数　学　２　（問題）

（解答に当り、必要であれば末尾の数表を用いよ。）

１．次の各問の $\boxed{}$ に入る答のみを、所定の解答用紙に記入せよ。（３５点）

（１）確率分布が $f(x;p)=p(1-p)^x$　（$x=0,1,2,\cdots$，$0<p<1$）で与えられている母集団からの大きさｎの標本を（$x_1,\cdots,x_n$）とするとき、この標本より求めた p の最尤推定値は $\boxed{}$ である。

（２）平均 μ，分散 σ^2 を持つ母集団から、２Ｎ－１個の標本変量 X_1，X_2，・・・，X_{2N-1} をとったとき、

$$cov\left(\sum_{i=1}^{N}X_i\ ,\ \sum_{j=N}^{2N-1}X_j\right)=\boxed{}\quad\text{である。}$$

（３）箱の中に２４個の玉が入っている。H_0：黄色２０個，緑４個、H_1：黄色４個，緑２０個のどちらかである。復元抽出法で３個玉を取り出し、第１種の誤りの確率１０％以下で H_0 を検定する。次の３つの棄却域を定める方法のうち、
最良と思われる方法の第２種の誤りの確率は $\boxed{}$ である。
方法１：少なくとも１個が緑，　方法２：２個以上が緑，　方法３：３個とも緑。

（４）「１」という札が１枚，「２」という札が２枚，・・・，「Ｎ」という札がＮ枚の有限母集団から、Ｎ個の標本を取るとき札の値の標本平均の分散は $\boxed{}$ である。

（５）母集団の確率密度関数が、一様分布

$$f(x;\alpha)=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha} & \left(\beta-\dfrac{1}{2}\alpha\leqq x\leqq\beta+\dfrac{1}{2}\alpha,\quad \alpha>0,\quad \alpha,\ \beta\text{は未知}\right)\\ 0 & (\text{その他の領域})\end{cases}$$

にしたがうとき、ｎ個の標本変量（$X_1,\cdots,X_n$）によって母数 α を推定する。
α の最尤推定量を $\hat{\alpha}=\hat{\alpha}(X_1,\cdots,X_n)$ とすれば、これは α の不偏な推定量ではないが、
$\boxed{}\times\hat{\alpha}$ は α の不偏推定量である。

２．　X_1，X_2，・・・，X_n は互いに独立でいずれも母平均 θ の不偏推定量とする。

（１）$Y=\sum_{i=1}^{n}a_iX_i$ が θ の不偏推定量であるために必要な a_1，・・・，a_n の条件を求めよ。

（２）各 X_i の分散が母分散 σ^2 であるとする。$Y=\sum_{i=1}^{n}a_iX_i$ が θ の不偏推定量であるとき、Ｖ（Ｙ）を最小とする（a_1，・・・，a_n）およびＶ（Ｙ）の最小値を求めよ。（２０点）

３．　生まれたばかりの実験動物１５匹中、８匹には飼料Ａを与え、残りの７匹には飼料Ｂを与えて生育した。一定期間を経た後に体重を計ったら、前者は

４６．０，４６．２，４７．１，４５．０，４８．７，４７．６，４６．８，４８．６

であり、後者は

４８．６，４９．０，４７．５，５１．０，５０．３，４９．０，４９．７

であった。飼料の違いによる影響があると言って良いか否かを有意水準０．０１で検定せよ。
（標本は正規母集団からのものと考えてよい。）（２５点）

４．　$X_1, X_2, \cdots, X_n$をある母集団からの標本変量とする。その母集団の母平均をμ，母分散をσ^2とし、各X_iを正規化した$X_i^* = \dfrac{X_i - \mu}{\sigma}$の積率母関数を$\phi(t)$とおく。

また、標本変量平均$\overline{X} = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$を正規化して$Y_n = \dfrac{\sqrt{n}\,(\overline{X} - \mu)}{\sigma}$とおく。

