年金数理（問題）

1．次の(1)～(5)までについて、それぞれ５つの選択肢の中から正しいものを選んで所定の解答用紙にその記号を記入せよ。（２０点）

(1) 毎年の給付額：B（期初払）、保険料収入：C（期初払）、積立金残高：F、予定利率：i　としたときの極限方程式は次のどれか。

（A）$C+(1+i)\cdot F=B$　（B）$C+i\cdot F=B$　（C）$C-i\cdot F=B$　（D）$C\cdot(1+i)+i\cdot F=B\cdot(1+i)$

（E）$(C+F)\cdot i=B$

(2) 定常状態に達した年金制度がある。この制度の年間の脱退者数に最も近いのはどれか。ただし、新規加入者は常に20歳で加入するものとし、定年年齢は60歳、加入者の総数は10,000人で脱退者の平均加入年数は28.6年である。

（A） 250人　（B） 300人　（C） 350人　（D） 400人　（E） 450人

(3) n年間各期初に「１＋（前年までの給付の合計のａ倍）」を給付する年金の現価（予定利率ｉ）と、n年間各期初に１を給付する年金の現価率（予定利率ｉ’）が等しくなった。このとき、ｉ’とｉの関係で正しいものはどれか。

（A）$i'=\dfrac{a}{1+a}i$　（B）$i'=\dfrac{1-a}{1+a}i$　（C）$i'=\dfrac{i}{1-a}$　（D）$i'=\dfrac{i-a}{1+a}$　（E）$i'=\dfrac{i+a}{1-a}$

(4) 死亡率がｑで一定、予定利率ｉとした場合の期初払終身年金現価を表す式は次のどれか。

（A）$\dfrac{1+q}{i-q}$　（B）$\dfrac{1+i}{i-q}$　（C）$\dfrac{1+i}{i+q}$　（D）$\dfrac{1-i}{i-q}$　（E）$\dfrac{1-q}{i+q}$

(5) ある最終給与比例制の年金制度において次のことがわかっている。基礎率には見込んでいないところの一律５％の給与上昇が年度末に生じた。この年金制度の年度末における過去勤務債務はどれに近いか。ただし、年度末の給与上昇および利差以外の差損益は生じなかった。

- 期初責任準備金　1,000　• 期初年金資産　500　• 標準保険料（期初払）　100　• 特別保険料（期初払）　100
- 給付金　0　• 実質利回り　3.5%　• 予定利率　5.0%

（A） 450　（B） 475　（C） 500　（D） 525　（E） 550

2．次の年金制度に関する後述の説明文の空欄に当てはまる数値を所定の解答用紙に記入せよ。空欄に金額を埋める場合は百万円未満を四捨五入し、保険料率を埋める場合はパーセント表示で小数点以下第3位を四捨五入した値とせよ。（20点）

定常人口の企業を仮定する。給付額は加入期間の各月の給与の累計に比例して決定されるものとし、その他の制度内容はTrowbridgeのモデルにもとづくものとした年金制度の諸数値は以下のとおりである。

- 年金者給付現価　S^p　800 百万円
- 被保険者の給付現価　将来期間対応分　S^a_{FS}　300 百万円
- 〃　過去期間対応分　S^a_{PS}　500 百万円
- 〃　合　計　S^a　800 百万円
- 新規加入員の加入時給付現価（単年度分）　7.2 百万円
- 〃　将来加入員給付現価　S^f　①　百万円
- 被保険者の給与現価　G^a　3,000 百万円
- 新規加入員の加入時給与現価（単年度分）　150 百万円
- 〃　将来加入員給与現価　G^f　②　百万円
- 積立金の残高　F　1,200 百万円
- 給与総額　ΣLB　300 百万円
- 予定利率　i　5.0 ％
- 15年償却の年金現価率　$\ddot{a}_{\overline{15}|}$　10.90

(1) 財政方式を加入年齢方式とし、過去勤務債務を15年償却とした場合、標準保険料率 ③ 、特別保険料率 ④ となる。

(2) 財政方式を開放基金方式とし、過去勤務債務を15年償却とした場合、標準保険料率 ⑤ 、特別保険料率 ⑥ となる。

(3) 将来期間について給付を一律2倍とした場合、(2)の保険料率は標準保険料率 ⑦ 、特別保険料率 ⑧ となる。

(4) 将来期間について給付を一律2倍とし、給与を2分の1とする場合で、財政方式は開放基金方式のとき、標準保険料率 ⑨ 、特別保険料率 ⑩ となる。

3．次の各設問に答えよ。（20点）

(1) 定年年齢を定めず、脱退時には加入年数tに比例してA×tの年金を終身支払う制度を考える。ただし、加入年数tは年未満切り捨てとし、年金支給はt＋1年経過後の生存を条件として開始するものとする。財政方式を加入年齢方式とした場合の年1回期初払いの標準保険料率P_xを求めよ。ここにxは加入年齢であり、必要に応じ次の記号を用いよ。脱退残存表に基づく基数　D_x、N_x。生命表に基づく基数　D'_x、N'_x。

