保 険 数 学 1 （問題）

1．次の（1）から（10）までについて、それぞれ五つの選択肢の中から正しい答を一つ選んで、所定の解答用紙にその記号〔(A)から(E)のうちいずれか一つ。〕を記入せよ。　(50点)

（1）次の①～⑤のうち正しい式はいくつあるか。

① $\ddot{s}^{(k)}_{\overline{n|}}=\dfrac{(1+i)^n-1}{d^{(k)}}$　② $\ddot{s}^{(k)}_{\overline{n|}}=s^{(k)}_{\overline{n+\frac{1}{k}|}}-\dfrac{1}{k}$

③ ${}_{m|}\ddot{a}^{(k)}_{\overline{n|}}=\ddot{a}^{(k)}_{\overline{m+n|}}-\ddot{a}^{(k)}_{\overline{m|}}$　④ $\ddot{a}^{(k)}_{\overline{\infty|}}=\dfrac{1}{i^{(k)}}$　⑤ $\bar{a}_{\overline{\infty|}}=\dfrac{1}{\delta}$

（A）1つ　（B）2つ　（C）3つ　（D）4つ　（E）5つ

（2）$\ddot{a}_{\overline{31|}}=20.600$，$\ddot{s}_{\overline{29|}}=46.575$ のとき、永久年金現価 $a_{\overline{\infty|}}$ の値に最も近いのは次のうちどれか。

（A）29　（B）31　（C）33　（D）35　（E）37

（3）$x \geqq 60$ かつ $p_x>0$ で、$p_x+\dfrac{d}{dx}p_x=0$ が常に成り立つことを前提にして、$p_{60}=\dfrac{1}{e}$ のとき、略算定期平均余命 ${}_2e_{60}$ に最も近いのは次のうちどれか。ただし、必要なら $e \fallingdotseq 2.718$ を使用する。

（A）0.40　（B）0.45　（C）0.50　（D）0.55　（E）0.60

（4）ある定常人口社会で、年間の出生率は3.0％であり、また年齢30歳までの人口が総人口の45.0％で、かつ30歳未満で死亡する者の平均年齢は3歳である。30歳以上での総人口死亡率に最も近いのは次のうちどれか。

（A）2.4％　（B）2.5％　（C）2.6％　（D）2.7％　（E）2.8％

（5）$P_{x:\overline{n|}} = 0.07268$, $P_x = 0.00929$, ${}_nP_x = 0.01822$であるとき、予定利率iに最も近いのは次のうちどれか。

（A）0.02　　（B）0.03　　（C）0.04　　（D）0.05　　（E）0.06

（6）$A_x = 0.1616$, $\ddot{a}_x = 16.0830$, $(IA)_x = 4.7447$, $(I\ddot{a})_{x+1} = 212.8400$ のとき、p_xの値に最も近いのは次のうちどれか。

（A）0.9888　　（B）0.9912　　（C）0.9936　　（D）0.9960　　（E）0.9984

（7）終身保険（保険金額1、保険金年末払）について、10年平準年払純保険料として0.05とすることができる。また、最初の10年間の年払純保険料を0.04としそれ以降の年払純保険料を0.002とすることもできる。この保険の終身払込平準年払純保険料の値に最も近いのは次のうちどれか。

（A）0.0077　　（B）0.0080　　（C）0.0083　　（D）0.0086　　（E）0.0089

（8）$\ddot{a}_x + \ddot{a}_{x+2t} = 2 \cdot \ddot{a}_{x+t}$ であるとき、${}_tV_{x+t}$と${}_{2t}V_x$との関係を示す式は次のうちどれか。

（A）${}_tV_{x+t} - {}_{2t}V_x = 2 \cdot {}_tV_{x+t} \cdot {}_{2t}V_x$　　（B）${}_tV_{x+t} - {}_{2t}V_x = {}_tV_{x+t} \cdot {}_{2t}V_x$