（１）Y_nの積率母関数を$\phi_n(t)$とするとき、$\phi_n(t)$を$\phi(t)$で表わせ。

（２）$n \to \infty$のとき、$\phi_n(t)$の極限を求めよ。

（３）相当多数の者が受験したある数学の試験の平均点がm，標準偏差がsであった場合を例として（２）の結果を言葉で説明せよ。

（２０点）

（解答に当り、必要であれば以下の数表を用いよ。）

数表

（１）ＸがＦ分布にしたがうとき、Ｐ（$X \geqq \lambda$）＝０．０５となるλを求める表

f_1は分母の自由度、f_2は分子の自由度　　　$\lambda = F_{f_1}^{f_2}(0.05)$とも書く。

f_1 \ f_2	5	6	7	8	9
5	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
6	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
7	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
8	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
9	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18

（２）Ｘがt分布にしたがうとき、Ｐ（$X \geqq \lambda$）＝εとなるλを求める表

ｎは自由度　　　$\lambda = t_n(\varepsilon)$とも書く。

n \ ε	0.01	0.005
5	3.365	4.032
6	3.143	3.707
7	2.998	3.499
8	2.896	3.355
9	2.821	3.250
10	2.764	3.169
11	2.718	3.106
12	2.681	3.055
13	2.650	3.012
14	2.624	2.977
15	2.602	2.947

数学２ 解答例

1．（1） 尤度関数L(p)は次式で表わされる。

$$L(p)=p^n(1-p)^{x_1}(1-p)^{x_2}\cdot\cdots\cdot(1-p)^{x_n}$$

両辺の対数を取って

$$\log L(p)=n\log p+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\log(1-p)$$

$\log L(p)$の極値を求める。

$$\frac{d\log L(p)}{dp}=\frac{n}{p}-\frac{1}{1-p}\sum_{i=1}^{n}x_i=0 \quad より \quad p=\boxed{\frac{n}{n+\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{1}{1+\bar{x}}} \text{———①}$$

$$\frac{d^2\log L(p)}{dp^2}=-\frac{n}{p^2}-\frac{1}{(1-p)^2}\sum_{i=1}^{n}x_i<0 \quad (\because \sum_{i=1}^{n}x_i>0)$$

従って①のpは最大値を与える。

（2） $E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=E\left(\sum_{j=N}^{2N-1}X_j\right)=N\mu$

$$E\left\{\left(\sum_{i=1}^{N}X_i\right)\left(\sum_{j=N}^{2N-1}X_j\right)\right\}=E\left\{\left(X_1+\cdots+X_N\right)\left(X_N+X_{N+1}+\cdots+X_{2N-1}\right)\right\}$$

$$=E\left\{X_N{}^2+\sum_{i=1}^{N-1}E(X_NX_i)\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=N+1}^{2N-1}E(X_iX_j)\right\}=E(X_n^2)+\sum_{i=1}^{N-1}E(X_N)E(X_i)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=N+1}^{2N-1}E(X_i)E(X_j)$$

$$=\sigma^2+\mu^2+(N-1)\mu^2+N(N-1)\mu^2=\sigma^2+N^2\mu^2$$

$$\mathrm{cov}\left(\sum_{i=1}^{N}X_i,\sum_{j=N}^{2N-1}X_j\right)=E\left\{\left(\sum_{i=1}^{N}X_i\right)\left(\sum_{j=N}^{2N-1}X_j\right)\right\}-E\left(\sum_{i=1}^{N}X_i\right)E\left(\sum_{j=N}^{2N-1}X_j\right)$$

$$=\sigma^2+N^2\mu^2-(N\mu)(N\mu)=\boxed{\sigma^2}$$

（3） 第一種の誤りの確率をα，第２種の誤りの確率をβとする。

方法１
$$\begin{cases}\alpha=P\{少なく共1個緑\mid H_0\}=1-P\{3個共黄色\mid H_0\}=1-\left(\frac{20}{24}\right)^3=0.421\\ \beta=P\{3個共黄色\mid H_1\}=\left(\frac{4}{24}\right)^3\fallingdotseq 0.005\end{cases}$$