(2) $\ddot{P}_A$ をTrowbridgeモデルの年金制度における加入年齢方式の保険料期初払い標準保険料率とし、P_A を同じ制度の期末払い標準保険料率とする。別途の制度で、Trowbridgeモデルの給付に加え、期中の脱退者には期末に1の一時金を支払う年金制度を考え、この制度の加入年齢方式の保険料期初払い標準保険料率を$\ddot{P}_B$ とする。

① $\ddot{P}_B$ を求めよ。

② $\ddot{P}_A$、P_A、$\ddot{P}_B$ の3種類の保険料率が与えられた場合、予定利率iを$\ddot{P}_A$、P_A、$\ddot{P}_B$ を用いて表せ。ただし、Trowbridgeモデルおよび Trowbridgeモデルの給付に加え一時金を支払う制度両者において予定利率は共通である。

4．以下の各設問に答えよ。（20点）

Trowbridgeモデルにおいて、単位積立方式における一人当りの保険料率を ${}^{U}P_x$ とし、将来の加入期間にかかる給付額 $\dfrac{x_r - x}{x_r - x_e}$ を賄うのに必要な保険料率を ${}^{A}P_x = \dfrac{x_r - x}{x_r - x_e} \cdot D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} / (N_x - N_{x_r})$ と定義する。

(1) 開放基金方式の一人当りの保険料 ${}^{OAN}P$ が加入年齢方式の保険料率 ${}^{E}P$ と ${}^{A}P_x$ の加重平均値であることを示せ。

(2) ${}^{A}P_x > {}^{U}P_x$ であることを ${}^{U}P_x$ が x の単調増加関数であることにより示せ。

(3) ${}^{A}P_x$ は x の単調増加関数であり、${}^{A}P_x \geqq {}^{E}P$ となることから ${}^{OAN}P > {}^{E}P$ となることを示せ。

(4) 開放基金方式において x 歳の被保険者の給付現価を S_x、人数現価を G_x とすると、$S_x/G_x > {}^{U}P_x$ であり、かつ ${}^{U}P_x$ は x の増加関数であることを示すことにより、$S_x/G_x = {}^{OAN}P$ となる年齢 x より若い年齢で予定を上回って新規加入者が加入すれば剰余要因となり、逆に x 歳より高齢で予定を上回って加入すれば不足要因となることを示せ。（${}^{OAN}P$ が ${}^{U}P_x$ の加重平均値であることを利用してよい）

5．以下の各設問に答えよ。（20点）

年金財政上の基礎率のうち昇給率の決定にあたってはいわゆるベースアップの要素を見込まない「静態的昇給率」をとる場合と、実際の将来推計ということでいわゆるベースアップ等を含み「動態的昇給率」をとる場合がある。

$\{b_x\}$：静態的昇給率　　$\{b^*_{x,t}\}$：動態的昇給率　とする。ここで $b^*_{x,t}$ は b_x を基礎として算出され

$$\frac{b^*_{x,t}}{b^*_{x-1,t-1}} = \frac{b_x}{b_{x-1}} \cdot \left(1 + \frac{k_{x,t}}{100}\right)$$

（ここに $b_{x_e} = b^*_{x_e,1} = 1.000$ ）という関係があるものとする。

前記の $k_{x,t}$ をベースアップ率と呼ぶこととし、$k_{x,t}$ は年齢の他、設立からの経過年数により決定されるものとする（設立年度を第1年度とする）。

定年退職者（定年者は年度期初に定年到達し、保険料を拠出せず脱退する）を給付対象者とした以下の年金制度を設立するものとする。

- 制度への加入時期：年1回期初に加入
- 給付の内容　　　：定年退職時の給与の α 倍を毎期初終身にわたって支給
- 保険料拠出形態　：毎期初に従業員総給与の一定割合を拠出
- 財政方式　　　　：開放型総合保険料方式（ただし、既に定年退職した者については給付の対象とせず、現在の従業員については過去勤務期間を全て通算する）
- 従業員の現在（設立時）の人員構成、給与額は脱退残存表および静態的予定給与（B_x ：ここに $B_x/B_{x_e} = b_x$ ）にしたがっているものとする。また、人員構成は今後も維持されるものとする。

(1) ベースアップを見込まない場合の平準保険料率を求めよ。

(2) 動態的昇給率を用いるものとして、$t=1$ の年度末にのみ各年齢において一律 k％のベースアップを見込み、$t>1$ では $k_{x,t}=0$ とした場合の総給付現価および総給与現価を $\{b_x\}$ を用いて求めよ。

