平成７年12月19日

数学１（問題）

１．次の各問の$\boxed{\quad\quad}$に入る答のみを、所定の解答用紙に記入せよ。　（３５点）

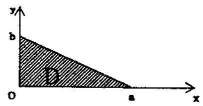
（1）表の出る確率がpの硬貨をn回続けて投げるとき、表の出る回数が偶数である確率をa_nとする。このとき$2a_n-1$を、nとpを用いて表わすと$\boxed{\quad\quad}$である。

（2）２つの数が区間$[0,\ 1]$の中で、ランダムに独立して選ばれた。小さい方の数がaより小さいと言う条件のもとで、大きい方の数がaより大きい確率は$\boxed{\quad\quad}$である。ただし、$0<a<1$とする。

（3）種類の異なるm組のイアリングがある。十分に混ぜたあと、その$2m$個の中からn個抜き出したとき、左右のイアリングがそろっている組数の期待値は$\boxed{\quad\quad}$である。

（4）１個のさいころを振りつづけ、最初に１の目が出たときの回数をα、２回目に１の目が出たときの回数をβとする。このとき、函数$f(x)=\alpha e^{-\beta|x|}$が$(-\infty,\ \infty)$上の確率密度函数となる確率は$\boxed{\quad\quad}$である。

（5）右図の直角三角形の領域D上で一様分布する２次元確率変数$(X,\ Y)$について、相関係数は$\boxed{\quad\quad}$である。



２．宝くじに０００００００から９９９９９９までの数が書かれている。これを１枚購入するとき以下の問に答えよ。　（２０点）

（1）購入したくじの各桁の数値を初めから、$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$とする。$X_1$の確率母函数を求めよ。

（2）$X_1+X_2+X_3$の確率母函数$g(s)$を求めよ。

（3）$g(s)$におけるs^rの係数は何を表しているか。

（4）$g(s)\,g(s^{-1})$を求めよ。

（5）最初の３桁の和が最後の３桁の和と等しくなる数の書かれた券の得られる確率を求めよ。

３．A，Bの２人がそれぞれn枚、$N-n$枚$(N>n)$のコインを持っている。この２人がゲームを行い、１回のゲーム毎に負けたほうが勝った方にコインを１枚渡すものとし、どちらかのコインが０になったとき、ゲームは終了するものとする。A，Bが１回のゲームで勝つ確率をそれぞれ$p,\ q$（$p,\ q$は定数で$p+q=1$）とするとき、Aのコインが０になる確率α_nを求めよ。　（２０点）

４．次の問に答えよ。　（２５点）

（1）$X_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$が独立で、いずれも同一の指数分布

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & (x>0),\ (\lambda>0)\\ 0 & (x\leqq 0)\end{cases}$$

に従うとき、$S=X_1+X_2+\cdots+X_n$の確率密度函数を求めよ。

（2）ある会社のある係に溜まっている未決裁書類の数Nは幾何分布

$$P\{N=k\}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^k\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

に従い、１通の書類を決裁するのに要する時間は、平均３０分の指数分布に従うものとする。このとき、書類が届いてから決裁に着手するまでの平均待ち時間を求めよ。

数学１　解答

１．

（１）この事象は$n-1$回目までに偶数回表が出た後n回目に裏が出るか、奇数回表が出たあとn回目に表が出た場合に起こるから、

$$a_n = (1-p)\,a_{n-1} + p\,(1-a_{n-1}) \qquad (n \geqq 0),\ a_0 = 1$$

$$a_n - \frac{1}{2} = (1-2p)\left(a_{n-1} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= (1-2p)^n \cdot \frac{1}{2}$$

$$2a_n - 1 = \boxed{(1-2p)^n}$$

（２）X，Yを区間〔０，１〕で一様分布する確率変数とする。

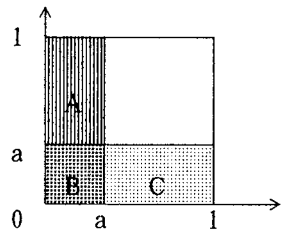
$$P\{\sup(x,\ y) > a \mid \inf(x,\ y) < a\}$$

$$= \frac{P\{(\sup(x,y) > a) \cap (\inf(x,y) < a)\}}{P\{\inf(x,\ y) < a\}}$$

$$= \frac{P\{\text{右図の} A \cup C\}}{P\{\text{右図の} A \cup B \cup C\}}$$

$$= \frac{2a(1-a)}{1-(1-a)^2} = \frac{2a(1-a)}{a(2-a)}$$

$$= \boxed{\frac{2(1-a)}{2-a}}$$



（３）
$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{抜き出した}n\text{個の中に}i\text{番目の組がある場合} \\ 0 & \text{上記以外} \end{cases}$$