（C）${}_tV_{x+t} + {}_{2t}V_x = 2 \cdot {}_tV_{x+t} \cdot {}_{2t}V_x$　　（D）${}_tV_{x+t} + {}_{2t}V_x = {}_tV_{x+t} \cdot {}_{2t}V_x$

（E）$2 \cdot {}_tV_{x+t} - {}_{2t}V_x = {}_tV_{x+t} \cdot {}_{2t}V_x$

（9）$P^{\ 1}_{x:\overline{n-1|}} = 0.00101$, $P_{x:\overline{n-1|}}^{\ \ \ \ 1} = 0.08585$, $i = 0.05$ のとき${}_{n-1}V_{x:\overline{n|}}$ の値に最も近いのは次のうちどれか。

（A）0.868　　（B）0.870　　（C）0.872　　（D）0.874　　（E）0.876

（10）40歳加入保険期間10年で次の給付の生存保険を考える。

① 第1保険年度の死亡に対しては何も支払わない。

② 第2保険年度から第10保険年度までのうちの第t年度の死亡に対しては第（t－1）保険年度末の平準純保険料式責任準備金を予定利率iで1年間利殖した

金額を第t保険年度末に支払う。

③ 保険期間満了時に生存していれば保険金額1を支払う。

このとき、この保険の全期払込年払純保険料に最も近いのは次のうちどれか。

ただし、死亡率は予定利率iを用いて

$q_{40+t} = 1 - (1+i)^{-t}$ $(0 \leqq t \leqq 9)$ を使用しており、また$i = 0.03$とする。

必要なら $(1.03)^{10} = 1.3439$を使用する。

(A) 0.0724　(B) 0.0734　(C) 0.0744　(D) 0.0754　(E) 0.0764

2．次の文中の空欄に適当な数値、算式又は記号を所定の解答用紙に記入せよ。(25点)

$a_{x:\overline{n}|}$で表わされる年1回期末払のn年有期生命年金は、被保険者が年度の途中で死亡すればその年の年金は支払われない。これに対し、年度途中の死亡に対しては前年末から死亡までの端数期間に比例した額を死亡直後に追加して支払う年金を考える。

このような年金を完全年金という。

いま年1回期末払のn年有期完全年金（$\mathring{a}_{x:\overline{n}|}$で表わす）を考えると、

$\mathring{a}_{x:\overline{n}|} = a_{x:\overline{n}|} + \alpha$ と書ける。（αは年度途中の死亡に対して支払う端数の年金）

すなわち、期間〔t, t＋1〕のある時点t＋s（0＜s＜1）における死亡に対する端数年金は $\boxed{\quad(1)\quad}$ で、その時点における死亡した人の割合は $\boxed{\quad(2)\quad}\,ds$

であるので、$\alpha = \sum_{t=0}^{n-1} \int_0^1 \boxed{\quad(3)\quad}\, ds$……（イ）

ここで、保険金が毎年1ずつ増加する保険金即時払の累加定期保険の一時払保険料$(I\bar{A})^1_{x:\overline{n}|}$を考える。期間〔t, t＋1〕内のある時点t＋s（0＜s＜1）での死亡保険金は $\boxed{\quad(4)\quad}$ であり、その時点における死亡した人の割合は $\boxed{\quad(2)\quad}\,ds$であるので、（イ）の右辺と同じ様に表わすと、

$(I\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} \int_0^1 \boxed{\quad(5)\quad}\, ds$……（ロ）である。

（イ）と（ロ）の式を辺々加えて右辺を変形すると、

$\alpha + (I\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} \int_0^1 \boxed{\quad(6)\quad}\, ds + \bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$

この右辺第1項はひとつの記号 $\boxed{\quad(7)\quad}$ で表わすことができる。したがって、年1回期末払のn年有期完全年金（$\mathring{a}_{x:\overline{n}|}$）は次の式で表わされる。

$$\mathring{a}_{x:\overline{n|}} = a_{x:\overline{n|}} + \boxed{\quad(7)\quad} + \bar{A}^{\ 1}_{x:\overline{n|}} - (I\bar{A})^{\ 1}_{x:\overline{n|}} \quad \cdots\cdots \text{(ハ)}$$