(3) 設立以降将来にわたって全年齢一律に毎年末に k％のベースアップを見込んだ場合の平準保険料率を求めよ。

(2)、(3)においてベースアップの効果は将来加入する者の給与にも及ぶものとする。（n年度中に $k_{x,n}$ ％のベースアップがあった場合、$b_{x,n+1} = b_{x,n} \cdot (1 + k_{x,n}/100)$ であるということ）

以上

年 金 数 理(解答例)

平成8年12月18日

1．

設問番号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
解答欄	(D)	(C)	(D)	(C)	(C)

正解は上記のとおりであるが、以下に解法を略記する。

(1) 極限方程式　$C+d\cdot F=B$　を変形すると

$$C+\frac{i}{1+i}\cdot F=B$$

$$C\cdot(1+i)+i\cdot F=B\cdot(1+i)$$　したがって (D) が正しい

(2) x歳の脱退力を μ_x, $x_e=20$, $x_r=60$ とすると

脱退者平均加入年数の　脱退者総加入年数÷脱退者数　は以下のとおり

$\{\int_{x_e}^{x_r}(x-x_e)\ell_x\cdot\mu_x d_x+(x_r-x_e)\cdot\ell_{x_r}\}/\{\int_{x_e}^{x_r}\ell_x\cdot\mu_x d_x+\ell_{x_r}\}=28.6\cdots\cdots①$

ここで、分子の第1項は

$$\int_{x_e}^{x_r}(x-x_e)\ell_x\,\mu_x d_x=\int_{x_e}^{x_r}(x-x_e)\cdot\ell_x\left(-\frac{1}{\ell_x}\cdot\frac{d\ell_x}{d_x}\right)d_x$$

$$=-\int_{x_e}^{x_r}(x-x_e)\frac{d\ell_x}{d_x}\cdot d_x$$

$$=-[(x-x_e)\cdot\ell_x]_{x_e}^{x_r}+\int_{x_e}^{x_r}\ell_x d_x$$

$$=-(x_r-x_e)\cdot\ell_{x_r}+\int_{x_e}^{x_r}\ell_x d_x$$

分子は $(x_r-x_e)\ell_{x_r}$ が相殺され $\int_{x_e}^{x_r}\ell_x d_x$ となる。

したがって $\int_{x_e}^{x_r}\ell_x d_x$ は加入者総数であるから脱退者数をAとすると

$10{,}000／A=28.6$

$\because A=10{,}000／28.6=349.65\cdots\cdots$

したがって (C) が正しい。

(3) t年目の年金額を B_t とする

$B_1=1$, $B_2=1+a$, $B_3=1+(B_1+B_2)a=1+(1+1+a)\cdot a=(1+a)^2$

$B_K=(1+a)^{K-1}$ とすると

$$B_{K+1}=1+(\sum_{t=1}^{K}B_t)\cdot a=1+\frac{1-(1+a)^K}{1-(1+a)}\cdot a=1+\frac{1-(1+a)^K}{-a}a$$

$$=1-1+(1+a)^K=(1+a)^K$$

よって数学的帰納法により $B_t=(1+a)^{t-1}$

この年金の現価は $\sum_{t=1}^{n}(1+a)^{t-1}\cdot v^{t-1}=\dfrac{1-\{(1+a)v\}^n}{1-(1+a)\cdot v}$

一方、n年間、各期初に1を給付する年金の現価率（予定利率i'）は

$$\frac{1-v'^{n}}{1-v'} \quad ここに \ v'=\frac{1}{1+i'}$$

この2つの現価率が同一となるためには

$$\frac{1-v'^{n}}{1-v'}=\frac{1-\{(1+a)\cdot v\}^{n}}{1-(1+a)v} \quad より \ v'=(1+a)\cdot v$$

したがって $\dfrac{1}{1+i'}=\dfrac{1+a}{1+i}$

$$\therefore i'=\frac{1+i}{1+a}-1=\frac{i-a}{1+a}$$

よって（D）が正しい。

(4) 求める年金現価率をAとおくと、死亡率が一定であるから、生存率（$1-q$）も一定であり、公比が $\dfrac{1-q}{1+i}$ の等比数列となる。したがって

$$A=1+\frac{1-q}{1+i}+\left(\frac{1-q}{1+i}\right)^{2}+\cdots\cdots+$$

$$=\frac{1}{1-\dfrac{1-q}{1+i}}=\frac{1+i}{i+q}$$

したがって（C）が正しい。

(5) 期末責任準備金は

（1,000 + 100）× 1.05 × 1.05 = 1,212.75

期末年金資産は

（500 + 100 + 100）× 1.035 = 724.5

したがって期末過去勤務債務は

1,212.75 − 724.5 = 488.25

よって（C）が正しい。

2.