とする。$(1 \leqq i \leqq m)$

$$E(X_i) = \frac{\dbinom{2m-2}{n-2}}{\dbinom{2m}{n}} = \frac{n(n-1)}{2m(2m-1)}$$

$$E(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{m \cdot n(n-1)}{2m(2m-1)} = \boxed{\frac{n(n-1)}{2(2m-1)}}$$

（４）まず、函数 $f(x)=\alpha e^{-\beta|x|}$ が $(-\infty,\ \infty)$ 上の確率密度函数となるための条件を求める。

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\alpha e^{-\beta|x|}\,dx=\int_{-\infty}^{0}\alpha e^{\beta x}dx+\int_{0}^{\infty}\alpha e^{-\beta x}\,dx$$

$$=\frac{\alpha}{\beta}\Big[\,e^{\beta x}\Big]_{-\infty}^{0}-\frac{\alpha}{\beta}\Big[\,e^{-\beta x}\Big]_{0}^{\infty}=\frac{2\alpha}{\beta}$$

よって、函数 $f(x)=\alpha e^{-\beta|x|}$ が $(-\infty,\ \infty)$ 上の確率密度函数となるための条件は、$\beta=2\alpha$ である。

従って、求める確率は、$\sum_{k=1}^{\infty} P_K$ ；ここに P_K は最初の $(k-1)$ 回は１以外の目 k 回目に１、次の $(k-1)$ 回は１以外の目、$2k$ 回目に１の目がでる確率であり、

$$P_K=\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}\times\left(\frac{25}{36}\right)^{k-1}$$

よって、求める確率は、

$$\sum_{k=1}^{\infty}P_K=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{36}\times\left(\frac{25}{36}\right)^{k-1}=\frac{1}{36}\times\frac{1}{1-\dfrac{25}{36}}=\boxed{\frac{1}{11}}$$

（５）X，Yの同時確率密度函数

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{2}{ab} & (x,\ y)\in D\\[2mm] 0 & (x,\ y)\notin D\end{cases}$$

$$E(X)=\iint_D x\,f(x,y)\,dxdy=\frac{2}{ab}\int_0^a xdx\int_0^{b(1-x/a)}dy$$

$$=\frac{2}{a}\int_0^a\left(x-\frac{x^2}{a}\right)dx=\frac{2}{a}\left(\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{3a}\right)=\frac{a}{3}$$

$$E(X^2)=\frac{2}{ab}\int_0^a x^2dx\int_0^{b(1-x/a)}dy=\frac{2}{a}\int_0^a\left(x^2-\frac{x^3}{a}\right)dx$$

$$=\frac{2}{a}\left(\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4a}\right)=\frac{a^2}{6}$$

$$V(X)=E(X)^2-E(X^2)=\frac{a^2}{18}$$

同様にして、$E(Y)=\dfrac{b}{3}$，$V(Y)=\dfrac{b^2}{18}$

$$E(XY)=\frac{2}{ab}\int_0^a xdx\int_0^{b(1-x/a)}ydy=\frac{b}{a}\int_0^a x\left(1-\frac{x}{a}\right)^2dx$$

$$=\frac{b}{a}\int_0^a\left(x-2\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{a^2}\right)dx$$

$$= \frac{b}{a}\left(\frac{a^2}{2} - \frac{2}{3}a^2 + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{ab}{12}$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{ab}{12} - \frac{ab}{9} = -\frac{ab}{36}$$

$$相関係数\ \rho = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{-\frac{ab}{36}}{\sqrt{\frac{a^2}{18}\frac{b^2}{18}}} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

2.

