保険数学2(問題)

1．次の（1）から（5）までについて、それぞれ五つの選択肢の中から正しい答を一つ選んで、所定の解答用紙にその記号〔(A）から（E）のうちいずれか一つ。〕を記入せよ。（40点）

（1）死亡解約脱退残存表における生存者数が$\ell_x = 100{,}000 - 1{,}000X$ $(0 \leqq X \leqq 100)$ で表され、かつ各年齢における死亡率q_xが解約率q_x^wの1.5倍であるとすると、40歳の絶対死亡率q_{40}^*は次のうちどれに最も近いか。

（A）0.00994　（B）0.00997　（C）0.01000　（D）0.01003　（E）0.01006

（2）x歳加入年払全期払込n年満期生存保険において、被保険者が満期まで生存すれば保険金1を支払い、死亡すればその保険年度末に既払込営業保険料に年i%の利息を付けて支払う場合の営業保険料は次のうちどれに最も近いか。

但し、iは予定利率とし、$A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = 0.312$、$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 12.300$、$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 12.600$、${}_np_x = 0.910$とする。また、予定新契約費は保険金の0.025倍、予定集金費は営業保険料の0.03倍、予定維持費は保険金の0.003倍とする。

（A）0.0333　（B）0.0334　（C）0.0335　（D）0.0336　（E）0.0337

（3）x歳加入年払全期払込n年満期養老保険（保険金額1、保険金年末払）において、チルメル割合αの全期チルメル式責任準備金${}_tV_{x:\overline{n}|}^{[z]}$が$t=1$でちょうど0となるとき、$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$の値は次のうちどれに最も近いか。

但し、$i = 0.04$、$q_x = 0.00173$、$\alpha = 0.025$とする。

（A）15.72　（B）15.74　（C）15.76　（D）15.78　（E）15.80

（4）40歳加入年払全期払込20年満期養老保険（保険金額100万円、保険金年末払、純保険料42,330円）において、予定死亡率を$\{q_x\}$から$\{q_x'\}$に変更したところ、変更前後の純保険料式責任準備金が毎年等しくなった。このとき変更後の純保険料は次のうちどれに最も近いか。

但し、$i = 0.03$、$q_{40} = 0.00167$、$q_{40}' = 0.00135$とする。

（A）42,035円　（B）42,032円　（C）42,029円　（D）42,026円　（E）42,023円

（5）就業不能者の死力が就業者の死力の2倍で、${}_tp_x^{aa} = e^{-0.007t}$、${}_tp_x^{i} = e^{-0.006t}$なる関係があるとき、

${}_tp_x^{ai} = \boxed{}\,({}_tp_x^{i} - {}_tp_x^{aa})$となる。$\boxed{}$に入るべき数値は次のうちどれか。

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4　（E）5

2．x歳加入n年満期養老保険（保険金額1、保険金年末払）において、予定利率の変化に対する一時払純保険料の変化$\frac{d}{di}A_{x:\overline{n}|}$は年金現価と累加年金現価を用いて、次式のように表せることを証明せよ。

$\frac{d}{di}A_{x:\overline{n}|} = -v\,\{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - d\,(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}\}$　（10点）