番号	解　　答
①	144(百万円)
②	3,000(百万円)
③	4.80%
④	7.83%
⑤	7.40%
⑥	3.06%
⑦	14.80%
⑧	3.06%
⑨	14.80%
⑩	6.12%

各々の計数を求める算式は以下のとおり

① $S^{f}=7.2/0.05=144$

② $G^{f}=150/0.05=3{,}000$

③ $S_0^{f}/G_0^{f}=144/3{,}000=0.048$

④ $\{(800+800)-0.048\times 3{,}000-1{,}200\}\div(\Sigma LB\times \ddot{a}_{\overline{15|}})$

$=(1{,}600-144-120)\div(300\times 10.90)=256\div 3{,}270$

$=0.78\cancel{2}\cancel{8}\cdots \quad \rightarrow 7.83\%$

⑤ $(S_{FS}^{a}+S^{f})\div(G^{a}+G^{f})$

$=(300+144)\div(3{,}000+3{,}000)=0.074$

⑥ $\{(S^{p}+S^{a}+S^{f})-{}^{OAN}P\cdot(G^{a}+G^{f})-F\}\div(\Sigma LB\times \ddot{a}_{\overline{15|}})$

$=(800+800+144)-0.074\cdot(3{,}000+3{,}000)-1{,}200\}\div(300\times 10.90)$

$=(1{,}744-444-1{,}200)\div 3{,}270=0.030\overset{6}{\cancel{5}}\cancel{8}1\cdots\cdots \quad \rightarrow 3.06\%$

⑦ $(2\cdot S_{FS}^{a}+2\cdot S^{f})\div(G^{a}+G^{f})=2(300+144)\div 6{,}000=0.148$

⑧ $\{(S^{p}+S_{PS}^{a}+2\cdot S_{FS}^{a}+2\cdot S^{f})-{}^{OAN}P(G^{a}+G^{f})-F\}\div(\Sigma LB\times \ddot{a}_{\overline{15|}})$

$=\{(800+500+2\times 300+2\times 144)-0.148\times 6{,}000-1{,}200\}\div 3{,}270=3.0\overset{6}{\cancel{5}}\cancel{8}1\cdots \rightarrow 3.06\%$

⑨ $\left(2\times S_{FS}^{a}\times\frac{1}{2}+2\cdot S^{f}\times\frac{1}{2}\right)\div\left(G^{a}\times\frac{1}{2}+G^{f}\times\frac{1}{2}\right)$

$=\left(2\times 300\times\frac{1}{2}+2\times 144\times\frac{1}{2}\right)\div\left(3{,}000\times\frac{1}{2}+3{,}000\times\frac{1}{2}\right)=0.148$

⑩ $\left\{\left(S^{p}+S_{PS}^{a}+2\cdot S_{FS}^{a}\times\frac{1}{2}+2\times S^{F}\times\frac{1}{2}\right)-0.148\cdot\left(G^{a}\times\frac{1}{2}+G^{f}\times\frac{1}{2}\right)-F\right\}\div\left(\Sigma LB\times\frac{1}{2}\times\ddot{a}_{\overline{15|}}\right)$

$=\left\{\left(800+500+2\times 300\times\frac{1}{2}+2\times 144\times\frac{1}{2}\right)-0.148\times 3{,}000-1{,}200\right\}\div\left(300\times\frac{1}{2}\times 10.90\right)$

$=(1{,}744-444-1{,}200)\div 1{,}635=100\div 1{,}635=0.061\overset{2}{\cancel{1}}\cancel{6}\cancel{2}\cdots\cdots \quad \rightarrow 6.12\%$

3.　(1)

死亡率を含む脱退率を q_x 、死亡率を q'_x とする

給付原価 S_X は、

$$S_x=\sum_{t=1}^{\omega-x}\frac{D_{x+t}}{D_x}\times(q_{x+t}-q'_{x+t})\times At\times\frac{N'+t+1}{D'_{x+t+1}}\times v$$

$$=A\times\sum_{t=1}^{\omega-x}\frac{D_{x+t}}{D_x}\times\left(\frac{D'_{x+t+1}}{D'_{x+t}}-\frac{D_{x+t+1}}{D_{x+t}}\right)\times t\times\frac{N'_{x+t+1}}{D'_{x+t+1}}$$

$$=A\times\sum_{t=1}^{\omega-x}\left(\frac{D_{x+t}}{D_x}\times\frac{N_{x+t+1}}{D'_{x+t}}-\frac{D_{x+t+1}}{D_x}\times\frac{N'_{x+t+1}}{D'_{x+t+1}}\right)\times t$$

$$=A\times\sum_{t=1}^{\omega-x}\sum_{s=0}^{\omega-x-t}\left(\frac{D_{x+s+t}}{D_x}\times\frac{N'_{x+s+t+1}}{D'_{x+s+t}}-\frac{D_{x+s+t+1}}{D_x}\times\frac{N'_{x+s+t+1}}{D'_{x+s+t+1}}\right)$$

$$=A\times\sum_{t=1}^{\omega-x}\sum_{s=0}^{\omega-x-t}\left(\frac{D_{x+s+t}}{D_x}\times\frac{N'_{x+s+t+1}}{D'_{x+s+t}}-\frac{D_{x+s+t+1}}{D_x}\times\frac{N'_{x+s+t+2}}{D'_{x+s+t+1}}-\frac{D_{x+s+t+1}}{D_x}\right)$$

$$=A\times\sum_{t=1}^{\omega-x}\left(\frac{D_{x+t}}{D_x}\times\frac{N'_{x+t+1}}{D'_{x+t}}-\frac{N_{x+t+1}}{D_x}\right)$$

$$=A\times\sum_{t=1}^{\omega-x}\frac{D_{x+t}}{D_x}\left(\frac{N'_{x+t}}{D'_{x+t}}-\frac{N_{x+t}}{D_{x+t}}\right)$$