（1）各桁の数値を$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$とすると、$X_i$は独立であり、一様に分布している確率変数で、その確率分布は$k=0, 1, \cdots, 9$に対して
$P\{X_i = k\} = 0.1$である。したがって、X_iの確率母函数は

$$P_i(s) = 0.1(1 + s + \cdots + s^9) = \frac{1}{10}\frac{1-s^{10}}{1-s}\ である。$$

（2）独立な離散的確率変数の和の確率母函数は、おのおのの確率母函数の積となるから、$X_1 + X_2 + X_3$の確率母函数は$g(s) = \dfrac{1}{10^3}\dfrac{(1-s^{10})^3}{(1-s)^3}$

（3）$g(s)$におけるs^rの係数は初めの3桁の和がrである確率である。

（4）
$$g(s)g(s^{-1}) = \frac{1}{10^6}\frac{(1-s^{10})^3}{(1-s)^3}\frac{(1-s^{-10})^3}{(1-s^{-1})^3}$$
$$= \frac{1}{10^6}\frac{1}{s^{27}}\frac{(1-s^{10})^6}{(1-s)^6}$$

（5）$g(s)g(s^{-1})$におけるs^0の係数が求める確率となる。
ところで、

$$(1-s^{10})^6 = 1 - \binom{6}{1}s^{10} + \binom{6}{2}s^{20} + \cdots$$

$$(1-s)^{-6} = 1 + \binom{6}{5}s + \binom{7}{5}s^2 + \cdots$$

したがって、s^0の係数は

$$\frac{1}{10^6}\left(\binom{32}{5} - \binom{6}{1}\binom{22}{5} + \binom{6}{2}\binom{12}{5}\right) = \frac{55252}{1000000} = 0.055252$$
$$\left(= \frac{13813}{250000}\right)$$

3．Aがn枚のコインを持っている時にAのコインが0になる確率をα_nとすると、この事象ははじめのゲームにAが勝ってからAのコインが0になる確率と、Aが負けてからAのコインが0になる確率の和だから、

$$\alpha_n = p\alpha_{n+1} + q\alpha_{n-1} \quad (1 \leqq n \leqq a+b-1)$$

$$p(\alpha_{n+1} - \alpha_n) = q(\alpha_n - \alpha_{n-1})$$

$$\therefore (\alpha_{n+1} - \alpha_n) = \frac{q}{p}(\alpha_n - \alpha_{n-1}) = \left(\frac{q}{p}\right)^2(\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}) = \cdots$$

$$= \left(\frac{q}{p}\right)^n(\alpha_1 - \alpha_0)$$

従って、$\alpha_n = \alpha_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_{k+1} - \alpha_k)$

$$= \alpha_0 + (\alpha_1 - \alpha_0)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{q}{p}\right)^n$$

$\frac{q}{p} \neq 1$ つまり $p \neq \frac{1}{2}$ のとき、

$$\alpha_n = \alpha_0 + (\alpha_1 - \alpha_0)\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \frac{q}{p}}$$

ここで、$\alpha_0 = 1$、$\alpha_N = 0$ より、

$$\alpha_N = \alpha_0 + (\alpha_1 - \alpha_0)\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \frac{q}{p}}$$

$$(\alpha_1 - \alpha_0) = -\frac{1 - \frac{q}{p}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}$$

$$\alpha_n = 1 - \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} = \frac{q^n(p^{N-n} - q^{N-n})}{p^N - q^N}$$

$\frac{q}{p} \neq 1$ つまり $p \neq \frac{1}{2}$ のとき、

$\alpha_n = \alpha_0 + (\alpha_1 - \alpha_0)n$、$\alpha_0 = 1$、$\alpha_N = 0$ より、

$$0 = \alpha_N = \alpha_0 + (\alpha_1 - \alpha_0)N \qquad (\alpha_1 - \alpha_0) = -\frac{1}{N}$$

$$\therefore \alpha_n = 1 - \frac{n}{N} = \frac{N-n}{N}$$

4.

（1）$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ の確率密度関数を $f_n(x)$ とする。

X_1 の確率密度関数：$f_1(y) = \lambda e^{-\lambda y} \quad (y > 0)$

$X_1 + X_2$ の確率密度関数：
$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_1(y-x)\, dx$$
$$= \int_0^y \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda (y-x)}\, dx$$
$$= \lambda^2 \int_0^y e^{-\lambda y}\, dx = \lambda^2 y e^{-\lambda y} \quad (y > 0)$$

