は、$\boxed{\text{⑭}} \leq \sigma \leq \boxed{\text{⑮}}$ と求められる。

問題３．ある製品を１個組み立てるのに、Ａ工場とＢ工場で組み立て時間を測定したところ、次表のような結果を得た。

Ａ工場およびＢ工場における組み立て時間はそれぞれ正規分布$N(\mu_A, \sigma_A^2)$，$N(\mu_B, \sigma_B^2)$に従っているものとする。このとき、有意水準0.05として次の問に答えよ。（２５点）

	標本数	標本平均	標本分散
Ａ工場	$n_A = 10$	$\bar{x}_A = 65$	$s_A^2 = 100$
Ｂ工場	$n_B = 9$	$\bar{x}_B = 55$	$s_B^2 = 79$

(1) Ａ工場、Ｂ工場における組み立て時間の分散には差があると言えるか。

(2) Ａ工場、Ｂ工場における組み立て時間の平均には差があると言えるか。

(3) 過去のデータによると、Ａ、Ｂ両工場を合わせた組み立て時間の分散$\sigma^2 = 52$であった。このとき、今回の調査結果により、Ａ、Ｂ両工場を合わせた組み立て時間の分散は今までと変わったと言えるか。

問題４．正規母集団$N(\mu, \sigma^2)$の母平均に関する検定で、母分散σ^2を未知として、帰無仮説$H_0 : \mu = \mu_0$を対立仮説$H_1 : \mu \neq \mu_0$に対して検定する方法を次のように導く。このとき、次の問に答えよ。（２５点）

(1) この母集団からの大きさｎの標本$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$を用いてμおよびσ^2の最尤推定量を求めよ。

(2) (1)でμを既知$(\mu = \mu_0)$としたときのσ^2の最尤推定量を求めよ。

(3) 帰無仮説H_0を検定するための尤度比λは
$$\lambda = \left\{ 1 + \frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i)^2} \right\}^{-\frac{n}{2}}$$
で与えられることを示せ。

(4) (3)を用いてこの検定の有意水準αの棄却域を求めよ。

（付表）

Ⅰ．標準正規分布の上側ε点：u(ε)

ε	0.159	0.050	0.025	0.023	0.010	0.005
u(ε)	1.000	1.645	1.960	2.000	2.326	2.576

Ⅱ．自由度φのｔ分布の上側ε点：$t_{\phi}(\varepsilon)$

φ＼ε	0.050	0.025	0.010	0.005
4	2.132	2.776	3.747	4.604
5	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.725	2.086	2.528	2.845

Ⅲ．自由度φのχ^2分布の上側ε点：$\chi^2_{\phi}(\varepsilon)$

φ＼ε	0.050	0.025	0.010	0.005
4	9.488	11.143	13.277	14.860
5	11.070	12.832	15.086	16.750
6	12.592	14.449	16.812	18.548
7	14.067	16.013	18.475	20.278
8	15.507	17.535	20.090	21.955
9	16.919	19.023	21.666	23.589
10	18.307	20.483	23.209	25.188
11	19.675	21.920	24.725	26.757
12	21.026	23.337	26.217	28.300
13	22.362	24.736	27.688	29.819
14	23.685	26.119	29.141	31.319
15	24.996	27.488	30.578	32.801
16	26.296	28.845	32.000	34.267
17	27.587	30.191	33.409	35.718
18	28.869	31.526	34.805	37.156
19	30.144	32.852	36.191	38.582
20	31.410	34.170	37.566	39.997