給与原価 G_x は、$G_x=\dfrac{N_x}{D_x}$

$$P_x=\frac{S_x}{G_x}=A\cdot\frac{\sum_{t=1}^{\omega-x}D_{x+t}\left(\frac{N'_{x+t}}{D'_{x+t}}-\frac{N_{x+t}}{D_{x+t}}\right)}{N_x}$$

3－ (2)

① $\ddot{P}_B=\dfrac{(M_x-M_{xr})+N_{xr}}{N_x-N_{xr}}$

② $\ddot{P}_A=\dfrac{N_{xr}}{N_{x+1}-N_{xr}}$　　　$P_A=\dfrac{N_{xr}}{N_{x+1}-N_{xr+1}}$

$$D_{x+1}=\ell_{x+1}v^{x+1}=(\ell_x-d_x)v^{x+1}=vD_x-C_x$$

$$N_{x+1}=vN_x-M_x$$

$$P_A=\frac{N_{xr}}{(vN_x-M_x)-(vN_{xr}-M_{xr})}$$

$$=\frac{N_{xr}}{(vN_x-N_{xr})-(M_x-M_{xr})}$$

$$= \frac{\dfrac{N_{xr}}{N_x - N_{xr}}}{v - \dfrac{M_x - M_{xr}}{N_x - N_{xr}}}$$

$$= \frac{\ddot{\mathbf{P}}_A}{v - (\ddot{\mathbf{P}}_B - \ddot{\mathbf{P}}_A)}$$

$$v = \frac{\ddot{\mathbf{P}}_A}{P_A} + (\ddot{\mathbf{P}}_B - \ddot{\mathbf{P}}_A)$$

$$i = \frac{1}{\dfrac{\ddot{\mathbf{P}}_A}{P_A} + (\ddot{\mathbf{P}}_B - \ddot{\mathbf{P}}_A)} - 1$$

4．(1)

$$ {}^{OAN}P=\frac{S^{a}_{Fs}+S^{f}}{G^{a}+G^{f}} $$

S^{a}_{Fs}：現在加入員の将来期間対応給付現価
S^{f}　：将来加入員給付現価
G^{a}　：現在加入員給与現価
G^{S}　：将来加入員給与現価

$$ S^{a}_{Fs}=\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\left(\frac{x_r-x}{x_r-x_e}\cdot\frac{D_{xr}\ddot{a}_{xr}}{D_x}\right)\cdot\ell_x $$

$$ S^{f}=\frac{v}{d}\cdot\ell_{xe}\cdot\frac{D_{xr}\ddot{a}_{xr}}{D_{xe}} $$

$$ G^{a}=\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\frac{N_x-N_{xr}}{D_x}\cdot\ell_x $$

$$ G^{f}=\frac{v}{d}\cdot\ell_{xe}\cdot\frac{N_x-N_{xe}}{D_{xe}} $$

$$ {}^{A}P_x=\frac{x_r-x}{x_r-x_e}\cdot D_{xr}\ddot{a}_{xr}/(N_x-N_{xr}) $$ であるから、

$$ {}^{OAN}P=\frac{\left\{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}{}^{A}P\cdot\frac{N_x-N_{xr}}{D_x}\cdot\ell_x+\frac{v}{d}\,{}^{E}P\frac{N_{xe}}{D_{xe}}\cdot\ell_{xe}\right\}}{\sum_{x=x_r}^{x_r-1}\frac{N_x-N_{xr}}{D_x}\cdot\ell_x+\frac{v}{d}\;\frac{N_x-N_{xe}}{D_{xe}}\cdot\ell_{xe}} $$

従って　${}^{OAN}P$ は　${}^{A}P_x$ と　${}^{E}P$ との加重平均値で表わされる。

(2)

$$ {}^{U}P_x=\frac{1}{x_r-x_e}D_{xr}\ddot{a}_{xr}/D_x $$

$$ {}^{U}P_{x+1}-{}^{U}P_x=\frac{D_{xr}\ddot{a}_{xr}}{x_r-x_e}\left(\frac{1}{D_{x+1}}-\frac{1}{D_x}\right) $$

$$ =\frac{D_{xr}\ddot{a}_{xr}}{x_r-x_e}\left(\frac{D_x-D_{x+1}}{D_xD_{x+1}}\right)>0\ (\because P_x>D_{x+1}) $$