方法２
$$\begin{cases}\alpha=P\{緑が2個以上\mid H_0\}={}_3C_2\left(\frac{4}{24}\right)^2\left(\frac{20}{24}\right)+{}_3C_3\left(\frac{4}{24}\right)^3=3\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{2}{27}\\ \beta=P\{緑が1個以下\mid H_1\}={}_3C_1\left(\frac{20}{24}\right)\cdot\left(\frac{4}{24}\right)^2+{}_3C_3\left(\frac{4}{24}\right)^3=\frac{2}{27}\fallingdotseq 0.074\end{cases}$$

方法３
$$\begin{cases}\alpha=P\{3個共緑\mid H_0\}=\left(\frac{4}{24}\right)^3\fallingdotseq 0.005\\ \beta=P\{少なく共1個黄色\mid H_1\}=1-\{3個共緑\mid H_1\}=1-\left(\frac{20}{24}\right)^3\fallingdotseq 0.421\end{cases}$$

αが10％以下は方法2と方法3，そのうちβの小さいのは方法2なので3つのうち最良なのは方法2である。

求める答は$\beta = \boxed{\frac{2}{27}}$（0.074等小数3位まで正しければ正解とした。）

(4) 母平均は $\dfrac{1+2\times 2(\text{個})+\cdots+\mathrm{N}\times\mathrm{N}(\text{個})}{1+2+\cdots+\mathrm{N}} = \dfrac{2\cdot\mathrm{N}(\mathrm{N}+1)(2\mathrm{N}+1)}{\mathrm{N}(\mathrm{N}+1)\cdot 6} = \dfrac{2\mathrm{N}+1}{3}$

母分散σ^2は$\dfrac{1^2+2^2\times 2(\text{個})+\cdots+\mathrm{N}^2\times\mathrm{N}(\text{個})}{\mathrm{N}(\mathrm{N}+1)/2} - \left(\dfrac{2\mathrm{N}+1}{3}\right)^2$

$$= \frac{\{\mathrm{N}(\mathrm{N}+1)/2\}^2}{\mathrm{N}(\mathrm{N}+1)/2} - \left(\frac{2\mathrm{N}+1}{3}\right)^2 = \frac{\mathrm{N}^2+\mathrm{N}}{2} - \frac{4\mathrm{N}^2+4\mathrm{N}+1}{9} = \frac{\mathrm{N}^2+\mathrm{N}-2}{18}$$

標本平均の分散 $\sigma_{\bar{x}}^2 = \dfrac{\sigma^2}{\mathrm{N}}\left(\dfrac{\dfrac{\mathrm{N}(\mathrm{N}+1)}{2}-\mathrm{N}}{\dfrac{\mathrm{N}(\mathrm{N}+1)}{2}-1}\right) = \dfrac{\mathrm{N}^2+\mathrm{N}-2}{18\mathrm{N}}\cdot\dfrac{\mathrm{N}^2+\mathrm{N}-2\mathrm{N}}{\mathrm{N}^2+\mathrm{N}-2} = \boxed{\dfrac{\mathrm{N}-1}{18}}$

(5) $a \geqq \max(x_1,\cdots,x_n)-\min(x_1,\cdots,x_n)$である。

尤度関数$\ell(a)=\left(\dfrac{1}{a}\right)^n \leqq \left(\dfrac{1}{\max(x_1,\cdots,x_n)-\min(x_1,\cdots,x_n)}\right)^n$となるから

$\hat{a} = \max(x_1,\cdots,x_n)-\min(x_1,\cdots,x_n)$

$\mathrm{E}(\hat{a}) = \mathrm{E}\{\max(x_1,\cdots,x_n)\} - \mathrm{E}\{\min(x_1,\cdots,x_n)\}$

ここで，X_iが$1/a$の一様分布のとき$\max(x_1,\cdots,x_n)$の密度関係は$n\left(\dfrac{x}{a}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{a}$