Ⅳ. 分母の自由度 m、分子の自由度 n の F 分布の上側ε点：$F_m^n(\varepsilon)$

ε=0.050

m＼n	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735	4.704	4.678	4.655	4.636	4.619
6	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060	4.027	4.000	3.976	3.956	3.938
7	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637	3.603	3.575	3.550	3.529	3.511
8	3.688	3.581	3.500	3.438	3.388	3.347	3.313	3.284	3.259	3.237	3.218
9	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137	3.102	3.073	3.048	3.025	3.006
10	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978	2.943	2.913	2.887	2.865	2.845
11	3.204	3.095	3.012	2.948	2.896	2.854	2.818	2.788	2.761	2.739	2.719
12	3.106	2.996	2.913	2.849	2.796	2.753	2.717	2.687	2.660	2.637	2.617
13	3.025	2.915	2.832	2.767	2.714	2.671	2.635	2.604	2.577	2.554	2.533
14	2.958	2.848	2.764	2.699	2.646	2.602	2.565	2.534	2.507	2.484	2.463
15	2.901	2.790	2.707	2.641	2.588	2.544	2.507	2.475	2.448	2.424	2.403

ε=0.010

m＼n	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	10.967	10.672	10.456	10.289	10.158	10.051	9.963	9.888	9.825	9.770	9.722
6	8.746	8.466	8.260	8.102	7.976	7.874	7.790	7.718	7.657	7.605	7.559
7	7.460	7.191	6.993	6.840	6.719	6.620	6.538	6.469	6.410	6.359	6.314
8	6.632	6.371	6.178	6.029	5.911	5.814	5.734	5.667	5.609	5.559	5.515
9	6.057	5.802	5.613	5.467	5.351	5.257	5.178	5.111	5.055	5.005	4.962
10	5.636	5.386	5.200	5.057	4.942	4.849	4.772	4.706	4.650	4.601	4.558
11	5.316	5.069	4.886	4.744	4.632	4.539	4.462	4.397	4.342	4.293	4.251
12	5.064	4.821	4.640	4.499	4.388	4.296	4.220	4.155	4.100	4.052	4.010
13	4.862	4.620	4.441	4.302	4.191	4.100	4.025	3.960	3.905	3.857	3.815
14	4.695	4.456	4.278	4.140	4.030	3.939	3.864	3.800	3.745	3.698	3.656
15	4.556	4.318	4.142	4.004	3.895	3.805	3.730	3.666	3.612	3.564	3.522

ε=0.025

m＼n	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	7.146	6.978	6.853	6.757	6.681	6.619	6.568	6.525	6.488	6.456	6.428
6	5.988	5.820	5.695	5.600	5.523	5.461	5.410	5.366	5.329	5.297	5.269
7	5.285	5.119	4.995	4.899	4.823	4.761	4.709	4.666	4.628	4.596	4.568
8	4.817	4.652	4.529	4.433	4.357	4.295	4.243	4.200	4.162	4.130	4.101
9	4.484	4.320	4.197	4.102	4.026	3.964	3.912	3.868	3.831	3.798	3.769
10	4.236	4.072	3.950	3.855	3.779	3.717	3.665	3.621	3.583	3.550	3.522
11	4.044	3.881	3.759	3.664	3.588	3.526	3.474	3.430	3.392	3.359	3.330
12	3.891	3.728	3.607	3.512	3.436	3.374	3.321	3.277	3.239	3.206	3.177
13	3.767	3.604	3.483	3.388	3.312	3.250	3.197	3.153	3.115	3.082	3.053
14	3.663	3.501	3.380	3.285	3.209	3.147	3.095	3.050	3.012	2.979	2.949
15	3.576	3.415	3.293	3.199	3.123	3.060	3.008	2.963	2.925	2.891	2.862

ε=0.005

m＼n	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	14.939	14.513	14.200	13.961	13.772	13.618	13.491	13.385	13.293	13.215	13.146
6	11.464	11.073	10.786	10.566	10.391	10.250	10.133	10.034	9.950	9.878	9.814
7	9.522	9.155	8.885	8.678	8.514	8.380	8.270	8.176	8.097	8.028	7.968
8	8.302	7.952	7.694	7.496	7.339	7.211	7.105	7.015	6.938	6.872	6.814
9	7.471	7.134	6.885	6.693	6.541	6.417	6.314	6.227	6.153	6.089	6.032
10	6.872	6.545	6.303	6.116	5.968	5.847	5.746	5.661	5.589	5.526	5.471
11	6.422	6.102	5.865	5.682	5.537	5.418	5.320	5.236	5.165	5.103	5.049
12	6.071	5.757	5.524	5.345	5.202	5.085	4.988	4.906	4.836	4.775	4.721
13	5.791	5.482	5.253	5.076	4.935	4.820	4.724	4.643	4.573	4.513	4.460
14	5.562	5.257	5.031	4.857	4.717	4.603	4.508	4.428	4.359	4.299	4.247
15	5.372	5.071	4.847	4.674	4.536	4.424	4.329	4.250	4.181	4.122	4.070