3．子供x歳、親y歳加入、保険期間n年、保険料全期払込、死亡保険金年末払で次の（ｉ）から（iv）の給付を行う親子連生保険を考える。

（ｉ）子供が死亡した場合には、死亡保険金として既払込保険料（払込免除の保険料を含む）を支払い、契約は消滅する。

（ii）子供が満期まで生存した場合には、満期保険金1を支払う。

（iii）親が死亡した場合には、死亡保険金1を支払い、その後の保険料の払込を免除し、

（iv）親が死亡した保険年度の翌年始から第n保険年度始まで、子供の生存を条件に年額0.1の年金を支払う。

この保険について次の問に答えよ。但し、予定死亡率は親子とも同一の死亡表によるものとし、付加保険料は考慮しないものとする。（25点）

（1）次の空欄に当てはまる適当な算式または数値を所定の解答用紙に記入せよ。

この保険の年払純保険料をPとすると

収入の現価は $\boxed{\quad ① \quad}$ となり

支出の現価は（ｉ）の部分が $\boxed{\quad ② \quad}$

（ii）の部分が $\boxed{\quad ③ \quad}$

（iii）の部分が $\boxed{\quad ④ \quad}$

（iv）の部分が $\boxed{\quad ⑤ \quad}$ となるので

収支相等の原則よりP $= \dfrac{\boxed{\quad ⑥ \quad}}{\boxed{\quad ⑦ \quad}}$

また、第t保険年度末の純保険料式責任準備金は、将来法により、

親子とも生存の場合

$${}_tV = P\ \{\boxed{\quad ⑧ \quad}\} + \boxed{\quad ⑨ \quad}$$

親死亡、子生存の場合

$${}_t\tilde{V} = P\ \{\boxed{\quad ⑩ \quad}\} + \boxed{\quad ⑪ \quad}$$

（2）(1) の結果を用い、次の式の空欄に適当な算式または数値を入れ、再帰式を完成させなさい。また、適当な算式または数値とともに計算過程も所定の解答用紙に明記しなさい。計算過程の記入のない答案は採点されないので注意すること。

$${}_tV + P = \boxed{\quad ⑫ \quad} \cdot P + \boxed{\quad ⑬ \quad} \cdot {}_{t+1}V + v p_{x+t} q_{y+t} \cdot \boxed{\quad ⑭ \quad}$$

4．死亡表がゴムパーツの法則に従うとき、すなわち $\mu_x = BC^x$（B、Cは定数）のとき、次の式の空欄に C^x、C^y、C^z を用いた算式を入れ、等式を完成させなさい。また、適当な算式とともに計算過程も所定の解答用紙に明記しなさい。計算過程の記入のない答案は採点されないので注意すること。

$$\bar{A}^{\ \ 3}_{\underset{21}{xyz}:\overline{n|}} = \boxed{\quad ① \quad}\ \bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}} + \boxed{\quad ② \quad}\ \bar{A}^{1}_{xy:\overline{n|}} + \boxed{\quad ③ \quad}\ \bar{A}^{1}_{xyz:\overline{n|}}$$

（25点）

以上

保 険 数 学 2（解答例）

1．

設 問 番 号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
解 答 欄	(D)	(E)	(B)	(B)	(D)

正解は上表のとおりであるが、以下に各設問の解答方法を略記する。

(1) …… (D)

$q_x = \frac{3}{2} q_x^w$ より　　$w_x = \frac{2}{3} d_x$

$\ell_{x+1} = \ell_x - d_x - w_x = \ell_x - \frac{5}{3} d_x$

$\frac{5}{3} d_x = \ell_x - \ell_{x+1} = 100{,}000 - 1{,}000x - \{100{,}000 - 1{,}000(x+1)\} = 1{,}000$

$\therefore d_x = 600$、$w_x = 400$

また、$q_x^* = \dfrac{d_x}{\ell_x - \frac{1}{2} w_x} = \dfrac{600}{100{,}000 - 1{,}000x - 200} = \dfrac{3}{499 - 5x}$

$\therefore q_{40}^* \fallingdotseq 0.01003$

(2) …… (E)

営業保険料をPとすると、収支相等の原則より

$$P\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = P\sum_{t=1}^{n} \ddot{S}_{\overline{t}|} v^t {}_{t-1|}q_x + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} + \alpha + \beta P\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \gamma \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

また、$\ddot{S}_{\overline{t}|} v^t = \ddot{a}_{\overline{t}|}$ より $\sum_{t=1}^{n} \ddot{S}_{\overline{t}|} v^t {}_{t-1|}q_x = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{\overline{n}|}\,{}_n p_x$

$$\therefore P = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} + \alpha + \gamma \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}\,{}_n p_x - \beta \ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \fallingdotseq 0.03369$$

(3) …… (B)

$${}_1V_{x:\overline{n}|}^{(z)} = A_{x+1:\overline{n-1}|} - \left(P_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\right) \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|} = 0 \text{ より}$$

$$P_{x+1:\overline{n-1}|} - P_{x:\overline{n}|} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

