数学１（問題）

問題１．次の各問の $\boxed{}$ に入る答のみを、所定の解答用紙に記入せよ。（４０点）

(1) Ａ君とＢ君が次のようなゲームをする。２個のさいころを振って、出た目の合計をＳとする。Ｓが１０未満の場合、Ｂ君はＳの３倍の点数を獲得し、Ｓが１０以上の場合はＡ君が点数 x を獲得することとし、獲得点数の合計点で勝敗を争う。このゲームが公平なゲームとなるのは、x を $\boxed{}$ とした場合である。

(2) X は $0,1,2,\cdots$ をそれぞれ確率 $p_0, p_1, p_2, \cdots$ でとる確率変数とする。X の確率母関数を $P(t)$ とするとき、X の分散 $V(X)$ を $P(0), P(1), P'(0), P'(1), P''(0), P''(1)$ の中から必要なものを用いて表わすと、$V(X) = \boxed{}$ である。ただし、$V(X) < \infty$ とする。

(3) 確率変数 $Y = \log_e X$ が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき、X の確率密度関数 $f(x)$ は $f(x) = \boxed{}$ $(x > 0)$ である。

(4) 確率密度関数が $f(x) = \dfrac{e^{-x}x^r}{r!}$ $(x>0;\ r$ は正の整数) で与えられる正の値をとる確率変数 X の期待値および分散はそれぞれ $E(X) = \boxed{}$ 、$V(X) = \boxed{}$ である。

(5) 三角形を内角の大きさを任意に定めて描くとき、それが鈍角三角形となる確率は $\boxed{}$ である。

(6) １軒の家が１年間に出火する確率を p、隣家が出火したとき類焼する確率を r とする。今、１列に隣り合わせの３軒の家があるとする。家を隔てて飛び火はしないものとしたとき、中央の家が１年間に火事になる確率は $\boxed{}$ である。なお、どの家についても出火する事象ならびに類焼する事象はすべて互いに独立であるとする。

(7) １から n までの相異なる番号のついた n 枚のカードを無作為に１列に並べる。番号 k のカードが k 番目の位置を占めるならば $X_k = 1$、そうでなければ $X_k = 0$ とし、$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ と定義する。すなわち、S_n は番号と同じ位置にきたカードの枚数である。このとき、S_n の期待値および分散はそれぞれ $E(S_n) = \boxed{}$ 、$V(S_n) = \boxed{}$ である。

(8) ある実験を成功するまで繰り返し行う。実験が成功する確率は毎回 p であり、１回の実験の成否は他の回とは独立であるものとする。また、この実験の実施には費用がかかり、実験の成否にかかわらず、最初の k 回目までは１回につき A、その後は１回につき B の費用が必要であるとする。このとき、この実験が初めて成功するまでに要する費用の期待値は $\boxed{} \times A + \boxed{} \times B$ である。

問題２．次の文中の①から⑮の空欄に当てはまる最も適当な数値、語句あるいは算式を所定の解答用紙に記入せよ。（１５点）

確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は互いに独立で、すべて標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとする。

(1)　今、$\lim_{n\to\infty} P\left(a \le \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \le b\right)$ を次のようにして求める。

$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ と置くと、Z_n は平均 $\boxed{①}$ 、分散 $\boxed{②}$ の $\boxed{③}$ 分布に従うので、$f_n(x)$ を Z_n の確率密度関数とすると、$f_n(x) = \boxed{④}$ である。

今、$\alpha_n \equiv P(a \le Z_n \le b) = \int_a^b f_n(x)dx \cdots (A)$　と置く。

(A)で、$t = \sqrt{n}\,x$ と変数変換すると、$\alpha_n = \int_{a\sqrt{n}}^{b\sqrt{n}} \boxed{⑤} dt \cdots (B)$

よって、$0 < a < b$ の場合は、$a\sqrt{n}, b\sqrt{n} \to \infty$ より $\alpha_n \to \boxed{⑥}$、$a < b < 0$ の場合も同様。

$a < 0 < b$ の場合は、$a\sqrt{n} \to -\infty, b\sqrt{n} \to \infty$ より、$\alpha_n \to \boxed{⑦}$