以　上

（注）出題した問題の一部に不適切な表現があり、それを訂正して問題を掲載した。なお、実際の採点にあたっては、すべての受験者に不利な取り扱いとならないように配点の配慮をした。

数学２ 解答

1. *数理統計学のさまざまな分野の基本的事項に関する理解を問うために出題した問題である。*

<table>
<tr><th>番号</th><th>解答</th></tr>
<tr><td>(1)</td><td>253</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>$1-(1-p)^n-np(1-p)^{n-1}$</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td>4.18</td></tr>
<tr><td>(4)</td><td>51</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(5)</td><td>$C=-\dfrac{n}{n+1}$</td></tr>
<tr><td>Tの分散=$\dfrac{n}{(n+1)^2(n+2)}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(6)</td><td>α の最尤推定量：$\dfrac{\lambda}{\overline{X}}$</td></tr>
<tr><td>この推定量が有する性質：充足（十分）性</td></tr>
<tr><td>(7)</td><td>$\{x;\ x\ge\sqrt{0.95}\}$</td></tr>
</table>

(1) 有意水準 0.01 であるから、この帰無仮説を検定するときの棄却域は $\bar{x}>\mu_0+2.326\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ で与えられる。

ここで、真の平均が $\mu=\mu_0+\dfrac{\sigma}{4}$ とすると、$\overline{X}$ は $N\left(\mu_0+\dfrac{\sigma}{4},\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従うことから、第２種の誤りが起こる確率は

$$P\left(\overline{X}<\mu_0+2.326\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=P\left(\frac{\overline{X}-\left(\mu_0+\frac{\sigma}{4}\right)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<2.326-\frac{\frac{\sigma}{4}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

これを 0.05 以下とするためには、$2.326-\dfrac{\frac{\sigma}{4}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\le -1.645$ とすればよい。

$\therefore \sqrt{n} \geq 4 \times 3.971 = 15.884 \Rightarrow n \geq 252.301456$

したがって、標本の数は 253 以上とする必要がある。

(2) X_i $(i = 1,2,\cdots,n)$ を電球が不良品である場合 1、不良品でない場合 0 という確率変数とする。

このとき、X_i $(i = 1,2,\cdots,n)$ は二項母集団 B(1,p)からの大きさ n の標本変量と考えられる。

今、用いる検定方式は、次のとおりである。

帰無仮説 H_0: 製造工程に問題ない。対立仮説 H_1: 製造工程に何らかの問題がある。

棄却域 W: $X_1 + X_2 + \cdots + X_n \geq 2$

したがって、検出力関数β(p) は、

$$\begin{aligned}
\beta(p) &= 1 - P(\text{第2種の誤りが起こる}) \\
&= 1 - P\left((X_1,\cdots,X_n) \notin W \mid H_1\right) = 1 - P\left(X_1 + \cdots + X_n < 2 \mid H_1\right) \\
&= 1 - \left({}_nC_0 \cdot p^0 \cdot (1-p)^n + {}_nC_1 \cdot p^1 \cdot (1-p)^{n-1}\right) \\
&= 1 - (1-p)^n - np(1-p)^{n-1}
\end{aligned}$$

(3) 母平均を m、母分散を σ^2 とすると、

$$m = \frac{1}{30} \cdot 2 \cdot \sum_{k=1}^{15} k = 8, \sigma^2 = \frac{1}{30} \cdot 2 \cdot \sum_{k=1}^{15} k^2 - m^2 = \frac{248}{3} - 64 = \frac{56}{3}$$

