保険数学2（問題）

1．次の（1）から（5）までについて、それぞれ五つの選択肢の中から正しいものを一つ選んで、所定の解答用紙にその記号（（A）から（E）のうちいずれか一つ）を記入せよ。（40点）

（1）定常人口において、$l_x = a - x \quad (0 \leqq x \leqq a)$，$\mathring{e}_0 = 81$ のとき、平均年齢は次のうちどれか。

（A）51　（B）52　（C）53　（D）54　（E）55

（2）次の式のうちで、a_x^{ai} に等しいものはどれか。

（A）$\dfrac{N_x^{ii} - D_x^{ii}\ \ddot{a}_x^{i}}{D_x^{aa}}$　（B）$\dfrac{N_x^{ii} - D_x^{aa}\ \ddot{a}_x^{i}}{D_x^{aa}}$　（C）$\dfrac{N_x^{ii} - D_x^{ii}\ A_x}{D_x^{aa}}$　（D）$\dfrac{N_x^{ii} - D_x^{aa}\ \ddot{a}_x^{i}}{D_x^{ii}}$

（E）$\dfrac{N_x^{ii} - D_x^{aa}\ A_x}{D_x^{ii}}$

（3）次の式のうちで、$a_{\overline{yz}|x}$ に等しいものはどれか。

（A）$a_x - a_{xy} - a_{xz}$　（B）$a_x - a_{xy} - a_{xz} + a_{xyz}$　（C）$a_x + a_{xy} + a_{xz} - a_{xyz}$　（D）$a_x - a_{xyz}$

（E）$a_x - a_y - a_z + a_{xyz}$

（4）n年満期、年払の養老保険（保険金額1、保険金期末払）を5年経過時点で解約返戻金 ${}_tW$に基づいて払済養老保険に変更するとき、変更後の保険金額に最も近いものは次のうちどれか。

ただし、${}_tW = {}_tV_{x:\overline{n}|} - 0.025\,\dfrac{10-t}{10}$　$(t \leqq 10)$，${}_tV_{x:\overline{n}|}$は純保険料式責任準備金とし、払済養老保険の予定事業費は、保険金1に対し毎年 0.002とする。また、$d = 0.057$，$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 10.2$，$\ddot{a}_{x+5:\overline{n-5}|} = 7.76$ とする。

（A）0.40　（B）0.41　（C）0.42　（D）0.43　（E）0.44

（5）2つの死亡表の死力の間に　$\mu'_x = 2\mu_x$ なる関係があるとき、次の式のうちで ${}_tp_{\overline{xx}}$ に等しいものはどれか。

ただし、${}_tp_x$，${}_tp'_x$ はそれぞれμ_x，μ'_xにもとづくものとする。

（A）${}_tp'_x$　（B）$2\,{}_tp'_x - {}_tp_x$　（C）${}_tp'_x - 2\,{}_tp_x$　（D）${}_tp_x - 2\,{}_tp'_x$　（E）$2\,{}_tp_x - {}_tp'_x$

2．x歳の子供を被保険者、y歳の親を契約者として次の給付を行う連生保険を考える。

（i）子供が死亡した場合は、保険金1を保険年度末に支払い、契約は消滅する。

（ii）親が死亡し、子供がその保険年度末に生存している場合は、保険年度末に給付金Sを支払い、翌年度以降の保険料払込を免除する。

この保険の全期払年払純保険料はP、第t年度末純保険料式責任準備金は ${}_tV^{(1)}$（契約者生存中）および ${}_tV^{(2)}$（契約者死亡後）でそれぞれ表すものとする。

いま、予定利率 iに対し実際利率 $i+\Delta i$、予定死亡率 q_x，q_y に対し実際死亡率 $q_x - \Delta q_x$，$q_y - \Delta q_y$ とし、前保険年度末に親が生存しているとき、第t保険年度の剰余R_t は次の式で近似できることを示せ。

ただし、$(q_{x+t-1} - \Delta q_{x+t-1})(q_{y+t-1} - \Delta q_{y+t-1}) \fallingdotseq q_{x+t-1} \cdot q_{y+t-1}$ とする。

$$R_t \fallingdotseq \Delta i\,({}_{t-1}V^{(1)} + P) + \Delta q_{x+t-1}(1 - {}_tV^{(1)}) + \Delta q_{y+t-1}({}_tV^{(2)} - {}_tV^{(1)} + S)$$