$X_1 + X_2 + X_3$ の確率密度関数：
$$f_3(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) f_1(y-x)\, dx$$
$$= \int_0^y \lambda^2 x e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda (y-x)}\, dx = \lambda^3 \int_0^y x e^{-\lambda y}\, dx$$
$$= \lambda^3 e^{-\lambda y} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^y = \frac{\lambda^3}{2} y^2 e^{-\lambda y} \quad (y > 0)$$

以上により、$X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ の確率密度関数を
$$f_n(y) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} y^{n-1} e^{-\lambda y} & (y > 0) \\ 0 & (y \leqq 0) \end{cases} \quad \cdots\cdots ①$$
と仮定する。

①が成立するとしたとき、$X_1 + X_2 + \cdots + X_{n+1}$ の確率密度関数を求めると
$$f_n(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) f_1(y-x)\, dx$$
$$= \int_0^y \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda (y-x)}\, dx$$
$$= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} \int_0^y x^{n-1} e^{-\lambda y}\, dx = \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda y} \frac{y^n}{n}$$
$$= \frac{\lambda^{n+1}}{n!} y^n e^{-\lambda y} \quad (y > 0)$$

これは①において n を $n+1$ に置き換えたものに等しい。

また。①は $n=1$ のときも成立する。よって、$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ の確率密度関数は、
$$f_n(s) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} s^{n-1} e^{-\lambda s} & (s > 0) \\ 0 & (s \leqq 0) \end{cases}$$

〔別解〕X_i の積率母函数 $m(t)$ を求める。

$$m(t)=E(e^{tx})=\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx=\int_{0}^{\infty} e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$=\lambda\int_{0}^{\infty} e^{(t-\lambda)x}dx=\frac{\lambda}{t-\lambda}\left[e^{(t-\lambda)x}\right]_{0}^{\infty}=\frac{\lambda}{\lambda-t}$$

$$=\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{-1}\qquad(t<\lambda)$$

X_1, X_2, …, X_n が独立であるから、$S=X_1+X_2+\cdots+X_n$ の積率母函数 $m_n(t)$ は

$$m_n(t)=\{m(t)\}^n=\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{-n}$$

一方、次の密度函数に従う分布（Γ－分布）

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^n}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{-\lambda x} & (x>0,\ \lambda>0)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

の積率母函数 $m'(t)$ は

$$m'(t)=E(e^{tx})=\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx$$

$$=\int_{0}^{\infty} e^{tx}\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{-\lambda x}\,dx=\int_{0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{(t-\lambda)}\,dx$$

ここで、$t<\lambda$ に対して $(\lambda-t)x=s>0$ と置換して

$$dx=\frac{1}{\lambda-t}ds$$

$$\therefore m'(t)=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{s}{\lambda-t}\right)^{n-1}e^{-s}\frac{1}{\lambda-t}ds$$

$$=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)(\lambda-t)^n}\int_{0}^{\infty}s^{n-1}e^{-s}ds$$

$$=\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^{n}=\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{-n}\qquad\because\int_{0}^{\infty}s^{n-1}e^{-s}ds=\Gamma(n)$$

よって、$S=X_1+X_2+\cdots+X_n$ の積率母函数がΓ－分布の積率母函数に等しいことにより、SはΓ－分布に従う。

したがって、$S=X_1+X_2+\cdots+X_n$ の確率密度函数は、

$$f_n(s)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}s^{n-1}e^{-\lambda s} & (s>0)\\ 0 & (s\leqq 0)\end{cases}$$

（２）書類１通の決裁時間の分布は平均１／２時間の指数分布だから、ｋ通の書類が全て決裁されるまでの時間の確率分布は（１）より、

$$g(x) = \frac{2^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-2x} \quad (x>0) \text{ に従う。}$$

また、決裁前にｋ通の書類がたまっている確率は $\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^k$ だから、

１通の書類が届いてから決裁に着手するまでの時間Ｘの確率分布は

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^k \frac{2^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-2x}$$

$$= \frac{3}{8} e^{-2x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3x/2)^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{3}{8} e^{-2x} e^{3x/2}$$

$$= \frac{3}{8} e^{-x/2} \quad (x>0) \qquad \left(\because \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = e^x\right)$$

よって、着手するまでの平均時間Ｅ（Ｘ）は、

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x\,h(x)\,dx = \frac{3}{8}\int_0^{+\infty} x\,e^{-x/2}\,dx = \frac{3}{8} \times 4$$

$$= \frac{3}{2} \text{（時間）}$$