従って ${}^{U}P_x$ は x の単調増加関数である。

次に $$ {}^{A}P_x=\frac{x_r-x}{x_r-x_e}\cdot D_{xr}\ddot{a}_{xr}/(N_x-N_{xr}) $$

$$ =(x_r-x)\,{}^{U}P_x\,D_x/(N_x-N_{xr}) $$

$$ =\left(\sum_{y=x}^{x_r-1}{}^{U}P_yD_y\right)/\left(\sum_{y=x}^{x_r-1}D_y\right) $$

となることから${}^{A}P_x$は${}^{U}P_y$のD_yによる重みつき平均値で表わされることがわかる。
ここで${}^{U}P_y > {}^{U}P_x$ $(x \leqq y < x_r)$($\because$ ${}^{U}P_y$はyの単調増加関数)であることから、${}^{A}P_x > {}^{U}P_x$であることが示された。

(3)

$$
\begin{aligned}
{}^{A}P_{x+1} &= \left(\sum_{y=x+1}^{x_r-1} {}^{U}P_y D_y\right) / \left(\sum_{y=x+1}^{x_r-1} D_y\right) \\
&= \left(\sum_{y=x}^{x_r-1} {}^{U}P_y D_y - {}^{U}P_x D_x\right) / \left(\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y - D_x\right) \\
&= \left({}^{A}P_x \sum_{y=x}^{x_r-1} D_y - {}^{U}P_x D_x\right) / \left(\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y - D_x\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{A}P_{x+1} - {}^{A}P_x &= \frac{\left({}^{A}P_x \sum_{y=x}^{x_r-1} D_y - {}^{U}P_x D_x\right) - \left(\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y - D_x\right) {}^{A}P_x}{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y - D_x} \\
&= \frac{\left({}^{A}P_x - {}^{U}P_x\right) D_x}{\sum_{y=x+1}^{x_r-1} D_y} > 0 \ (\because {}^{A}P_X > {}^{U}P_X)
\end{aligned}
$$

従って${}^{A}P_x$はxの単調増加関数である。
ここで${}^{A}P_{xe} = {}^{E}P$であることから${}^{A}P_x \geqq {}^{E}P$ が示せた。
(1) より${}^{OAN}P$は${}^{A}P_X$と${}^{E}P$の加重平均値であるから${}^{OAN}P > {}^{E}P$となる。

(4)

$$S_x = D_{xr} \ddot{a}_{xr} / D_x$$

$$G_x = (N_x - N_{xr}) / D_x \text{ より}$$

$$S_x/G_x = D_{xr} \ddot{a}_{xr} / (N_x - N_{xr})$$

$${}^{U}P_x = \frac{1}{x_r - x_e} \cdot \frac{D_{xr} \ddot{a}_{xr}}{D_x} \text{ より}$$

$$S_x/G_x = (x_r - x_e)\, {}^{U}P_x\, D_x / (N_x - N_{xr})$$

$$=\sum_{y=x_e}^{x_r-1}{}^{U}P_y D_y \Big/ \sum_{y=x}^{x_r-1} D_y$$

$$=\sum_{y=x}^{x_r-1}{}^{U}P_y D_y \Big/ \sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \geqq {}^{U}P_x$$

（∵　${}^{U}P_y$はyの単調増加関数であるため）

また$S_{x+1}/G_{x+1}=D_{xr}\ddot{a}_{xr}/(N_{x+1}-N_{xr})$

$$S_{x+1}/G_{x+1}-S_x/G_x=D_{xr}\ddot{a}_{xr}\frac{(N_x-N_{xr})-(N_{x+1}-N_{xr})}{(N_{x+1}-N_{xr})(N_x-N_{xr})}$$

$$=D_{xr}\ddot{a}_{xr}\frac{D_x}{(N_{x+1}-N_{xr})(N_x-N_{xr})}>0$$であることから

S_x/G_xはxの単調増加関数である。

ここでx歳の被保険者の責任準備金は

$S_x-{}^{OAN}P\cdot G_x=G_x(S_x/G_x-{}^{OAN}P)$

ここで①　$S_{xe}/G_{xe}={}^{E}P$であり${}^{OAN}P>{}^{E}P$であることから、$x=x_e$では$S_x/G_x-{}^{OAN}P$はマイナスである。

②　$S_x/G_x\geqq{}^{U}P_x$であること、${}^{OAN}P$は${}^{U}P_x$の加重平均値であることから、xを十分大きくとればS_x/G_xは${}^{OAN}P$より大きくなる。

③　$S_x/G_x-{}^{OAN}P$は単調増加関数である。

この3つのことから$S_x/G_x-{}^{OAN}P$はマイナス→0→プラスと変化することがわかる。

従って$S_x/G_x={}^{OAN}P$となる年齢xを境に、その年齢より若い年齢で予定を上回って新規加入者が加入すればマイナスの責任準備金が増加することとなり、剰余要因となり、逆にx歳より高齢で予定を上回って加入すれば不足要因となることとなる。