したがって、$V(\overline{X}) = \dfrac{N-n}{N-1} \cdot \dfrac{\sigma^2}{n} = \dfrac{30-4}{30-1} \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{56}{3} = 4.1839\cdots \Rightarrow 4.18$

(4) $V(\overline{X} - \overline{Y}) = V(\overline{X}) + V(\overline{Y}) = \dfrac{(1.5)^2}{n_1} + \dfrac{(2.5)^2}{n_2} = \dfrac{(1.5)^2}{n_1} + \dfrac{(2.5)^2}{136 - n_1} (= V)$

これを n_1 で偏微分して、0 とおくと、

$$\frac{\partial V}{\partial n_1} = -\frac{(1.5)^2}{{n_1}^2} + \frac{(2.5)^2}{(136 - n_1)^2} = -\frac{(1.5)^2}{{n_1}^2} + \frac{(2.5)^2}{{n_2}^2} = 0$$

$$\therefore \frac{n_1}{n_2} = \frac{1.5}{2.5} = 0.6 \Rightarrow n_2 = \frac{n_1}{0.6} \Rightarrow n_1 + \frac{n_1}{0.6} = 136 \Rightarrow n_1 = 51$$

したがって、$n_1 = 51$ とすればよい。

(5) $X_{max}=\max(X_1,\cdots,X_n)$ とすると、 $E(X_{max})=\int_\theta^{\theta+1} n\cdot 1\cdot (x-\theta)^{n-1}\cdot x\,dx$

$z=x-\theta$ と変数変換すると、

$$E(X_{max})=\int_0^1 n\cdot z^{n-1}\cdot (z+\theta)\,dz=n\cdot\left[\frac{z^{n+1}}{n+1}+\frac{\theta}{n}z^n\right]_0^1=\frac{n}{n+1}+\theta$$

T が θ の不偏推定量となるためには $E(T)=\theta$ となる必要があるから、

$$C=\theta-E(X_{max})=-\frac{n}{n+1}$$

また、

$$E\left(X_{max}{}^2\right)=\int_\theta^{\theta+1} n\cdot 1\cdot (x-\theta)^{n-1}\cdot x^2\,dx=\int_0^1 n(z)^{n-1}\cdot (z+\theta)^2\,dz$$

$$=n\left[\frac{z^{n+2}}{n+2}+2\theta\frac{z^{n+1}}{n+1}+\theta^2\frac{z^n}{n}\right]_0^1=n\left(\frac{1}{n+2}+\frac{2\theta}{n+1}+\frac{\theta^2}{n}\right)$$

よって、

$$V(X_{max})=E\left(X_{max}{}^2\right)-E(X_{max})^2=n\left(\frac{1}{n+2}+\frac{2\theta}{n+1}+\frac{\theta^2}{n}\right)-\left(\frac{n}{n+1}+\theta\right)^2$$

$$=\frac{n}{n+2}-\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$$

$$\therefore V(T)=V\left(X_{max}-\frac{n}{n+1}\right)=V(X_{max})=\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$$

(6) α の尤度関数 $L(\alpha)$ は、

$$L(\alpha)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\lambda,\alpha,)=\frac{\alpha^{n\lambda}}{\Gamma(\lambda)^n}\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\lambda-1}\exp\left(-\alpha\sum_{i=1}^n x_i\right)$$

$\frac{\partial}{\partial\alpha}\log L(\alpha)=\frac{n\lambda}{\alpha}-\sum_{i=1}^n x_i=0$ を解けば、 $\alpha=\frac{n\lambda}{\sum_{i=1}^n x_i}=\frac{\lambda}{\bar{x}}$ となる。