（20点）

3．x歳加入、保険期間n年、保険金額1の養老保険を、t（$t<n$）年経過時に保険金額3、新保険期間n年の養老保険に次の2とおりの方式により転換することを考える。（いずれも保険金期末払）

(a) 旧契約の純保険料式責任準備金 ${}_tV_{x:\overline{n|}}$を用いて、期間n年の払済保険を購入し、転換新契約の保険料は新保険金額から払済保険金額を差し引いた額に対して計算する。

(b) 旧契約の純保険料式責任準備金 ${}_tV_{x:\overline{n|}}$を用いて、期間m年（$m<n$）の間、転換新契約の保険料の一部に毎年同額を充当する。

いま、$y=x+t$として、両方式による年払純保険料を ${}^aP_{y:\overline{n|}}$, ${}^b_cP_{y:\overline{n|}}$（$c=1$ ：充当期間中, $c=2$ ：充当期間経過後）とし、転換時から第s保険年度末純保険料式責任準備金を ${}^a_sV_{y:\overline{n|}}$, ${}^b_sV_{y:\overline{n|}}$とする場合、次の問に答えよ。

ただし、予定死亡率、予定利率は転換前後で同一とし、予定事業費率は考えないものとする。

（1） ${}^aP_{y:\overline{n|}}-{}^b_cP_{y:\overline{n|}}$を求め、その正負を論ぜよ。ただし、$c=1$，2とする。

（2） ${}^a_sV_{y:\overline{n|}}-{}^b_sV_{y:\overline{n|}}$を求め、その正負を論ぜよ。ただし、$0<s<n$とする。　（20点）

4．次の給付を行う夫x歳、妻y歳の夫婦年金保険の年払純保険料および純保険料式責任準備金を求めよ。

なお、予定死亡率は男女同一とし、保険料は払込期間がn年で、夫が生存中毎保険年度始に払い込むものとする。

（i）夫が死亡した場合には、夫が死亡した翌年度始から、妻の生存を条件に毎年Aずつの終身年金を支払う。

（ii）夫が保険料払込期間満了時に生存している場合には、（$n+1$）年の応当日以降の毎保険年度始に夫の生存を条件に毎年Bずつの終身年金を支払う。　（20点）

保険数学2（解答例）

1. (1) $\overset{\circ}{e}_0=\dfrac{T_0}{l_0}=\dfrac{\int_0^a(a-x)dx}{a}=\dfrac{a}{2}=81$

より　$a=162$

（平均年令）　$=\dfrac{1}{T_0}\int_0^a xlxdx$

$$=\frac{1}{\left(\frac{a^2}{2}\right)}\int_0^a x(a-x)dx$$

$$=\frac{a}{3}=54=(D)$$

(2) $a_x^{ai}=\sum_{t=1}^{\infty}v^t{}_tp_x^{ai}=\sum_{t=0}^{\infty}v^t{}_tp_x^{ai}\qquad({}_0p_x^{ai}=0)$

$$=\sum_{t=0}^{\infty}v^t\frac{l_{x+t}^{ii}-l_x^{ii}\cdot{}_tp_x^{i}}{l_x^{aa}}$$

$$=\sum_{t=0}^{\infty}\frac{v^{x+t}\cdot l_{x+t}^{ii}-(v^xl_x^{ii})\cdot(v^t{}_tp_x^{i})}{v^x\cdot l_x^{aa}}$$

$$=\frac{\sum_{t=0}^{\infty}D_{x+t}^{ii}-D_x^{ii}\left(\sum_{t=0}^{\infty}v^t\cdot{}_tp_x^{i}\right)}{D_x^{aa}}$$