5．(1)

$$P^{(OAN)}=(S^a+S^f)/(G^a+G^f)$$

S^a ：加入員の給付現価
S^f ：将来者 〃 〃
G^a ：加入員の給与現価
G^f ：将来者 〃 〃

$$S^a+S^f=\sum_{y=x_e}^{x_r-1}\ell_y B_y\cdot\frac{D_{xr}b_{xr}}{D_y b_y}\cdot\alpha\cdot\ddot{a}_{xr}+\frac{v}{d}\cdot\ell_{xe}b_{xe}\cdot\frac{D_{xr}b_{xr}}{D_{xe}b_{xe}}\cdot\alpha\cdot\ddot{a}_{xr}$$

$$=\sum_{y=x_e}^{x_r-1}\ell_y B_y\cdot\frac{\ell_{xr}v^{xr}b_{xr}}{\ell_y v^y b_y}\cdot\alpha\cdot\ddot{a}_{xr}+\frac{v}{d}\cdot\ell_{xe}b_{xe}\cdot\frac{\ell_{xr}v^{xr}b_{xr}}{\ell_{xe}v^{xe}b_{xe}}\cdot\alpha\cdot\ddot{a}_{xr}$$

$$=\sum_{y=x_e}^{x_r-1}\ell_{xr}B_{xr}\cdot v^{xr-y}\cdot\alpha\cdot\ddot{a}_{xr}+\frac{v}{d}\ell_{xr}\cdot B_{xr}\cdot\alpha\cdot\ddot{a}_{xr}\cdot v^{xr-xe}$$

$$=\ell_{xr}B_{xr}\cdot\alpha\cdot\ddot{a}_{xr}\left\{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}v^{xr-y}+\frac{v^{xr-xe+1}}{d}\right\}$$

$$=\ell_{xr}B_{xr}\cdot\alpha\cdot\ddot{a}_{xr}\left\{\frac{v\cdot(1-v^{xr-xe})}{1-v}+\frac{v^{xr-xe+1}}{d}\right\}$$

$$=\ell_{xr}B_{xr}\cdot\alpha\cdot\ddot{a}_{xr}\left(\frac{v}{d}-\frac{v^{xr-xe+1}}{d}+\frac{v^{xr-xe+1}}{d}\right)$$

$$=\frac{v}{d}\cdot\ell_{xr}B_{xr}\cdot\alpha\cdot\ddot{a}_{xr}$$

$$G^a+G^f=\sum_{y=x_e}^{x_r-1}\ell_y B_y\cdot\sum_{x=y}^{x_r-1}\frac{D_x b_x}{D_y b_y}+\frac{v}{d}\cdot\ell_{xe}b_{xe}\cdot\sum_{y=x_e}^{x_r-1}\frac{D_x b_x}{D_{xe}b_{xe}}$$

$$=\sum_{y=x_e}^{x_r-1}\ell_y B_y\cdot\sum_{x=y}^{x_r-1}\frac{\ell_x v^x b_x}{\ell_y v^y b_y}+\frac{v}{d}\cdot\ell_{xe}b_{xe}\cdot\sum_{y=x_e}^{x_r-1}\frac{\ell_x v^x b_x}{\ell_{xe}v^{xe}b_{xe}}$$

$$=\sum_{y=x_e}^{x_r-1}\sum_{x=y}^{x_r-1}\ell_x B_x\cdot v^{x-y}+\frac{v}{d}\cdot\sum_{x=xe}^{x_r-1}\ell_x B_x\cdot v^{x-xe}$$

$$=\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\sum_{y=x_e}^{x}\ell_x B_x\cdot v^{x-y}+\frac{v}{d}\cdot\sum_{x=xe}^{x_r-1}\ell_x B_x\cdot v^{x-xe}$$

$$=\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\ell_x B_x\cdot\frac{1-v^{x-xe+1}}{1-v}+\frac{1}{d}\cdot\sum_{x=xe}^{x_r-1}\ell_x B_x\cdot v^{x-xe+1}$$

$$=\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\ell_x B_x\left(\frac{1}{d}-\frac{v^{x-xe+1}}{d}+\frac{v^{x-xe+1}}{d}\right)$$

$$=\frac{1}{d}\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\ell_x B_x$$

$$P^{(OAN)} = (S^a + S^f) / (G^a + G^f)$$

$$= \left(\frac{v}{d} \cdot \ell_{xr} B_{xr} \cdot \alpha \cdot \ddot{a}_{xr}\right) / \left(\frac{1}{d} \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \ell_x B_x\right)$$

$$= \frac{v \cdot \ell_{xr} B_{xr} \cdot \alpha \cdot \ddot{a}_{xr}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} \ell_x B_x}$$