したがって、α の最尤推定量は $\frac{\lambda}{\bar{X}}$ である。

次に（注）より、

$$E\left(\frac{\lambda}{\bar{X}}\right)=\int_0^\infty \frac{\lambda}{x}\cdot\frac{(n\alpha)^{n\lambda}}{\Gamma(n\lambda)}\cdot x^{n\lambda-1}\cdot e^{-n\alpha x}dx=\int_0^\infty\frac{(n\alpha)^{n\lambda-1}}{\Gamma(n\lambda-1)}\cdot x^{n\lambda-2}\cdot e^{-n\alpha x}dx\cdot\lambda\cdot\frac{\Gamma(n\lambda-1)}{\Gamma(n\lambda)}\cdot n\alpha$$

$$=\frac{\lambda\cdot n\alpha}{n\lambda-1}\neq\alpha$$

よって、α は不偏推定量ではなく、有効推定量でもない。

また、$\hat{\alpha}=\frac{\lambda}{\bar{x}}$ と置くと、$L(\alpha)=\alpha^{n\lambda}\exp\left(\frac{-n\lambda\alpha}{\hat{\alpha}}\right)\times\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$

よって、α は充足（十分）推定量である。

(7) $f(x)=f(x;\theta)$ と置く。

ネイマン・ピアソンの定理により、最強力（最有力）検定の棄却域は次の集合 $C=\left\{x;\frac{f(x;\theta_1)}{f(x;\theta_0)}\geq k\right\}$ により与えられる。

ここで、$C=\left\{x;\frac{f(x;\theta_1)}{f(x;\theta_0)}\geq k\right\}=\left\{x;\frac{3x^2}{2x}\geq k\right\}=\left\{x;x\geq\frac{2}{3}k\right\}=\{x;x\geq k'\}$

有意水準を 0.05 にするためには、$P(X\in C\,|\,\theta=2)=0.05$ とすればよい。

ここで、$P(X\in C\,|\,\theta=2)=\int_{k'}^{1}2x\,dx=1-(k')^2\quad\therefore k'=\sqrt{0.95}$

これより、求める棄却域は $C=\{x;x\geq\sqrt{0.95}\}$

2．*誘導式の穴埋問題であり基礎的な問題である。(1)は χ^2 分布を使った検定の１つである「適合度の検定」に関する理解を問い、(2)では指数分布のパラメーターの信頼区間を求めるプロセスに関する理解を問うた。*

番号	解答	番号	解答
①	$\sum_{i=1}^{6}\frac{(f_i-20)^2}{20}$	⑨	2
②	5	⑩	χ^2
③	χ^2	⑪	再生
④	4.4	⑫	2n
⑤	採択	⑬	χ^2
⑥	$\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{x}{\sigma}}$	⑭	$\frac{2(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{\chi^2_{2n}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}$
⑦	$\frac{\sigma}{2}$	⑮	$\frac{2(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{\chi^2_{2n}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}$
⑧	$\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}$		

(1) 統計量$T=\sum_{i=1}^{6}\frac{(f_i-20)^2}{20}$は自由度5の$\chi^2$分布に従う。

この統計量の実現値は、$T_0=\frac{1}{20}\{4^2+(-1)^2+(-3)^2+5^2+(-6)^2+1^2\}=\frac{1}{20}\times 88=4.4$

この値は自由度5のχ^2分布の上側5%点11.070と比べて小さいので、H_0は採択される。

(2) 平均値σの指数分布の確率密度関数$f(x)$は、$f(x)=\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{x}{\sigma}}\ (x\geq 0)$である。

$Y=\frac{2}{\sigma}X$とし、その確率密度関数を$g(y)$、分布関数を$G(y)$とすると、

$$g(y)=\frac{d}{dy}G(y)=\frac{d}{dy}P(Y\leq y)=\frac{d}{dy}P\left(\frac{2}{\sigma}X\leq y\right)=\frac{d}{dy}P\left(X\leq\frac{\sigma}{2}y\right)$$

$$=\frac{d}{dy}F\left(\frac{\sigma}{2}y\right)=\frac{\sigma}{2}f\left(\frac{\sigma}{2}y\right)=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}\ (y>0)$$

となる。

この$g(y)$は自由度2のχ^2分布の確率密度関数に一致する。

よって、$Y_i=\frac{2}{\sigma}X_i$とした時、$Y_1+Y_2+\cdots+Y_n=\frac{2}{\sigma}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$は、$\chi^2$分布の再生性により自由度2nの$\chi^2$分布に従うことになる。