$0 = a < b$ の場合は、$\alpha_n \to \boxed{⑧}$、$a < b = 0$ の場合も同様。

(2)　次に、$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left\{P\left(a \le \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \le b\right)\right\}$ を求める（なお、対数はすべて自然対数とする）。

まず、$0 \le a < b$ の場合を考える。

$x>0$ では、$f_n(x)$ が単調 $\boxed{⑨}$ 関数であることを用いて、(B)より、

$\alpha_n = \int_{a\sqrt{n}}^{b\sqrt{n}} \boxed{⑤} dt \le \boxed{⑩} \cdots (C)$

さらに、$a < a + \varepsilon < b$ なる任意の $\varepsilon > 0$ をとると、$\alpha_n \ge \int_{a\sqrt{n}}^{(a+\varepsilon)\sqrt{n}} \boxed{⑤} dt \ge \boxed{⑪} \cdots (D)$

(C)および(D)より、$\frac{1}{n}\log \boxed{⑪} \le \frac{1}{n}\log\alpha_n \le \frac{1}{n}\log \boxed{⑩} \cdots (E)$

$n \to \infty$ のとき、不等式(E)の左端は $\boxed{⑫}$ に、右端は $\boxed{⑬}$ にそれぞれ収束する。ε は任意に小さくとれるので、$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log\alpha_n = \boxed{⑬}$ となる。

同様にして、$a < b \le 0$ の場合は、$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log\alpha_n = \boxed{⑭}$ となる。

また、$a < 0 < b$ の場合は、$\alpha_n \to \boxed{⑦}$ だから、$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log\alpha_n = \boxed{⑮}$ となる。

問題３．$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は互いに独立な確率変数である。今、$P(X_i \le x)\ (i=1,2,\cdots,n)$ が次式で与えられるとき、次の問に答えよ。ただし、λ は正の定数とする。（２０点）

$$P(X_i \le x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & (0 < x) \\ 0 & (x \le 0) \end{cases}$$

(1) $P(X_1 + X_2 \le x)$ を求めよ。

(2) $P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \le x)$ は次の式で与えられることを証明せよ。

$$P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \le x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}\left(1 + \dfrac{\lambda x}{1!} + \cdots + \dfrac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\right) & (0 < x) \\ 0 & (x \le 0) \end{cases}$$

問題４．ある土壌において時点 n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ におけるバクテリアの数は確率変数 X_n で与えられるとし、時点 0 における初期値 X_0 は平均 μ のポアソン分布に従うとする。

今、時点 n と n+1 の間にバクテリアの数の変動は次のとおり起こるものとする。

(i) バクテリアのひとつひとつは確率 $q\,(=1-p)$ で独立に死滅する。

(ii) 新たに発生するバクテリアの数は平均 $\mu(1+p)^n$ のポアソン分布に従う。なお、時点 n と n+1 の間に発生したバクテリアは時点 n+1 を超えるまでは死滅しないものとする。

上記以外の要因によるバクテリアの数の変動は起こらないものとし、またバクテリアの発生と死滅は独立に起こるものとする。このとき、X_n の分布を求めよ。（２５点）

以　上

数学１ 解答

１． *数学１の範囲全体について、基礎的と思われる問題を出題とした。*

番号	解答	
(1)	94	
(2)	$P''(1)+P'(1)-P'(1)^2$	
(3)	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}\,x}\exp\left[-\frac{(\log_e x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$	
(4)	$E(X)=r+1$	$V(X)=r+1$
(5)	$\frac{3}{4}$	
(6)	$1-(1-p)(1-pr)^2$	
(7)	$E(S_n)=1$	$V(S_n)=1$
(8)	$\frac{1-(1-p)^k}{p}A+\frac{(1-p)^k}{p}B$	

(1) S の分布は次表のとおり。

S の値	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
確率	1/36	1/18	1/12	1/9	5/36	1/6	5/36	1/9	1/12	1/18	1/36