ここで、$P_{x+1:\overline{n-1}|} = \dfrac{1}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}} - d$、$P_{x:\overline{n}|} = \dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - d$ より

$$P_{x+1:\overline{n-1}|} - P_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}} - \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = (1+\alpha)\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}$$

また、$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + vp_x \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}$ より $\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|} = \dfrac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1}{vp_x}$

$$\therefore \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1+\alpha}{1+\alpha - vp_x} = \frac{1+\alpha}{1+\alpha - \left(\frac{1}{1+i}\right)\left(1-q_x\right)} \fallingdotseq 15.739$$

(4) …… (B)

$$({}_tV + P)(1+i) = q_{x+t}(1 - {}_{t+1}V) + {}_{t+1}V$$

$$({}_tV' + P')(1+i) = q'_{x+t}(1 - {}_{t+1}V') + {}_{t+1}V'$$

および ${}_tV' = {}_tV$ より $(P'-P)(1+i) = (q'_{x+t} - q_{x+t})(1 - {}_{t+1}V)$

$x = 40$、$t = 0$ とおくと $(P'-P)(1+i) = (q'_{40} - q_{40})(1 - {}_1V)$

また、$({}_0V + P)(1+i) = q_{40}(1 - {}_1V) + {}_1V$ より ${}_1V = \dfrac{P(1+i) - q_{40}}{1 - q_{40}}$

$$\therefore (P'-P)(1+i) = (q'_{40} - q_{40})\left\{1 - \frac{P(1+i) - q_{40}}{1 - q_{40}}\right\}$$

$$\therefore P' = (q'_{40} - q_{40})\left(\frac{\frac{1}{1+i} - P}{1 - q_{40}}\right) + P \fallingdotseq 0.042032$$

(5) …… (D)

就業者の死力を$\mu_1(x)$、就業不能の瞬間発生率を$\mu_2(x)$、就業不能者の死力を$\mu_3(x)$とすると

$$\mu_1(x+t) + \mu_2(x+t) = -\frac{d}{dt}\log {}_tp_x^{aa} = -\frac{d}{dt}\log e^{-0.007t} = 0.007$$

$$\mu_3(x+t) = -\frac{d}{dt}\log {}_tp_x^{i} = -\frac{d}{dt}\log e^{-0.006t} = 0.006$$

また、$\mu_3(x+t) = 2\mu_1(x+t)$ より $\mu_1(x+t) = 0.003$、$\mu_2(x+t) = 0.004$

$${}_tP_x^{ai} = \int_0^t {}_sp_x^{aa}\mu_2(x+t)\,{}_{t-s}p_{x+s}^{i}ds = 0.004\int_0^t e^{-0.007s}e^{-0.006(t-s)}ds$$

$= 0.004\,e^{-0.006t}\int_0^t e^{-0.001s}\,ds = 4e^{-0.006t}(1-e^{-0.001t})$

$= 4(e^{-0.006t}-e^{-0.007t}) = 4({}_tp_x^{i} - {}_tp_x^{aa})$

2．$A_{x:\overline{n}|} = 1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 - d(1 + vp_x + v^2\,{}_2p_x + \cdots\cdots + v^{n-1}\,{}_{n-1}p_x)$

ここで、$\dfrac{d}{di}v = \dfrac{d}{di}\left(\dfrac{1}{1+i}\right) = -\dfrac{1}{(1+i)^2} = -v^2$

$\dfrac{d}{di}v^2 = -2v^3$、……、$\dfrac{d}{di}v^{n-1} = -(n-1)v^n$

$\dfrac{d}{di}d = \dfrac{d}{di}(1-v) = v^2$ より

$\dfrac{d}{di}A_{x:\overline{n}|} = -v^2(1 + vp_x + v^2\,{}_2p_x + \cdots\cdots + v^{n-1}\,{}_{n-1}p_x)$

$+ d\{v^2p_x + 2v^3\,{}_2p_x + \cdots\cdots + (n-1)v^n\,{}_{n-1}p_x\}$

$= -v^2\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + dv\{1 + 2vp_x + 3v^2\,{}_2p_x + \cdots\cdots + nv^{n-1}\,{}_{n-1}p_x$

$-(1 + vp_x + v^2\,{}_2p_x + \cdots\cdots + v^{n-1}\,{}_{n-1}p_x)\}$

$= -v^2\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + dv\{(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}\}$