したがって、$P\left(\chi^2_{2n}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\leq\frac{2}{\sigma}(X_1+X_2+\cdots+X_n)\leq\chi^2_{2n}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)=1-\varepsilon$

$$\therefore P\left(\frac{2(X_1+X_2+\cdots+X_n)}{\chi^2_{2n}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}\leq\sigma\leq\frac{2(X_1+X_2+\cdots+X_n)}{\chi^2_{2n}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right)=1-\varepsilon$$

以上より求める信頼区間は$\frac{2(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{\chi^2_{2n}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}\leq\sigma\leq\frac{2(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{\chi^2_{2n}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}$となる。

3．*(1)はF分布を使った等分散性の検定の問題、(2)は等分散性のもとでの平均値の差をt検定を使って検定する問題、(3)はχ^2分布を使った母分散の検定の問題であり、それぞれ基本的な検定に関する理解を問うために出題した。*

(1) 帰無仮説 $H_0:\sigma_A^2=\sigma_B^2$ を対立仮説 $H_1:\sigma_A^2\neq\sigma_B^2$ に対して検定する。

統計量 $F=\dfrac{n_A S_A^2/(n_A-1)}{n_B S_B^2/(n_B-1)}$ は、自由度 (n_A-1, n_B-1) のF分布に従うので、その実現値F_0を $F_{n_B-1}^{n_A-1}(0.025)$ と比較する。$F_0=1.25$, $F_8^9(0.025)=4.36$ であるから、

$F_0<F_8^9(0.025)$ より、有意水準$\varepsilon=0.05$でH_0が採択され、$\sigma_A^2\neq\sigma_B^2$ とは言えない。つまり、組み立て時間数の分散には差があるとはいえない。

(2) (1)より、等分散性が認められるので、帰無仮説 $H_0:\mu_A=\mu_B$ を対立仮説$H_1:\mu_A\neq\mu_B$ に対してt検定を行う。

統計量 $T=\dfrac{|\bar{x}-\bar{y}|}{\sqrt{\dfrac{n_A s_A^2+n_B s_B^2}{n_A+n_B-2}\left(\dfrac{1}{n_A}+\dfrac{1}{n_B}\right)}}$ は、自由度$\phi=n_A+n_B-2=17$ のt分布に従うので、その実現値T_0を$t_{17}(0.025)$と比較すると、$T_0=2.169, t_{17}(0.025)=2.110$ より

$T_0>t_{17}(0.025)$。したがって、H_0は棄却され、組み立て時間数の平均には差があるといえる。

(3) 帰無仮説 $H_0:\sigma^2=52$ を対立仮説 $H_1:\sigma^2\neq 52$ に対して検定する。

いま、A, B両工場の合計のサンプル数をn_{AB}、A, B両工場の合計の平均を$\bar{x}$、分散をs_{AB}^2とし、s_{AB}^2を求める。

今、$n_{AB}=n_A+n_B=19$, $s_{AB}^2=\dfrac{1}{n_A+n_B}=\sum_{A,B}\{(x_A-\bar{x})^2+(x_B-\bar{x})^2\}=115$ である。

ここで、統計量 $\chi_{AB}^2=\dfrac{n_{AB}s_{AB}^2}{\sigma^2}$ は自由度$n_{AB}-1$のχ^2分布に従い、実現値$\tilde{\chi}_{AB}^2=42.02$,

$\chi_{18}^2(0.025)=31.526$ より $\chi_{18}^2(0.025)<\tilde{\chi}_{AB}^2$ となるので、H_0は棄却され、組み立て時間数の分散は、今までと変わったと言える。