このゲームによる B の収益の期待値 E_B は、

$$E_B=3\cdot\left(2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{1}{18}+4\cdot\frac{1}{12}+5\cdot\frac{1}{9}+6\cdot\frac{5}{36}+7\cdot\frac{1}{6}+8\cdot\frac{5}{36}+9\cdot\frac{1}{9}\right)-x\cdot\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}\right)$$

$$=\frac{47}{3}-\frac{1}{6}x$$

ゲームを公平なものとするためには、$E_B=0$ であればよい。したがって、x=94。

(2) $P(t)=E(t^x)=p_0+p_1t+p_2t^2+\cdots+p_it^i+\cdots$ であるから、

$P'(t)=p_1+2p_2t+3p_3t^2+\cdots+i\cdot p_it^{i-1}+\cdots=E(X\cdot t^{X-1})$ である。よって、$P'(1)=E(X)$

また、$P''(t)=2p_2t+6p_3t^2+\cdots+i(i-1)\cdot p_it^{i-2}=E(X(X-1)\cdot t^{X-2})$ から、

$P''(1)=E(X(X-1))$

よって、$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=E(X(X-1))+E(X)-E(X)^2=P''(1)+P'(1)-P'(1)^2$

(3) X, Y の分布関数をそれぞれ $F_X(x), F_Y(y)$、確率密度関数をそれぞれ $f_X(x), f_Y(y)$ とすると、

$$F_X(x)=P(X\le x)=P(\log_e X\le\log_e x)=P(Y\le\log_e x)=F_Y(\log_e x)$$

よって、

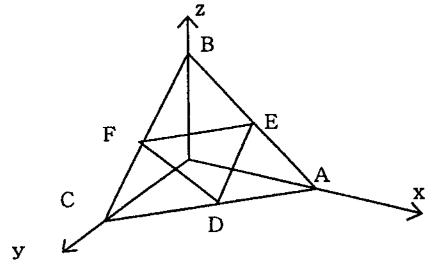
$$f_X(x)=\frac{d}{dx}F_X(x)=\frac{d}{dx}F_Y(\log_e x)=\frac{1}{x}f_Y(\log_e x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}\,x}\exp\left[-\frac{(\log_e x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right](x>0)$$

(4) $E(X)=\int_0^\infty x\frac{e^{-x}x^r}{r!}dx=\int_0^\infty\frac{e^{-x}x^{r+1}}{r!}dx=(r+1)\int_0^\infty\frac{e^{-x}x^{r+1}}{(r+1)!}dx=r+1$

また、$E(X^2)=\int_0^\infty x^2\frac{e^{-x}x^r}{r!}dx=\int_0^\infty\frac{e^{-x}x^{r+2}}{r!}dx=(r+1)(r+2)\int_0^\infty\frac{e^{-x}x^{r+2}}{(r+2)!}dx=(r+1)(r+2)$

よって、$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=(r+2)(r+1)-(r+1)^2=r+1$

(5) 3つの角の大きさを x, y, z とすると、x+y+z=180 (0<x, y, z<180)。鈍角三角形になる場合は、x>90, x>y+z または y>90, y>x+z または z>90, z>x+y。上記より、x, y, z は、下図の三角形 ABC 上に一様に分布し、鈍角三角形になるのは、三角形 DEF 以外の部分であるから、求める確率は $\frac{3}{4}$ である。

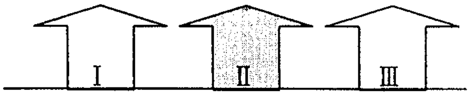


(6) ３軒の家を端から、Ⅰ、Ⅱ、Ⅲとし、事象 A, B, C を

A： Ⅰが出火し、Ⅱに類焼する。

B： Ⅱが出火する。

C： Ⅲが出火し、Ⅱに類焼する。



と定義すれば、各事象の確率は、$P(A)=pr, P(B)=p, P(C)=pr$ である。

中央の家Ⅱが火事になるのは上の A, B, C の少なくとも１つが起こる場合であるから、その確率α は、

$$\begin{aligned}\alpha &= P(A\cup B\cup C)=1-P((A\cup B\cup C)^c)=1-P(A^c\cap B^c\cap C^c)=1-P(A^c)P(B^c)P(C^c)\\ &=1-(1-pr)(1-p)(1-pr)=1-(1-p)(1-pr)^2\end{aligned}$$