（ハ）の式において、$\boxed{\quad(7)\quad}$ を$\bar{A}^{\ 1}_{x:\overline{n|}}$と$(I\bar{A})^{\ 1}_{x:\overline{n|}}$を用いて近似をしてみる。

sの区間〔0, 1〕でt＋sを中間値t＋1/2で近似すると

$$\boxed{\quad(7)\quad} = \sum_{t=0}^{n-1}\int_0^1 \boxed{\quad(6)\quad}\, ds$$

$$\fallingdotseq \boxed{\quad(8)\quad} \cdot \bar{A}^{\ 1}_{x:\overline{n|}} + \boxed{\quad(9)\quad} \cdot (I\bar{A})^{\ 1}_{x:\overline{n|}} \quad \cdots\cdots \text{(ニ)}$$

（ニ）の式を（ハ）の式に代入すると

$\mathring{a}_{x:\overline{n|}} \fallingdotseq a_{x:\overline{n|}} + \boxed{\quad(10)\quad}$ となる。

3．死亡率q_xが年齢xに関して単調増加するとき、以下の設問に答えよ。解答用紙は汎用解答用紙を使用すること。 (25点)

（1）$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$と$\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}$（1≦t≦n－1、tは整数）の大小関係を求めよ。

（2）次の条件を満たすx＋1歳加入、n－1年据置期首払年金給付特約付終身保険を考える。

（給付）

ア．死亡したときは、保険年度末に死亡保険金1を支払う。

イ．第n保険年度以降生存しているときは、保険年度始に年金年額aを支払う。

（保険料）

純保険料は終身払込年払とし、x＋1歳からx＋n歳の間の純保険料をP'_{x+1}とする。ただし、第n保険年度以降の保険料はx＋1歳加入の終身保険の平準年払純保険料P_{x+1}と同額とする。

（責任準備金）

ア．この保険の第t保険年度末平準純保険料式責任準備金を${}_tV'_{x+1}$とする。

イ．x歳加入、n年満期年払全期払込養老保険の第t保険年度末平準純保険料式責任準備金を${}_tV_{x:\overline{n|}}$とする。

① ${}_{n-1}V'_{x+1}$が死亡保険金1を超えない最大のaを求めよ。

② ①で求めたaをこの保険の年金年額とするとき${}_tV_{x:\overline{n|}}$と${}_{t-1}V'_{x+1}$の2≦t≦nにおける大小関係を示せ。

なお解答にあたっては前問(1)の結果を用いてよい。

以上

保 険 数 学 1（解答例）

問題1

設 問 番 号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
解 答 欄	(D)	(C)	(A)	(A)	(E)	(E)	(C)	(E)	(E)	(C)

正解は上表のとおりであるが、以下に各設問の解答方法を略記する。

(1) …… (D)

④について

$$a_{\infty}^{(k)} = \lim_{n\to\infty} \ddot{a}_{\overline{n|}}^{(k)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-v^n}{k\left(1-v^{\frac{1}{k}}\right)} = \frac{1}{d^{(k)}} \neq \frac{1}{i^{(k)}}$$ である。

④以外は全て正しい。

(2) …… (C)

$$a_{\overline{30|}} = \ddot{a}_{\overline{31|}} - 1 = 20.600 - 1.000 = 19.600$$
$$s_{\overline{30|}} = \ddot{s}_{\overline{29|}} + 1 = 46.575 + 1.000 = 47.575$$

したがって $i = \dfrac{1}{a_{\overline{30|}}} - \dfrac{1}{s_{\overline{30|}}} = \dfrac{1}{19.600} - \dfrac{1}{47.575} \fallingdotseq 0.03$

$\therefore\ a_{\infty} = \dfrac{1}{i} = 33.33\ \cdots\cdots$

(3) …… (A)