$= -v\{(v+d)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - d(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}\}$

$= -v\{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - d(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}\}$

3．(1)

設問番号	解　　答　　欄
①	$P\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}$
②	$P(IA)^{1}_{x:\overline{n}|}$
③	$A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$ または ${}_nE_x$
④	$A^{1}_{xy:\overline{n}|}$
⑤	$0.1(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{xy:\overline{n}|})$ または $0.1\,a_{y\mid x:\overline{n-1}|}$
⑥	$A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} + A^{1}_{xy:\overline{n}|} + 0.1(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{xy:\overline{n}|})$
⑦	$\ddot{a}_{xy:\overline{n}|} - (IA)^{1}_{x:\overline{n}|}$
⑧	$tA^{1}_{x+t:\overline{n-t}|} + (IA)^{1}_{x+t:\overline{n-t}|} - \ddot{a}_{x+t,\,y+t:\overline{n-t}|}$
⑨	$A_{x+t:\overset{1}{\overline{n-t}|}} + A^{1}_{x+t,\,y+t:\overline{n-t}|} + 0.1(\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - \ddot{a}_{x+t,\,y+t:\overline{n-t}|})$
⑩	$tA^{1}_{x+t:\overline{n-t}|} + (IA)^{1}_{x+t:\overline{n-t}|}$
⑪	$A_{x+t:\overset{1}{\overline{n-t}|}} + 0.1\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$

(2) $P+{}_tV = P\{1+tA^{\ 1}_{x+t:\overline{n-t}|}+(IA)^{\ 1}_{x+t:\overline{n-t}|}-\ddot{a}_{x+t,\ y+t:\overline{n-t}|}\}$

$+A_{x+t:\overline{n-t}|}^{\ \ \ \ \ 1}+A_{x+t,\ y+t:\overline{n-t}|}^{\ \ \ \ 1}+0.1(\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}-\ddot{a}_{x+t,\ y+t:\overline{n-t}|})$

$=P[1+tvq_{x+t}+tv(p_{x+t}p_{y+t}+p_{x+t}q_{y+t})A^{\ 1}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}$

$+vq_{x+t}+v(p_{x+t}p_{y+t}+p_{x+t}q_{y+t})\{(IA)^{\ 1}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}+A^{\ 1}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}\}$

$-1-vp_{x+t}p_{y+t}\ddot{a}_{x+t+1,\ y+t+1:\overline{n-t-1}|}]$

$+v(p_{x+t}p_{y+t}+p_{x+t}q_{y+t})A_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}^{\ \ \ \ \ \ \ \ 1}$

$+vp_{x+t}q_{y+t}+vp_{x+t}p_{y+t}A_{x+t+1,\ y+t+1:\overline{n-t-1}|}^{\ \ \ \ \ \ \ \ 1}$

$+0.1\{1+v(p_{x+t}p_{y+t}+p_{x+t}q_{y+t})\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}$

$-1-vp_{x+t}p_{y+t}\ddot{a}_{x+t+1,\ y+t+1:\overline{n-t-1}|}\}$

$=Pvq_{x+t}(t+1)+vp_{x+t}p_{y+t}[P\{(t+1)A^{\ 1}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}+(IA)^{\ 1}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}$

$-\ddot{a}_{x+t+1,\ y+t+1:\overline{n-t-1}|}\}+A_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}^{\ \ \ \ \ \ \ \ 1}+A_{x+t+1,\ y+t+1:\overline{n-t-1}|}^{\ \ \ \ \ \ \ \ 1}$

$+0.1(\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}-\ddot{a}_{x+t+1,\ y+t+1:\overline{n-t-1}|})]$

$+vp_{x+t}q_{y+t}[P\{(t+1)A^{\ 1}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}+(IA)^{\ 1}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}\}$

$+A_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}^{\ \ \ \ \ \ \ \ 1}+1+0.1\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}]$

$=vq_{x+t}(t+1)P+vp_{x+t,\ y+t}\cdot{}_{t+1}V+vp_{x+t}q_{y+t}({}_{t+1}\tilde{V}+1)$