(7) $P(X_i=1)=\dfrac{(n-1)!}{n!}=\dfrac{1}{n}$, $P(X_iX_j=1)=\dfrac{(n-2)!}{n!}=\dfrac{1}{n(n-1)}$ $(i\neq j)$ である。

したがって、$E(X_i)=\dfrac{1}{n}, E(X_i^2)=E(X_i)=\dfrac{1}{n}, E(X_iX_j)=\dfrac{1}{n(n-1)}$ である。

これらを使って、

$$E(S_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)=\frac{1}{n}\times n=1$$

$$V(S_n)=\sum_i E(X_i^2)+2\sum_{i<j}E(X_iX_j)-E(S_n)^2=\frac{1}{n}\times n+2\times{}_nC_2\times\frac{1}{n(n-1)}-1^2=1+2\times\frac{1}{2}-1=1$$

(8) 最初の i 回目までの実験を失敗し、(i+1)回めに初めて実験が成功する確率は pq^i $(i=0,1,2,\cdots)$ である（$q=1-p$ と置いた）。

このとき、成功するまでに要するコストは$i\leq k-1$の場合は$(i+1)A$、$i\geq k$ の場合は $kA+(i+1-k)B$であるので、求める期待値 E は、

$$E=\sum_{i=0}^{k-1}(i+1)Apq^i+\sum_{i=k}^{\infty}\{kA+(i+1-k)B\}pq^i=A\sum_{i=0}^{k-1}(i+1)pq^i+kA\sum_{i=k}^{\infty}pq^i+\sum_{i=k}^{\infty}(i+1-k)pq^i$$

ここで、

$$\sum_{i=0}^{k-1}(1+i)pq^i=p+2pq+3pq^2+\cdots+kpq^{k-1}$$

$$q\sum_{i=0}^{k-1}(1+i)pq^i=\qquad pq+2pq^2+\cdots+(k-1)pq^{k-1}+kpq^k$$

辺々引き算して、

$$p\sum_{i=0}^{k-1}(1+i)pq^{i}=p+pq+pq^{2}+\cdots+pq^{k-1}-kpq^{k}$$

$$\therefore\sum_{i=0}^{k-1}(1+i)pq^{i}=\frac{1-q^{k}}{p}-kq^{k}$$

また、

$$\sum_{i=k}^{\infty}pq^{i}=q^{k}\sum_{i=0}^{\infty}pq^{i}=q^{k}$$

$$\sum_{i=k}^{\infty}(1+i-k)pq^{i}=\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)pq^{i+k}=q^{k}\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)pq^{i}=\frac{q^{k}}{p}$$

よって、$E=A\left(\frac{1-q^{k}}{p}-kq^{k}\right)+kAq^{k}+B\frac{q^{k}}{p}=\frac{1-q^{k}}{p}A+\frac{q^{k}}{p}B=\frac{1-(1-p)^{k}}{p}A+\frac{(1-p)^{k}}{p}B$

2．*大数の法則に関する誘導穴埋形式の問題である。問題文を注意深く追うことができれば、比較的容易に解答ができると思われる。*

番号	解答	番号	解答
①	0	⑨	減少
②	$\frac{1}{n}$	⑩	$\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\exp\left(-\frac{na^{2}}{2}\right)(b-a)\sqrt{n}$
③	正規	⑪	$\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\exp\left(-\frac{n(a+\varepsilon)^{2}}{2}\right)\cdot\varepsilon\sqrt{n}$
④	$\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\exp\left(-\frac{nx^{2}}{2}\right)$	⑫	$-\frac{(a+\varepsilon)^{2}}{2}$
⑤	$\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^{2}}{2}\right)$	⑬	$-\frac{a^{2}}{2}$
⑥	0	⑭	$-\frac{b^{2}}{2}$
⑦	1	⑮	0
⑧	$\frac{1}{2}$		

(1)　$Z_n=\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ と置くと、Z_n は平均０、分散 $\dfrac{1}{n}$ の正規分布に従うので、

$f_n(x)$ を Z_n の確率密度関数とすると、$f_n(x)=\sqrt{\dfrac{n}{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{nx^2}{2}\right)$ である。