$\dfrac{1}{p_x}\cdot\dfrac{d}{dx}p_x = -1$ であるから、$\log p_x = -x + c$ （cは定数）

$\therefore\ p_x = e^{c-x}$ と表わせる。

ここで $p_{60} = e^{-1}$ により $c = 59$

$\therefore\ p_x = e^{59-x}$

$${}_2e_{60} = p_{60} + {}_2p_{60} = p_{60} + p_{60}\cdot p_{61} = e^{-1} + e^{-1}e^{-2}$$
$$= \frac{1}{2.718}\left(1 + \frac{1}{(2.718)^2}\right) = 0.4177$$

(4) …… (A)

$$\frac{\ell_0}{T_0} = 0.03 \cdots\cdots (イ)$$
$$\frac{T_0 - T_{30}}{T_0} = 0.45 \cdots\cdots (ロ)$$
$$\frac{T_0 - T_{30} - 30\cdot\ell_{30}}{\ell_0 - \ell_{30}} = 3 \cdots\cdots (ハ)$$

（ハ）より　$T_0 - T_{30} - 3 \cdot \ell_0 = 27\ell_{30}$

両辺をT_{30}で割ると　$\dfrac{\ell_{30}}{T_{30}} = \dfrac{1}{27}\left(\dfrac{T_0 - 3\ell_0}{T_{30}} - 1\right)$

この式の右辺に、（イ）より$T_0 = \dfrac{\ell_0}{0.03}$、（ロ）より$T_{30} = 0.55 \cdot T_0 = \dfrac{0.55}{0.03}\ell_0$

を代入すると、

$$\frac{\ell_{30}}{T_{30}} = 0.0242$$ となる。

(5) …… (E)

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - d \quad \cdots\cdots \text{（イ）}$$

$$P_x = \frac{1}{\ddot{a}_x} - d \quad \cdots\cdots \text{（ロ）}$$

$${}_nP_x = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - \frac{d\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \quad \cdots\cdots \text{（ハ）}$$

（イ）、（ロ）、（ハ）から　$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$, $\ddot{a}_x$を消去すると、

$${}_nP_x = (P_{x:\overline{n}|} + d) - d \cdot \frac{P_{x:\overline{n}|} + d}{P_x + d}$$ となる。

これによりdを求めると

$$d = \frac{P_x(P_{x:\overline{n}|} - {}_nP_x)}{{}_nP_x - P_x} = \frac{0.00929(0.07268 - 0.01822)}{0.01822 - 0.00929}$$

$$= 0.05665 \cdots\cdots$$

$$\therefore \quad i = \frac{d}{1-d} \fallingdotseq 0.06$$

(6) …… (E)

$$(IA)_x = A_x + vp_x \cdot (IA)_{x+1}$$

$$= A_x + vp_x \times \{\ddot{a}_{x+1} - d(I\ddot{a})_{x+1}\}$$

$$= A_x + \ddot{a}_x - 1 - v \cdot d \cdot p_x (I\ddot{a})_{x+1}$$

$$\therefore \quad p_x = \frac{A_x + \ddot{a}_x - 1 - (IA)_x}{v \cdot d \cdot (I\ddot{a})_{x+1}}$$

また、$A_x = 1 - d\ddot{a}_x$より　$d = 0.05213$

$\therefore \quad v = 0.94787$

したがって　　$p_x = 0.9984$

(7) …… (C)

条件より、 $0.05\ddot{a}_{x:\overline{10|}} = 0.04\ddot{a}_{x:\overline{10|}} + 0.002\,{}_{10|}\ddot{a}_x$

$\therefore\ {}_{10|}\ddot{a}_x = 5\ddot{a}_{x:\overline{10|}}$

また $\ddot{a}_x = \ddot{a}_{x:\overline{10|}} + {}_{10|}\ddot{a}_x$ であるから $\ddot{a}_x = 6\ddot{a}_{x:\overline{10|}}$

したがって $P_x \cdot \ddot{a}_x = 0.05 \cdot \ddot{a}_{x:\overline{10|}}$ より $P_x = \dfrac{0.05}{6} = 0.0083\cdots$