又$\min(x_1,\cdots,x_n)$の密度関数は$n\left(1-\dfrac{x}{a}\right)^{n-1}\dfrac{1}{a}$

$$\therefore\ \mathrm{E}(\hat{a}) = \int_0^a xn\frac{x^{n-1}}{a^n}dx - \int_0^a xn\frac{(a-x)^{n-1}}{a^n}dx = \left[\frac{n}{a^n}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^a - \left\{\left[\frac{-n}{a^n}\cdot\frac{x(a-x)^n}{n}\right]_0^a\right.$$

$$\left.+\int_0^a\frac{(a-x)^n}{a^n}dx\right\} = \frac{n}{n+1}a - \left[\frac{-n}{a^n}\cdot\frac{(a-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^a = \frac{n-1}{n+1}a$$

従って$\boxed{\dfrac{n-1}{n+1}}\times\hat{a}$は$a$の不偏推定量となる。

2.

(1) $\mathrm{E}(\mathrm{Y})=\theta$となる　$a_1,\cdots,a_n$の条件を求めればよい

$\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = a_1E(\mathrm{X}_1)+\cdots+a_n\mathrm{E}(\mathrm{X}_n) = a_1\theta+\cdots+a_n\theta\ (\because \mathrm{E}(\mathrm{X}_i)=\theta)$

$=(a_1+\cdots+a_n)\theta$

従って，求める条件は$a_1+\cdots+a_n=1$ ——①

(2)　$V(Y)=a_1^2V(X_1)+\cdots+a_n^2V(X_n)$　（∵　各X_iは互いに独立）

$=a_1^2\sigma^2+\cdots+a_n\sigma^2$　（∵　$V(X_i)=\sigma^2$）

$=(a_1^2+\cdots+a_n^2)\sigma^2$ ——②

Yがθの不偏推定量であるとき V(Y)の最小値を求めるには

①の条件の下で②を最小にすればよい。

ところで

$$\sum_{i=1}^{n}a_i{}^2=\sum_{i=1}^{n}\left(a_i-\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\quad(\because\ a_1+\cdots+a_n=1)\text{——③}$$

③式より $a_1=\cdots=a_n=\dfrac{1}{n}$ のとき，②は最小分散 $\dfrac{\sigma^2}{n}$ を持つ。

[別解1]　$V(Y)=a_1^2\sigma^2+\cdots+a_n^2\sigma^2$ ——④

①の条件で下で，④を最小にする。ラグランジェ乗数法で

$g(a_1,\cdots,a_n\lambda)\equiv a_1^2\sigma^2+\cdots+a_n^2\sigma^2+\lambda(1-a_1-\cdots-a_n)$

gを各変数で偏微分してgの極値を求める。

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial g}{\partial a_1}=2a_1\sigma^2-\lambda=0\\ \vdots\\ \dfrac{\partial g}{\partial a_n}=2a_n\sigma^2-\lambda=0\\ \dfrac{\partial g}{\partial\lambda}=1-a_1-\cdots-a_n=0\text{ を解くと}\end{array}\right.\qquad ⑤\left\{\begin{array}{l}\lambda=\dfrac{2}{n/\sigma^2}\\ a_1=\dfrac{\lambda}{2\sigma^2}=\dfrac{1}{n}\\ \vdots\\ a_n=\dfrac{\lambda}{2\sigma^2}=\dfrac{1}{n}\end{array}\right.$$

ところで④式は下に凸であるから⑤の $a_1,\cdots,a_n$ は④の最小値を与える。

⑤を④に代入して最小値は $V(Y)=\dfrac{\sigma^2}{n}$

[別解2]　コーシー・シュバルツの不等式を使う場合

$a_1+\cdots+a_n=1$ で $a_1^2+\cdots+a_n^2$ の最小を求めるには

各$a_i\geqq0$を仮定して考えてよい。

$\because$ $\exists i$で$a_i < 0$とすると，$a_i' = 0$としてみると$a_j > |a_i|$となるjがある筈だから
a_jの代りに$a_j' = a_j + a_i$を用い，a_iの代りにa_i'を用いても
①の関係式は満たされる。
このとき
$|a_j'| < |a_j|$, $0 = |a_i'| < |a_i|$ だから $(a_j')^2 + (a_i')^2 < (a_j)^2 + (a_i)^2$
従ってa_iのうち負のものがあったらそれは②の最小値を与えない。