（別解）

この制度において、定常状態を仮定し、かつ制度設立以前の勤続期間を通算するため、各年度の定年退職者（ℓ_{xr}人）に対する給付現価は

$\ell_{xr} B_{xr} \cdot \alpha \cdot \ddot{a}_{xr}$ で一定

この給付現価が毎期末に発生するため、加入員および将来者の総給付現価は

$$S^a + S^f = (v + v^2 + \cdots) \ell_{xr} B_{xr} \cdot \alpha \cdot \ddot{a}_{xr}$$

$$= \left(\frac{v}{d}\right) \times \ell_{xr} B_{xr} \cdot \alpha \cdot \ddot{a}_{xr}$$

一方、毎期初の総給付は $\sum_{x=x_e}^{x_r-1} \ell_x B_x$ より、加入員および将来者の総給付現価は

$$G^a + G^f = (1 + v + v^2 + \cdots) \cdot \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \ell_x B_x$$

$$= \left(\frac{1}{d}\right) \cdot \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \ell_x B_x$$

よって $P^{(OAN)} = \dfrac{S^a + S^f}{G^a + G^f}$

$$= \frac{v \cdot \ell_{xr} B_{xr} \cdot \alpha \cdot \ddot{a}_{xr}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} \ell_x B_x}$$

5－ (2)

5－ (1) の別解を利用して

・給付現価 $(S^{a'}+S^{f'})$

1年度末のベースアップ $\frac{k}{100}$ により、1年度末の退職者および将来者を含めて、給与は一律 $1+\frac{k}{100}$ 倍されるため

$$S^{a'}+S^{f'}=(S^{a}+S^{f})\left(1+\frac{k}{100}\right)$$

$$=\left(1+\frac{k}{100}\right)\cdot\frac{v}{d}\cdot\ell_{xr}B_{xr}\cdot\alpha\cdot\ddot{a}_{xr}$$

・給与現価 $(G^{a'}+G^{f'})$

1年度始の総給与は $\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\ell_x B_x$

2年度以降の毎期初の総給与は $\left(1+\frac{k}{100}\right)\cdot\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\ell_x B_x$

$$G^{a'}+G^{f'}=\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\ell_x B_x+(v+v^2+\cdots)\cdot\left(1+\frac{k}{100}\right)\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\ell_x B_x$$

$$=\left\{1+\frac{v}{d}\cdot\left(1+\frac{k}{100}\right)\right\}\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\ell_x B_x$$

5－ (3)

5－ (1) の別解を利用して

1年度の定年退職者に対する給付現価は $\left(1+\frac{k}{100}\right)\cdot\ell_{xr}B_{xr}\cdot\alpha\cdot\ddot{a}_{xr}$

n 〃 〃 $\left(1+\frac{k}{100}\right)^{n}\cdot\ell_{xr}B_{xr}\cdot\alpha\cdot\ddot{a}_{xr}$

総給付現価は

$$S^{a'}+S^{f'}=\sum_{n=1}^{\infty}v^{n}\cdot\left(1+\frac{k}{100}\right)^{n}\cdot\ell_{xr}B_{xr}\cdot\alpha\cdot\ddot{a}_{xr}$$

$$=v\cdot\left(1+\frac{k}{100}\right)\cdot\frac{1}{1-v\left(1+\frac{k}{100}\right)}\cdot\ell_{xr}B_{xr}\cdot\alpha\cdot\ddot{a}_{xr}$$

$$=\frac{1+\frac{k}{100}}{i-\frac{k}{100}}\cdot\ell_{xr}\cdot B_{xr}\cdot\alpha\cdot\ddot{a}_{xr}$$

1年度始の総給与は $\sum_{x=x_e}^{x_r-1} \ell_x B_x$

n　　　〃　　　$(1+\frac{k}{100})^{n-1} \cdot \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \ell_x B_x$

総給与現価は

$$
\begin{aligned}
G^{a'}+G^{f'} &= \sum_{n=1}^{\infty} v^{n-1} \cdot (1+\frac{k}{100})^{n-1} \cdot \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \ell_x B_x \\
&= \frac{1}{1-v(1+\frac{k}{100})} \cdot \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \ell_x B_x \\
&= \frac{1+i}{i-\frac{k}{100}} \cdot \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \ell_x B_x
\end{aligned}
$$

$$
P^{'(OAN)} = \frac{\left(\dfrac{1+\frac{k}{100}}{i-\frac{k}{100}}\right) \cdot \ell_{xr} B_{xr} \cdot \alpha \cdot \ddot{a}_{xr}}{\left(\dfrac{1+i}{i-\frac{k}{100}}\right) \cdot \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \ell_x B_x}
$$

$$
= \frac{1-\frac{k}{100}}{1+i} \cdot \frac{\ell_{xr} B_{xr} \cdot \alpha \cdot \ddot{a}_{xr}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} \ell_x B_x}
$$