従って、

⑫	$vq_{x+t}(t+1)$
⑬	$vp_{x+t,\ y+t}$
⑭	$({}_{t+1}\tilde{V}+1)$

4. $\bar{A}^{\ \ 3}_{\underset{21}{xyz}:\overline{n}|}=\int_0^n v^s{}_sq^2_{yz}\cdot{}_sp_x\mu_{x+s}ds$ ……………… (1)

ここで、${}_sq^2_{yz}={}_sq^1_{yz}-{}_sp_y\cdot{}_sq_z=\int_0^s{}_tp_{yz}\mu_{z+t}dt-{}_sp_y(1-{}_sp_z)$

$$=\int_0^s{}_tp_{yz}(\mu_{y+t}+\mu_{z+t})\frac{\mu_{z+t}}{\mu_{y+t}+\mu_{z+t}}dt-{}_sp_y+{}_sp_{yz}$$

$$=\int_0^s{}_tp_{yz}(\mu_{y+t}+\mu_{z+t})\frac{BC^{z+t}}{BC^{y+t}+BC^{z+t}}dt-{}_sp_y+{}_sp_{yz}$$

$$=\frac{C^z}{C^y+C^z}\int_0^s{}_tp_{yz}\mu_{y+t,\ z+t}dt-{}_sp_y+{}_sp_{yz}$$

$$=\frac{C^z}{C^y+C^z}{}_sq_{yz}-{}_sp_y+{}_sp_{yz}=\frac{C^z}{C^y+C^z}(1-{}_sp_{yz})-{}_sp_y+{}_sp_{yz}$$

$$=\frac{C^z}{C^y+C^z}-{}_sp_y+\frac{C^y}{C^y+C^z}{}_sp_{yz}$$

従って、(1) 式は

$$
\begin{aligned}
\bar{A}^{\;3}_{\underset{21}{xyz}:\overline{n|}} &= \int_0^n v^s \left(\frac{C^z}{C^y+C^z} - {}_sp_y + \frac{C^y}{C^y+C^z}\,{}_sp_{yz} \right) {}_sp_x \mu_{x+s} ds \\
&= \frac{C^z}{C^y+C^z} \int_0^n v^s\,{}_sp_x \mu_{x+s} ds - \int_0^n v^s\,{}_sp_{xy} \mu_{x+s} ds + \frac{C^y}{C^y+C^z} \int_0^n v^s\,{}_sp_{xyz} \mu_{x+s} ds \\
&= \frac{C^z}{C^y+C^z} \bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}} - \int_0^n v^s\,{}_sp_{xy} \mu_{x+s,\,y+s} \frac{\mu_{x+s}}{\mu_{x+s}+\mu_{y+s}} ds \\
&\quad + \frac{C^y}{C^y+C^z} \int_0^n v^s\,{}_sp_{xyz} \mu_{x+s,\,y+s,\,z+s} \frac{\mu_{x+s}}{\mu_{x+s}+\mu_{y+s}+\mu_{z+s}} ds \\
&= \frac{C^z}{C^y+C^z} \bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}} - \int_0^n v^s\,{}_sp_{xy} \mu_{x+s,\,y+s} \frac{BC^{x+s}}{BC^{x+s}+BC^{y+s}} ds \\
&\quad + \frac{C^y}{C^y+C^z} \int_0^n v^s\,{}_sp_{xyz} \mu_{x+s,\,y+s,\,z+s} \frac{BC^{x+s}}{BC^{x+s}+BC^{y+s}+BC^{z+s}} ds \\
&= \frac{C^z}{C^y+C^z} \bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}} - \frac{C^x}{C^x+C^y} \bar{A}^{\;1}_{\overline{xy}:\overline{n|}} + \frac{C^x}{C^x+C^y+C^z} \cdot \frac{C^y}{C^y+C^z} \bar{A}^{\;1}_{\overline{xyz}:\overline{n|}}
\end{aligned}
$$

従って、

①	$\frac{C^z}{C^y+C^z}$
②	$\left(- \frac{C^x}{C^x+C^y} \right)$
③	$\frac{C^x}{C^x+C^y+C^z} \cdot \frac{C^y}{C^y+C^z}$

以上