$$=\frac{N_x^{ii}-D_x^{ii}\cdot\ddot{a}_x^{i}}{D_x^{aa}}=(A)$$

(3) $a_{\overline{yz}|x}=a_x-a_{x,\overline{yz}}$

一方　$a_{x,\overline{yz}}=\sum_{t=1}^{\infty}v^t\cdot{}_tp_{x,\overline{yz}}$

$$=\sum_{t=1}^{\infty}v^t\cdot{}_tp_x\cdot{}_tp_{\overline{yz}}$$

$$=\sum_{t=1}^{\infty}v^t\cdot{}_tp_x({}_tp_y+{}_tp_z-{}_tp_{yz})$$

$$=\sum_{t=1}^{\infty}v^t({}_tp_{xy}+{}_tp_{xz}-{}_tp_{xyz})$$

$$=a_{xy}+a_{xz}-a_{xyz}$$

であるから

$$a_{\overline{yz}|x}=a_x-a_{xy}-a_{xz}+a_{xyz}=(B)$$

(4)　（払済養老保険金額）

$$=\frac{{}_5W}{A_{x+5:\overline{n-5}|}+0.002\ddot{a}_{x+5:\overline{n-5}|}}$$

$$=\frac{{}_5V_{x:\overline{n}|}-0.025\cdot\frac{10-5}{10}}{A_{x+5:\overline{n-5}|}+0.002\ddot{a}_{x+5:\overline{n-5}|}}$$

$$=\frac{\left(1-\frac{\ddot{a}_{x+5:\overline{n-5}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\right)-0.025\ \frac{5}{10}}{(1-d\cdot\ddot{a}_{x+5:\overline{n-5}|})+0.002\ddot{a}_{x+5:\overline{n-5}|}}$$

$= 0.3955\cdots \fallingdotseq 40 =$ (A)

(5)　$${}_tp_{\overline{xx}}=1-(1-{}_tp_x)(1-{}_tp_x)$$

$$=2{}_tp_x-({}_tp_x)^2$$

一方

$${}_tp'_x=e^{-\int_0^t\mu'_{x+s}ds}$$

$$=e^{-\int_0^t 2\mu_{x+s}ds}$$

$$=\left(e^{-\int_0^t\mu_{x+s}ds}\right)^2$$

$$=({}_tp_x)^2$$

であるから

$${}_tp_{\overline{xx}}=2{}_tp_x-{}_tp'_x=(E)$$

2.　題意から第ｔ保険年度末の２人の生死の状態により，給付と保険年度末Ｖは次のようになる。

子供	親	給　付	保険年度末Ｖ
生存	生存	0	$_tV^{(1)}$
生存	死亡	S	$_tV^{(2)}$
死亡	生存	1	0
死亡	死亡		

従って責任準備金の再帰式は次式のようになる。

$$({}_{t-1}V^{(1)}+P)(1+i)$$

$$=q_{x+t-1}+(1-q_{x+t-1})(1-q_{y+t-1})\cdot{}_tV^{(1)}+(1-q_{x+t-1})q_{y+t-1}(S+{}_tV^{(2)})\cdots①$$

また実際利率，実際死亡率に従う場合①式に対応するものは，

$$({}_{t-1}V^{(1)}+P)(1+i+{}_\Delta i)$$

$$=q_{x+t-1}-{}_\Delta q_{x+t-1}+(1-q_{x+t-1}+{}_\Delta q_{x+t-1})(1-q_{y+t-1}+{}_\Delta q_{y+t-1})\cdot{}_tV^{(1)}$$

$$+(1-q_{x+t-1}+{}_\Delta q_{x+t-1})(q_{y+t-1}-{}_\Delta q_{y+t-1})(S+{}_tV^{(2)})+R_t\cdots②$$

ここでただし書の近似を用いれば②式は，

$$({}_{t-1}V^{(1)}+P)(1+i+{}_\Delta i)$$

$$\fallingdotseq q_{x+t-1}-{}_\Delta q_{x+t-1}+(1-q_{x+t-1}+{}_\Delta q_{x+t-1}-q_{y+t-1}+{}_\Delta q_{y+t-1}+q_{x+t-1}\cdot q_{y+t-1})\cdot{}_tV^{(1)}$$

$$+(q_{y+t-1}-{}_\Delta q_{y+t-1}-q_{x+t-1}\cdot q_{y+t-1})(S+{}_tV^{(2)})+R_t\cdots③$$

③式と①式の辺々の差をとれば

$$({}_{t-1}V^{(1)}+P)\cdot{}_\Delta i$$

$$\fallingdotseq -{}_\Delta q_{x+t-1}+({}_\Delta q_{x+t-1}+{}_\Delta q_{y+t-1}){}_tV^{(1)}-{}_\Delta q_{y+t-1}(S+{}_tV^{(2)})+R_t$$

$$\fallingdotseq -{}_\Delta q_{x+t-1}(1-{}_tV^{(1)})-{}_\Delta q_{y+t-1}(S+{}_tV^{(2)}-{}_tV^{(1)})+R_t$$