(8) …… (E)

$${}_tV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x}$$

$${}_tV_{x+t} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+2t}}{\ddot{a}_{x+t}} = 1 - \frac{2\ddot{a}_{x+t} - \ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x+t}} = -1 + \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x+t}}$$

$$= -1 + \frac{1}{1 - {}_tV_x} = \frac{{}_tV_x}{1 - {}_tV_x} \quad \cdots\cdots\cdots \text{(イ)}$$

$${}_{2t}V_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+2t}}{\ddot{a}_x} = 1 - \frac{2\ddot{a}_{x+t} - \ddot{a}_x}{\ddot{a}_x} = 2\cdot\left(1 - \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x}\right)$$

$$= 2{}_tV_x \quad \cdots\cdots\cdots \text{(ロ)}$$

(イ)、(ロ) より $\quad {}_{2t}V_x = 2\cdot\dfrac{{}_tV_{x+t}}{1 + {}_tV_{x+t}}$

$$\therefore\ 2\cdot{}_tV_{x+t} - {}_{2t}V_x = {}_tV_{x+t}\cdot{}_{2t}V_x$$

(9) …… (E)

${}_{n-1}V_{x:\overline{n|}} + P_{x:\overline{n|}} = v$ (再帰式)

${}_{n-1}V_{x:\overline{n|}} = \dfrac{P_{x:\overline{n|}} - P^1_{x:\overline{n-1|}}}{P_{x:\overset{1}{\overline{n-1|}}}}$ (過去法) より

$${}_{n-1}V_{x:\overline{n|}} = \frac{v - P^1_{x:\overline{n-1|}}}{P_{x:\overset{1}{\overline{n-1|}}} + 1} = \frac{\dfrac{1}{1.05} - 0.00101}{0.08585 + 1} = 0.8761$$

(10) …… (C)

保険料をP、第t年度末の平準純保険料式責任準備金を${}_tV$とすると再帰式より、

$$({}_tV + P)(1 + i) - (1 + i)\,{}_tV\cdot q_{x+t} = p_{x+t}\cdot{}_{t+1}V$$

両辺にvを乗じ $p_{x+t} = 1 - q_{x+t}$を利用すると

$$p_{x+t}\cdot{}_tV + P = v\,p_{x+t}\cdot{}_{t+1}V$$

両辺に $\dfrac{v^t}{p_{x+t}}$ を乗じると

$$v^t\,{}_tV + \frac{v^t}{p_{x+t}}\cdot P = v^{t+1}\,{}_{t+1}V$$

$t = 0, \cdots\cdots 9$ まで辺々加えると、 ${}_0V = 0,\ {}_{10}V = 1$ であるから

$$\sum_{t=0}^{9}\left(\frac{v^t}{p_{x+t}}P\right)=v^{10}$$

題意より、 $p_{x+t}=1-q_{x+t}=(1+i)^{-t}=v^t$ であるから

$$\frac{v^t}{p_{x+t}}=\frac{v^t}{v^t}=1$$

したがって $10P=v^{10}$

$$\therefore\quad P=\frac{1}{10}\times\left(\frac{1}{1.03}\right)^{10}=\frac{1}{10}\times\frac{1}{1.3439}$$

$$=0.0744\cdots\cdots$$

2.

(1) s

(2) ${}_{t+s}p_x\cdot\mu_{x+t+s}$

(3) $s\cdot v^{t+s}\cdot{}_{t+s}p_x\cdot\mu_{x+t+s}$

(4) $t+1$

(5) $(t+1)\ v^{t+s}\cdot{}_{t+s}p_x\cdot\mu_{x+t+s}$

(6) $(t+s)\ v^{t+s}\cdot{}_{t+s}p_x\cdot\mu_{x+t+s}$

(7) $(\bar{I}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|}$

(8) $-\dfrac{1}{2}$

(9) 1

(10) $\dfrac{1}{2}\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$

3. (1)