$a_i \geqq 0$を仮定するとコーシー・シュバルツの不等式から

$$1 = \left(\sum_{i=1}^{n} 1 \cdot a_i\right)^2 \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i{}^2\right) = n \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i{}^2$$

が成り立ち，等号の成立するのは$a_1 = \cdots = a_n$——⑥

のときである。

①，⑥より求めた解$a_1 = \cdots = a_n = \dfrac{1}{n}$を②に代入すると最小の分散$\dfrac{\sigma^2}{n}$を得る。

3. 飼料Aの方の標本の平均を$\bar{x}_a$，標本分散をS_a^2，標本の数をn_a標本変量平均を$\overline{X_a}$とし
飼料Bについて同様に$\bar{x}_b$ S_b^2，n_b，$\overline{X}_b$とすると

$\bar{x}_a = 47.0$, $\bar{S}_a^2 = 1.4375$, $n_a = 8$, $\bar{x}_b = 49.3$, $\bar{S}_b^2 = 1.1371$, $n_b = 7$

飼料Aで育成した動物の体重の母集団は$N(\mu_a, \sigma_a^2)$に従い，飼料Bの母集団は$N(\mu_b, \sigma_b^2)$に従う（題意より）と考えて良いが，まず　$H_0 : \sigma_a^2 = \sigma_b^2$が成り立つか否かを調べる。

飼料Aの不偏分散は$\dfrac{n_a S_a^2}{n_a - 1} = \dfrac{8 \times 1.4375}{7} \fallingdotseq 1.643$，飼料Bの不偏分散$\dfrac{7 \times 1.1371}{6} \fallingdotseq 1.327$

従って不偏分散比の分子は大きい方を取ると，$F_0 = \dfrac{\dfrac{n_a S_a^2}{n_a - 1}}{\dfrac{n_b S_b^2}{n_b - 1}}$は自由度$(n_a - 1, n_b - 1)$の

F分布に従い　$F_0 > F_{n_b - 1}^{n_a - 1}\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ならば$H_0$を棄却する。

問題の数表から$\varepsilon / 2 = 0.05$とすると$F_0 = \dfrac{1.643}{1.327} \fallingdotseq 1.238 < F_6^7(0.05) = 4.21$となり$H_0$は棄却されない。即ち$\sigma_a^2 = \sigma_b^2$と考えて良いことが分った。

従って，平均値の差の検定はt検定を用いることとする。

帰無仮説を$H_1 : \mu_a - \mu_b = 0 ; \mu_a = \mu_b$とおき，対立仮説を$H_2 : \mu_a \neq \mu_b$とする。

$$T = \frac{\overline{X}_a - \overline{X}_b}{\sqrt{\dfrac{n_a s_a{}^2 + n_b s_b{}^2}{n_a + n_b - 2} \cdot \left(\dfrac{1}{n_a} + \dfrac{1}{n_b}\right)}}$$ は自由度$n_a + n_b - 2$のt－分布に従い，

$|T| > t_{n_a + n_b - 2}\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ならば$H_1$を棄却する。

標本から $|T| = \left| \dfrac{47.0 - 49.3}{\sqrt{\dfrac{8 \times 1.4375 + 7 \times 1.1371}{8+7-2}\left(\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{7}\right)}} \right| \fallingdotseq \dfrac{2.2161}{0.633} \fallingdotseq 3.63$

一方，$\varepsilon = 0.01$ とするとき $\dfrac{\varepsilon}{2} = 0.005$ であるから，数表より $t_{13}\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right) = t_{13}(0.005) = 3.012$

$|T| > t_{13}\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ 　となり，有意水準0.01という低い水準でも H_1 は棄却される。即ち飼料の違いによる影響があると言ってよい。

4.