4. *最尤推定量と尤度比との関係および尤度比を用いた検定の導き方に関する理解を問うた出題である。*

(1) μ と σ^2 がともに未知であるから尤度関数は μ と σ^2 との2変数の関数で、

$L(\mu,\sigma^2)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)$ となる。これを μ と σ^2 に関して最大ならしめるために、次の連立方程式を解く。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\mu}\log L(\mu,\sigma^2)=\dfrac{\partial}{\partial\mu}\left\{-\dfrac{n}{2}\log 2\pi\sigma^2-\dfrac{1}{2\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}=0\\ \dfrac{\partial}{\partial(\sigma^2)}\log L(\mu,\sigma^2)=\dfrac{\partial}{\partial(\sigma^2)}\left\{-\dfrac{n}{2}\log 2\pi\sigma^2-\dfrac{1}{2\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}=0\end{cases}$$

これを変形すると、$\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0\\ -\dfrac{n}{2}\cdot\dfrac{1}{\sigma^2}+\dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0\end{cases}$

これより、$\begin{cases}\mu=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}(=\hat{\mu})\\ \sigma^2=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2(=\hat{\sigma}^2)\end{cases}$

したがって、μ と σ^2 の最尤推定量はそれぞれ $\overline{X},\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ となる。

(2) 次に、μ が既知の場合、尤度関数は σ^2 の関数であり、

$L(\sigma^2)=\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2\right)$ であるから、$L(\sigma^2)$ を最大ならしめる σ^2 を求めるためには、$\frac{d}{d(\sigma^2)}\log L(\sigma^2)=0$ を解けばよい。

このとき、(1)と同様に $\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2(=\hat{\sigma}'^2)$ となり、σ^2 の最尤推定量は $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2$ となる。

(3)　(1), (2)より尤度比λは、

$$\lambda=\frac{\max\limits_{0<\sigma^2<\infty}\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\mu_0)}{\max\limits_{\mu,\sigma^2}\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\mu)}=\frac{\left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}'^2}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2\hat{\sigma}'^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2\right)}{\left(\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}^2}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu})^2\right)}$$

ここで、分子は

$$\frac{1}{\left\{2\pi\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2\right\}^{\frac{n}{2}}}\times\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}\right)=\frac{e^{-\frac{n}{2}}}{\left(\frac{2\pi}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2\right\}^{\frac{n}{2}}}$$

同様にして、分母は $\dfrac{e^{-\frac{n}{2}}}{\left(\frac{2\pi}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right\}^{\frac{n}{2}}}$ となる。

以上より、$\lambda=\dfrac{\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right\}^{\frac{n}{2}}}{\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2\right\}^{\frac{n}{2}}}$

ここで、

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2&=\sum_{i=1}^{n}\{(x_i-\bar{x})+(\bar{x}-\mu_0)\}^2\\&=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+2(\bar{x}-\mu_0)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})+\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-\mu_0)^2\\&=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-\mu_0)^2\end{aligned}$$

であるから、

$$\lambda=\frac{\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right\}^{\frac{n}{2}}}{\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-\mu_0)^2\right\}^{\frac{n}{2}}}=\left\{1+\frac{n(\bar{x}-\mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right\}^{-\frac{n}{2}}$$

(4)　$t^2=\left(\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n-1}}\right)^2$ と置くと $\left(s=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right)$、(3) で求めた尤度比は

$\lambda = \left\{1+\dfrac{t^2}{n-1}\right\}^{-\frac{n}{2}}$ となる。

さて、尤度比検定では棄却域は $R_k = \{(x_1,\cdots,x_n);\lambda \le k\}$ であり、これに上の λ を代入すると、$R_k = \left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n);\left\{1+\dfrac{t^2}{n-1}\right\}^{-\frac{2}{2}} \le k\right\} = \left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n);|t| \ge \sqrt{\left(k^{-\frac{2}{n}}-1\right)(n-1)} = c\right\}$

となる。

ここで、$T = \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n-1}}$ $\left(S = \left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ は H_0 が正しいとき自由度 n-1 の t 分布に従うので、$P\left\{|T| = \dfrac{|\overline{X}-\mu_0|}{S/\sqrt{n-1}} > t_{n-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right\} = \alpha$

よって、R_k において $c = t_{n-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ とすればよい。

したがって、求める棄却域は、$\left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n-1}}\right| > t_{n-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ となる。