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=\frac{1}{D_x}(\overbrace{D_x+D_{x+1}+\cdots\cdots\quad+D_{x+n-1}}^{n項})\cdots\cdots ㋑$$

$$\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}=\frac{1}{D_{x+t}}(\overbrace{D_{x+t}\quad+D_{x+t+1}+\cdots\cdots+D_{x+n-1}}^{n-t項})\cdots\cdots ㋺$$

上記のそれぞれの式の第k項目 （$1\leqq k\leqq n-t$, kは正の整数）の大小関係を比較する。

① $k=1$のとき

式㋑の第1項目 $=\dfrac{D_x}{D_x}=1$

式㋺の第1項目 $=\dfrac{D_{x+t}}{D_{x+t}}=1$

② 第k項目で $\dfrac{D_{x+k-1}}{D_x}\geqq\dfrac{D_{x+t+k-1}}{D_{x+t}}$ ……㋩

が成立しているとすると 第$k+1$項目は

$$\frac{D_{x+k}}{D_x}=\frac{D_{x+k-1}}{D_x}\cdot\frac{D_{x+k}}{D_{x+k-1}}$$
$$=\frac{D_{x+k-1}}{D_x}\cdot v\,p_{x+k-1}$$

q_xは単調増加するので　p_{x+k-1}は単調減少することと、式㋩より

$$\frac{D_{x+k}}{D_x}\geqq\frac{D_{x+t+k-1}}{D_{x+t}}\cdot v\,p_{x+t+k-1}$$
$$=\frac{D_{x+t+k-1}}{D_{x+t}}\cdot\frac{D_{x+t+k}}{D_{x+t+k-1}}$$
$$=\frac{D_{x+t+k}}{D_{x+t}}$$ となり　第k＋1項目でも㋩式は成り立つ。

又、式㋑と式㋺は有限項数でかつ、式㋺の方が項数が少ないことにより、

$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\geqq\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$が　　$1\leqq t\leqq n-1$で成り立つ。

(2) −①

給付現価 (S)

給付アの加入時点での現価

$S_1=A_{x+1}$ ……㋑−1

給付イの加入時点での現価

$S_2=a\cdot\frac{D_{x+n}}{D_{x+1}}\cdot\ddot{a}_{x+n}$ ……㋑−2

保険料 (P)

$P_1=\frac{A_{x+1}}{\ddot{a}_{x+1}}=P_{x+1}$ ……㋺−1

$P_2=\frac{S_2}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}}$ ……㋺−2

$$P'_{x+1}=P_1+P_2$$

${}_{n-1}V'_{x+1}$ ＝（S_1の第x＋n年以降の現価＋第n保険年度以降の生存に対する年金年額支払の現価）−（P_1の第x＋n年以降の現価）

$$=A_{x+n}+a\cdot\ddot{a}_{x+n}-P_1\cdot\ddot{a}_{x+n}$$

${}_{n-1}V'_{x+1}\leqq 1$より

$$A_{x+n}+a\cdot\ddot{a}_{x+n}-P_1\cdot\ddot{a}_{x+n}\leqq 1$$

両辺に $\frac{1}{\ddot{a}_{x+n}}$ を掛けて

$$\frac{A_{x+n}}{\ddot{a}_{x+n}}+a-P_1\leqq\frac{1}{\ddot{a}_{x+n}}$$

ここで$P_1=\dfrac{A_{x+1}}{\ddot{a}_{x+1}}$　，　$1-\ddot{a}\cdot d=A$によって

$$\left(\frac{1}{\ddot{a}_{x+n}}-d\right)+a-\left(\frac{1}{\ddot{a}_{x+1}}-d\right)\leqq\frac{1}{\ddot{a}_{x+n}}$$