今、$\alpha_n \equiv P(a\le Z_n \le b)=\int_a^b f_n(x)dx\cdots(A)$ と置く。

(A)で、$t=\sqrt{n}\,x$ と変数変換すると、$\alpha_n=\int_{a\sqrt{n}}^{b\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{1}{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right)dt\cdots(B)$

よって、$0<a<b$ の場合は、$a\sqrt{n}, b\sqrt{n}\to\infty$ より $\alpha_n\to 0$、$a<b<0$ の場合も同様。

$a<0<b$ の場合は、$a\sqrt{n}\to-\infty, b\sqrt{n}\to\infty$ より、$\alpha_n\to 1$

$0=a<b$ の場合は、$\alpha_n\to\dfrac{1}{2}$，$a<b=0$ の場合も同様。

(2)　まず、$0\le a<b$ の場合を考える。

x>0 では、$f_n(x)$ が単調減少関数であることを用いて、(B)より、

$$\alpha_n=\int_{a\sqrt{n}}^{b\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt\le\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\exp\left(-\frac{na^2}{2}\right)(b-a)\sqrt{n}\quad\cdots(C)$$

さらに、$a<a+\varepsilon<b$ なる任意の $\varepsilon>0$ をとると、

$$\alpha_n\ge\int_{a\sqrt{n}}^{(a+\varepsilon)\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt\ge\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\exp\left(-\frac{n(a+\varepsilon)^2}{2}\right)\cdot\varepsilon\sqrt{n}\cdots(D)$$

(C)および(D)より、

$$\frac{1}{n}\log\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\exp\left(-\frac{n(a+\varepsilon)^2}{2}\right)\cdot\varepsilon\sqrt{n}\le\frac{1}{n}\log\alpha_n\le\frac{1}{n}\log\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\exp\left(-\frac{na^2}{2}\right)(b-a)\sqrt{n}\cdots(E)$$

$n\to\infty$ のとき、不等式(E)の左端は $-\dfrac{(a+\varepsilon)^2}{2}$ に、右端は $-\dfrac{a^2}{2}$ にそれぞれ収束する。ε は任意に小さくとれるので、$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\log\alpha_n=-\dfrac{a^2}{2}$ となる。

同様にして、$a<b\le 0$ の場合は、$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\log\alpha_n=-\dfrac{b^2}{2}$ となる。

また、$a<0<b$ の場合は、$\alpha_n\to 1$ だから、$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\log\alpha_n=0$ となる。

3．　和の分布（指数分布について）の分布関数を導かせる問題である。（2）については数学的帰納法の正確な用い方を見る意図もあった（正しければ他の方法でも可である）。

X_i の確率密度関数は、$p(x_i)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x_i} & (0\le x_i)\\ 0 & (x_i<0)\end{cases}$

$X_1,X_2,\cdots,X_n(i=1,2,\cdots,n)$ は互いに独立な確率変数であるから、$X_1,X_2,\cdots,X_n$ の結合密度関数は、

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_n)=\begin{cases}\lambda^n e^{-\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n)} & (x_1,x_2,\cdots,x_n\ge 0)\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

(1) 上記により、

$$P(X_1+X_2\le x)=\iint_{x_1+x_2\le x} f_2(x_1,x_2)dx_1dx_2=\begin{cases}\int_0^x dx_1\int_0^{x-x_1}\lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)}dx_2 & (0\le x)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

ここで、

$$\int_0^x dx_1\int_0^{x-x_1}\lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)}dx_2=\int_0^x\left[-\lambda e^{-\lambda(x_1+x_2)}\right]_0^{x-x_1}dx_1=\int_0^x\left(\lambda e^{-\lambda x_1}-\lambda e^{-\lambda x}\right)dx_1$$
$$=1-e^{-\lambda x}-\lambda xe^{-\lambda x}$$

であるから、$P(X_1+X_2\le x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}(1+\lambda x) & (0\le x)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$

(2) $n=1,2$ のとき、仮定と(1)より、明らかに与えられた結論が成立する。

$n=k$ のとき、

$$P(X_1+X_2+\cdots+X_k\le x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}\left(1+\dfrac{\lambda x}{1!}+\cdots+\dfrac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}\right) & (0\le x)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