(1) $\phi(t) = E(e^{tX_i^*})$

$$\phi_n(t) = E(e^{tY_n}) = E\left(e^{t\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/\sigma}\right) = E\left[\exp\left\{t\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right\}\right]$$

$$= E\left[\exp\left\{\frac{t}{\sqrt{n}}\left(\frac{X_1 - \mu}{\sigma} + \cdots + \frac{X_n - \mu}{\sigma}\right)\right\}\right]$$

$$= E\left\{\exp\left(\frac{t}{\sqrt{n}} X_1^*\right)\right\} \cdot \cdots \cdot E\left\{\exp\left(\frac{t}{\sqrt{n}} X_n^*\right)\right\} = \phi^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \quad (\because X_i^* \text{は独立})$$

(2) ところで $\phi(t) = 1 + E(X_i^*)t + \cdots + \dfrac{E(X_i^{*n})}{n!} t^n + \cdots$

$$= 1 + E(X_i^*)t + \frac{E(X_i^{*2})}{2!} t^2 + \vartheta(t^3) \quad \left(\begin{array}{l} \text{ここに} \vartheta(t^3) \text{は} \\ t^3 \text{と同位の無限小を意味する} \end{array}\right)$$

$$E(X_i^*) = E\left\{\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right\} = 0 \quad (\because \ E(X_i) = \mu)$$

$$E(X_i^{*2}) = V(X_i^*) + \{E(X_i^*)\}^2 = \left(\frac{1}{\sigma}\right)^2 E(X_i - \mu)^2 = 1$$

$$\therefore \phi_n(t) = \phi^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left\{1 + 0 \cdot \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2n} + \vartheta\left(\frac{t^3}{\sqrt{n}^3}\right)\right\}^n$$

$$\lim_{n \to \infty} \phi_n(t) = \lim_{n \to \infty}\left\{1 + \frac{t^2}{2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{\vartheta(t^3)}{n\sqrt{n}}\right\}^n$$

$$= \lim_{n \to \infty}\left[1 + \frac{1}{n}\left\{\frac{t^2}{2} + \frac{\vartheta(t^3)}{\sqrt{n}}\right\}\right]^n = e^{\frac{t^2}{2}}$$

$\because$ $y=\left[1+\frac{1}{h}\left\{\frac{t^2}{2}+\frac{\vartheta(t^3)}{\sqrt{h}}\right\}\right]^h$ とおき対数を取ると $\ell og y=\dfrac{\ell og\left[1+\frac{1}{h}\left\{\frac{t^2}{2}+\frac{\vartheta(t^3)}{\sqrt{h}}\right\}\right]}{h^{-1}}$

ロピタルの定理より

$$\lim_{h\to\infty}\ell og y=\lim_{h\to\infty}\frac{\frac{d}{dh}\ell og\left[1+\frac{t^2}{2h}+\frac{\vartheta(t^3)}{h^{3/2}}\right]}{\frac{d}{dh}(h^{-1})}=\lim_{h\to\infty}\frac{-\frac{t^2}{2h^2}-\left(\frac{3}{2}\right)\frac{\vartheta(t^3)}{h^{5/2}}}{1+\frac{t^2}{2h}+\frac{\vartheta(t^3)}{h^{3/2}}}\cdot\frac{1}{-\frac{1}{h^2}}$$

$$=\lim_{h\to\infty}\frac{\frac{t^2}{2}+\frac{3}{2}\frac{\vartheta(t^3)}{\sqrt{h}}}{1+\frac{t^2}{2h}+\frac{\vartheta(t^3)}{h^{3/2}}}=\frac{t^2}{2}\qquad\therefore\ h\to\infty \text{のとき} y\to e^{\frac{t^2}{2}}$$

(3)　$\phi_n(t)$の極限はN（0，1）の積率母関数である。個々の受験者の得点の確率分布は分らなくても，相当程度受験者が多い場合$\mu=m$, $\frac{\sigma^2}{n}=S^2$としてこの数学の試験の平均点の確率分布はN(m, S^2)で近似できるという事を示している。