$$\therefore\quad a\leqq\frac{1}{\ddot{a}_{x+1}}$$

したがって最大のaは$\dfrac{1}{\ddot{a}_{x+1}}$である。

(2)　−②

${}_{t-1}V'_{x+1}$の$2\leqq t\leqq n$における算式は上記①により

${}_{t-1}V'_{x+1}=\{(S_1+S_2)$の$x+t$以降の現価$\}$
$-\{(P_1+P_2)$の$x+t$以降の現価$\}$　となる

式㋑、式㋺より

$$=\left\{A_{x+t}+a\cdot\frac{D_{x+n}}{D_{x+t}}\cdot\ddot{a}_{x+n}\right\}$$
$$-\{P_1\cdot\ddot{a}_{x+t}+P_2\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}\}$$
$$=(A_{x+t}-P_1\cdot\ddot{a}_{x+t})+a\cdot\frac{D_{x+n}}{D_{x+t}}\cdot\ddot{a}_{x+n}-P_2\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

$A=1-\ddot{a}\cdot d$

$P_1=\dfrac{A_{x+1}}{\ddot{a}_{x+1}}$を代入し、また (2) −①の結果を代入すると

$$=\left(1-\frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_{x+1}}\right)+\frac{1}{\ddot{a}_{x+1}}\cdot\frac{D_{x+n}}{D_{x+t}}\cdot\ddot{a}_{x+n}$$
$$-\frac{1}{\ddot{a}_{x+1}}\cdot\frac{D_{x+n}\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{D_{x+1}\cdot\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}}\cdot\ddot{a}_{x+n}$$

ここで

$$1+\frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}}\cdot\frac{D_{x+n}}{D_{x+1}}=1+\frac{N_{x+n}}{D_{x+n}}\cdot\frac{D_{x+1}}{(N_{x+1}-N_{x+n})}\cdot\frac{D_{x+n}}{D_{x+1}}$$
$$=\frac{N_{x+1}}{D_{x+1}}\cdot\frac{D_{x+1}}{N_{x+1}-N_{x+n}}$$

ゆえに

$$\left(1-\frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_{x+1}}\right)+\frac{1}{\ddot{a}_{x+1}}\ \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}}\cdot\ddot{a}_{x+n}-\frac{1}{\ddot{a}_{x+1}}\ \frac{D_{x+n}\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{D_{x+1}\ \ \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}}\cdot\ddot{a}_{x+n}$$
$$=1-\frac{1}{\ddot{a}_{x+1}}\left(\ddot{a}_{x+t}-\frac{D_{x+n}}{D_{x+t}}\cdot\ddot{a}_{x+n}\right)-\frac{1}{\ddot{a}_{x+1}}\ \frac{D_{x+n}\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{D_{x+1}\ \ \ddot{a}_{x+t:\overline{n-1}|}}\cdot\ddot{a}_{x+n}$$
$$=1-\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x+1}}-\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x+1}}\ \frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}}\ \frac{D_{x+n}}{D_{x+1}}$$

$$= 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x+1}} \left(1 + \frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}} \cdot \frac{D_{x+n}}{D_{x+1}} \right)$$

ここで

$$1 + \frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}} \frac{D_{x+n}}{D_{x+1}} = 1 + \frac{N_{x+n}}{D_{x+n}} \frac{D_{x+1}}{N_{x+1} - N_{x+n}} \frac{D_{x+n}}{D_{x+1}}$$

$$= 1 + \frac{N_{x+n}}{N_{x+1} - N_{x+n}}$$

$$= \frac{N_{x+1}}{D_{x+1}} \frac{D_{x+1}}{N_{x+1} - N_{x+n}}$$

したがって

$$= 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x+1}} \cdot \frac{\ddot{a}_{x+1}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}}$$

$$= 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}}$$

$$\therefore \quad {}_{t-1}V'_{x+1} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}} \quad \cdots\cdots ㋩$$

一方 $\quad {}_tV_{x:\overline{n}|} = 1 - \dfrac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \quad \cdots\cdots ㊁$

(1) の結果により $t = 1$ のとき　$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} \geqq \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}$ が成立

よって　㋩、㊁より

$${}_{t-1}V'_{x+1} \leqq {}_tV_{x:\overline{n}|} \qquad 2 \leqq t \leqq n \quad \text{が成り立つ}$$