故に

$$R_t\fallingdotseq{}_\Delta i({}_{t-1}V^{(1)}+P)+{}_\Delta q_{x+t-1}(1-{}_tV^{(1)})+{}_\Delta q_{y+t-1}({}_tV^{(2)}-{}_tV^{(1)}+S)$$

3. (1) (a)方式によって購入される払済保険金額は,

$$\frac{{}_tV_{x:\overline{n}|}}{A_{y:\overline{n}|}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

従って

$$ {}^{a}P_{y:\overline{n}|}=P_{y:\overline{n}|}\left(3-\frac{{}_tV_{x:\overline{n}|}}{A_{y:\overline{n}|}}\right)$$

$$=3P_{y:\overline{n}|}-\frac{{}_tV_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{y:\overline{n}|}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

(b)方式によって保険料の一部に充当される生命年金額は,

$$\frac{{}_tV_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{y:\overline{m}|}}$$

従って

$${}^{b}_{c}P_{y:\overline{n}|}=\begin{cases} 3P_{y:\overline{n}|}-\dfrac{{}_tV_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{y:\overline{m}|}} & (\mathrm{C}=1) \\ 3P_{y:\overline{n}|} & (\mathrm{C}=2) \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

②, ③より

$${}^{a}P_{y:\overline{n}|}-{}^{b}_{c}P_{y:\overline{n}|}=\begin{cases} {}_tV_{x:\overline{n}|}\left(\dfrac{1}{\ddot{a}_{y:\overline{m}|}}-\dfrac{1}{\ddot{a}_{y:\overline{n}|}}\right)>0 & (\mathrm{C}=1) \\ -\dfrac{{}_tV_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{y:\overline{n}|}}<0 & (\mathrm{C}=2) \end{cases}$$

(2) ${}^{a}_{s}V_{y:\overline{n}|}$は平準払部分と払済保険部分の責任準備金の和であるから, ①より,

$${}^{a}_{s}V_{y:\overline{n}|}=\left(3-\frac{{}_tV_{x:\overline{n}|}}{A_{y:\overline{n}|}}\right){}_sV_{y:\overline{n}|}+\frac{{}_tV_{x:\overline{n}|}}{A_{y:\overline{n}|}}A_{y+s:\overline{n-s}|}$$

上式の右辺を整理すると

$${}^{a}_{s}V_{y:\overline{n}|}=3{}_sV_{y:\overline{n}|}+{}_tV_{x:\overline{n}|}\frac{\ddot{a}_{y+s:\overline{n-s}|}}{\ddot{a}_{y:\overline{n}|}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

${}^{b}_{s}V_{y:\overline{n}|}$については充当期間中(0＜s≦m)と充当期間経過後(m＜s＜n)に分けて考える。

充当期間中の場合

$${}^b_sV_{y:\overline{n}|}=3A_{y+s:\overline{n-s}|}-{}^b_1P_{y:\overline{n}|}\ddot{a}_{y+s:\overline{m-s}|}$$

$$-{}^b_2P_{y:\overline{n}|}(\ddot{a}_{y+s:\overline{n-s}|}-\ddot{a}_{y+s:\overline{m-s}|})$$

上式の ${}^b_1P_{y:\overline{n}|}$, ${}^b_2P_{y:\overline{n}|}$ に③を代入し整理すると

$${}^b_sV_{y:\overline{n}|}=3A_{y+s:\overline{n-s}|}-\left(3P_{y:\overline{n}|}-\frac{{}_tV_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{y:\overline{m}|}}\right)\ddot{a}_{y+s:\overline{m-s}|}$$

$$-3P_{y:\overline{n}|}(\ddot{a}_{y+s:\overline{n-s}|}-\ddot{a}_{y+s:\overline{m-s}|})$$

$$=3{}_sV_{y:\overline{n}|}+{}_tV_{x:\overline{n}|}\frac{\ddot{a}_{y+s:\overline{m-s}|}}{\ddot{a}_{y:\overline{m}|}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑤$$