が成立すると仮定する。

$n=k+1$ のとき、$Y=X_1+X_2+\cdots+X_k$ とおくと、Y の確率密度関数は、

$$q_k(y)=\frac{d}{dy}P(X_1+X_2+\cdots+X_k\le y)=\begin{cases}\dfrac{d}{dy}\left\{1-e^{-\lambda y}\left(1+\dfrac{\lambda y}{1!}+\cdots+\dfrac{(\lambda y)^{k-1}}{(k-1)!}\right)\right\} & (0\le y)\\ 0 & (y<0)\end{cases}$$

また、Y と X_{k+1} は独立であるから、

$$P(X_1+X_2+\cdots+X_{k+1}\le x)=P(Y+X_{k+1}\le x)$$
$$=\begin{cases}\iint_{y+x_{k+1}\le x} q_k(y)p(x_{k+1})dydx_{k+1} & (y,x_{k+1}\ge 0)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}$$

ここで、

$$\iint_{y+x_{k+1}\le x} q_k(y)p(x_{k+1})dydx_{k+1}$$
$$=\int_0^x dy\int_0^{x-y} q_k(y)\lambda e^{-\lambda x_{k+1}}dx_{k+1}$$
$$=\int_0^x q_k(y)\left[-e^{-\lambda x_{k+1}}\right]_0^{x-y}dy$$
$$=\int_0^x q_k(y)\left(1-e^{-\lambda(x-y)}\right)dy$$
$$=\int_0^x\left(1-e^{-\lambda(x-y)}\right)d\left\{1-e^{-\lambda y}\left(1+\frac{\lambda y}{1!}+\cdots+\frac{(\lambda y)^{k-1}}{(k-1)!}\right)\right\}$$
$$=\left[\left(1-e^{-\lambda(x-y)}\right)\left\{1-e^{-\lambda y}\left(1+\frac{\lambda y}{1!}+\cdots+\frac{(\lambda y)^{k-1}}{(k-1)!}\right)\right\}\right]_0^x$$
$$-\int_0^x\left(-\lambda e^{-\lambda(x-y)}\right)\left\{1-e^{-\lambda y}\left(1+\frac{\lambda y}{1!}+\cdots+\frac{(\lambda y)^{k-1}}{(k-1)!}\right)\right\}dy$$
$$=0+\int_0^x\lambda e^{-\lambda(x-y)}dy-\int_0^x\lambda e^{-\lambda(x-y)}e^{-\lambda y}\left(1+\frac{\lambda y}{1!}+\cdots+\frac{(\lambda y)^{k-1}}{(k-1)!}\right)dy$$
$$=\lambda e^{-\lambda x}\int_0^x e^{\lambda y}dy-\lambda e^{-\lambda x}\int_0^x\left(1+\frac{\lambda y}{1!}+\cdots+\frac{(\lambda y)^{k-1}}{(k-1)!}\right)dy$$
$$=e^{-\lambda x}\left[e^{\lambda y}\right]_0^x-\lambda e^{-\lambda x}\left[y+\frac{\lambda y^2}{2!}+\cdots+\frac{(\lambda y)^k}{k!}\right]_0^x$$
$$=1-e^{-\lambda x}-e^{-\lambda x}\left\{\frac{\lambda x}{1!}+\frac{(\lambda x)^2}{2!}+\cdots+\frac{(\lambda x)^k}{k!}\right\}$$
$$=1-e^{-\lambda x}\left\{1+\frac{\lambda x}{1!}+\frac{(\lambda x)^2}{2!}+\cdots+\frac{(\lambda x)^k}{k!}\right\}$$

よって、帰納法によって、任意の自然数 n に対して、与えられた結論が成立する。

4．*初期値が与えられたとき一定時点経過後の分布を分布の結合を利用して求める問題である。新設の保険会社等において、将来の保有契約高を推定するような場合に応用可能な問題である。*