また，充当期間経過後の場合

$${}^b_sV_{y:\overline{n}|}=3{}_sV_{y:\overline{n}|} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑥$$

④，⑤より，充当期間中の場合

$${}^a_sV_{y:\overline{n}|}-{}^b_sV_{y:\overline{n}|}={}_tV_{x:\overline{n}|}\left(\frac{\ddot{a}_{y+s:\overline{n-s}|}}{\ddot{a}_{y:\overline{n}|}}-\frac{\ddot{a}_{y+s:\overline{m-s}|}}{\ddot{a}_{y:\overline{m}|}}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑦$$

上式の右辺の括弧内を基数を用いて整理すると

$$\frac{\ddot{a}_{y+s:\overline{n-s}|}}{\ddot{a}_{y:\overline{n}|}}-\frac{\ddot{a}_{y+s:\overline{m-s}|}}{\ddot{a}_{y:\overline{m}|}}=\frac{D_y}{D_{y+s}}\left(\frac{N_{y+s}-N_{y+n}}{N_y-N_{y+n}}-\frac{N_{y+s}-N_{y+m}}{N_y-N_{y+m}}\right)$$

$$=\frac{D_y(N_y-N_{y+s})(N_{y+m}-N_{y+n})}{D_{y+s}(N_y-N_{y+n})(N_y-N_{y+m})}$$

従って上式を⑦に代行して，

$${}^a_sV_{y:\overline{n}|}-{}^b_sV_{y:\overline{n}|}={}_tV_{x:\overline{n}|}\frac{D_y(N_y-N_{y+s})(N_{y+m}-N_{y+n})}{D_{y+s}(N_y-N_{y+n})(N_y-N_{y+m})}>0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots⑧$$

また，④，⑥より充当期間経過後の場合

$${}^a_sV_{y:\overline{n}|}-{}^b_sV_{x:\overline{n}|}={}_tV_{x:\overline{n}|}\frac{\ddot{a}_{y+s:\overline{n-s}|}}{\ddot{a}_{y:\overline{n}|}}>0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑨$$

⑧，⑨より充当期間中であるか充当期間経過後であるかにかかわらず ${}^a_sV_{y:\overline{n}|}-{}^b_sV_{y:\overline{n}|}$ は正となる。

4. 求める年払純保険料をPとすると，題意より

収入の現価は $P\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ ……………①

一方，支出の現価を求めると次の②と③の和である。

(i)より　$A\cdot(\ddot{a}_y-\ddot{a}_{xy})$ ……………②

(ii)より　$B\cdot{}_{n|}\ddot{a}_x$ ……………③

収支相等の原則により①＝②＋③とおくと，

$$P\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=A\cdot(\ddot{a}_y-\ddot{a}_{xy})+B\cdot{}_{n|}\ddot{a}_x$$

$$\therefore\quad P=\frac{A\cdot(\ddot{a}_y-\ddot{a}_{xy})+B\cdot{}_{n|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$ (答)

次に，求める純保険料式責任準備金を V_t とするとき，次の場合に分けて考える。

1）保険料払込期間中（$t\leqq n$）の場合

(1) 夫 x，妻 y がともに生存のとき，

$${}_tV=A\cdot(\ddot{a}_{y+t}-\ddot{a}_{x+t,y+t})+B\cdot\frac{D_{x+n}}{D_{x+t}}\cdot\ddot{a}_{x+n}-P\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

(2) 夫 x が生存，妻 y が死亡のとき，

$${}_tV=B\cdot\frac{D_{x+n}}{D_{x+t}}\cdot\ddot{a}_{x+n}-P\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

(3) 夫 x が死亡，妻 y が 生存のとき，

$${}_tV=A\cdot\ddot{a}_{y+t}$$

2）保険料払込期間満了後（$t>n$）の場合

(1) 夫 x，妻 y がともに生存のとき，

$${}_tV=A\cdot(\ddot{a}_{y+t}-\ddot{a}_{x+t,y+t})+B\cdot\ddot{a}_{x+t}$$

(2) 夫 x が生存，妻 y が死亡のとき，

$${}_tV=B\cdot\ddot{a}_{x+t}$$

(3) 夫 x が死亡，妻 y が生存のとき，

$${}_tV=A\cdot\ddot{a}_{y+t}$$