時点０で既に存在していたバクテリアのうち、時点 i で生き残っているバクテリアの数を表す確率変数を $Y_{(i)}$とする。

i=1 では、

$$P(Y_{(1)}=x)=\sum_{k=x}^{\infty}P(X_0=k)_k C_x p^x(1-p)^{k-x}=\sum_{k=x}^{\infty}e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!}{}_kC_x p^x(1-p)^{k-x}$$
$$=\sum_{k=x}^{\infty}e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!}\frac{k!}{(k-x)!x!}p^x(1-p)^{k-x}=e^{-\mu}\mu^x\frac{1}{x!}p^x\sum_{k=x}^{\infty}\frac{(\mu(1-p))^{k-x}}{(k-x)!}$$
$$=e^{-\mu}\mu^x\frac{1}{x!}p^x e^{\mu(1-p)}=e^{-\mu p}\frac{(\mu p)^x}{x!}$$

したがって、$Y_{(1)}$は平均 μp のポアソン分布に従う。

i=2 のときも同様にして、

$$P(Y_{(2)}=x)=\sum_{k=x}^{\infty}P(Y_{(1)}=k)\cdot{}_kC_x p^x(1-p)^{k-x}=\sum_{k=x}^{\infty}e^{-\mu p}\frac{(\mu p)^k}{k!}{}_kC_x p^x(1-p)^{k-x}$$
$$=\sum_{k=x}^{\infty}e^{-\mu p}\frac{(\mu p)^k}{k!}\frac{k!}{(k-x)!x!}p^x(1-p)^{k-x}=e^{-\mu p}(\mu p)^x\frac{1}{x!}p^x\sum_{k=x}^{\infty}\frac{(\mu p(1-p))^{k-x}}{(k-x)!}$$
$$=e^{-\mu p}(\mu p)^x\frac{1}{x!}p^x e^{\mu p(1-p)}=e^{-\mu p^2}\frac{(\mu p^2)^x}{x!}$$

したがって、$Y_{(2)}$は平均 μp^2 のポアソン分布に従う。

以下、同様の計算を繰り返すことにより、$Y_{(n)}$は平均 μp^n のポアソン分布に従うことがわかる。

次に、時点ｔとｔ＋１の間に発生したバクテリアの時点 i での数を表す確率変数を $Y^t_{(i)}\ (t=0,1,2,\cdots n-1)$ で表す。

時点ｔとｔ＋１の間に発生したバクテリアは時点ｔ＋１を超えるまでは死滅しないので、$Y^t_{(t+1)}$ は平均$\mu(1+p)^t$ のポアソン分布に従い、$P(Y^t_{(t+1)}=x)=e^{-\mu(1+p)^t}\cdot\frac{(\mu(1+p)^t)^x}{x!}$

$i=t+2$ では、

$$P(Y_{(t+2)}^t = x) = \sum_{k=x}^{\infty} P(Y_{(t+1)}^t = k)\,{}_kC_x \cdot p^x (1-p)^{k-x} = \sum_{k=x}^{\infty} e^{-\mu(1+p)^t} \cdot \frac{\left(\mu(1+p)^t\right)^k}{k!}\,{}_kC_x \cdot p^x (1-p)^{k-x}$$ で

あるが、上と同様の計算をすることにより、$P(Y_{(t+2)}^t = x) = e^{-\mu p(1+p)^t} \dfrac{\left(\mu p(1+p)^t\right)^x}{x!}$

したがって $Y_{(t+2)}^t$ は平均 $\mu p(1+p)^t$ のポアソン分布に従う。

以下同様の計算を繰り返すことにより、$Y_{(n)}^t$ は平均 $\mu p^{n-t-1}(1+p)^t$ のポアソン分布に従うことがわかる。

求める X_n は、$X_n = Y_{(n)} + Y_{(n)}^0 + Y_{(n)}^1 + \cdots + Y_{(n)}^{n-1}$ と表わされるので、ポアソン分布の再生性より X_n はポアソン分布に従い、その平均は、

$$\begin{aligned}
\mu p^n + \sum_{t=0}^{n-1} \mu(1+p)^t \cdot p^{n-t-1} &= \mu p^n + \mu p^{n-1} \sum_{t=0}^{n-1} \left(\frac{1+p}{p}\right)^t = \mu p^n + \mu p^{n-1} \cdot \frac{1-\left(\dfrac{1+p}{p}\right)^n}{1-\dfrac{1+p}{p}} \\
&= \mu p^n - \mu p^n \left\{1-\left(\frac{1+p}{p}\right)^n\right\} \\
&= \mu(1+p)^n
\end{aligned}$$