損保数理（問題）

特に断りがないかぎり、消費税については考慮しないこととする。また、免責金額および支払限度額は１事故あたりのものであり、各クレームは独立であるものとする。

問題１． 次の（１）～（５）について、各問の指示に従い解答しなさい。

（１），（２）：各５点　（３）～（５）：各４点　（計 22 点）

（１）次の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

危険指標を建物の構造（構造Ａ・構造Ｂ）と所在する地域（地域Ｃ・地域Ｄ）の２区分で設定している火災保険があり、その実績クレーム単価のデータが下表のとおりであったとする。

＜クレーム単価＞

	地域Ｃ	地域Ｄ
構造Ａ	800	650
構造Ｂ	400	350

建物の構造・地域のクレーム単価$Y_i\left(i=1,2,3,4\right)$を一般化線形モデル、すなわち、$Y_i$の従う指数型分布族をポアソン分布 $f\left(y_i;\mu_i\right)=\dfrac{\mu_i^{y_i}}{y_i!}e^{-\mu_i}$ （ここで、$\mu_i=E\left(Y_i\right)$ である）、リンク関数を $g\left(x\right)=\log\left(x\right)$ とし、次の通り定義される説明変数 $x_{ij}\left(i=1,2,3,4,\ j=1,2,3\right)$ を用いて、$\mu_i=g^{-1}\left(\beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\beta_3x_{i3}\right)$と表されるモデルを用いて分析する。

$$x_{i1}=\begin{cases}1(\text{構造Aの場合})\\0(\text{構造Bの場合})\end{cases},x_{i2}=\begin{cases}1(\text{構造Bの場合})\\0(\text{構造Aの場合})\end{cases},x_{i3}=\begin{cases}1(\text{地域Cの場合})\\0(\text{地域Dの場合})\end{cases}$$

ここで、β_1,β_2,β_3はパラメータであり、最尤法で推定する。このとき、一般化線形モデルで計算した場合の、「構造Ａかつ地域Ｃ」のクレーム単価の期待値を「構造Ａかつ地域Ｄ」のクレーム単価の期待値で除した値に最も近いものは、$\boxed{\quad ① \quad}$である。

【①の選択肢】

（Ａ）1.100　（Ｂ）1.125　（Ｃ）1.150　（Ｄ）1.175　（Ｅ）1.200
（Ｆ）1.225　（Ｇ）1.250　（Ｈ）1.275　（Ｉ）1.300　（Ｊ）1.325

（２）次の（ア）、（イ）の各問に答えなさい。

（ア）次の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

事故年度から 3 年後の年度までに保険金支払が完了する保険商品について、次の実績データに基づくボーンヒュッターファーガソン法による 2019～2022 年度の支払備金（普通支払備金＋ＩＢＮＲ備金）合計に最も近い数値は $\boxed{②}$ である。

ただし、累計発生保険金のロスディベロップメントファクターの予測値には、既知の対応する事故年度別ロスディベロップメントファクターを単純平均した値を用いることとする。また、最終累計発生保険金の当初予測値は、事故年度別既経過保険料に予定損害率（各年度とも 70%とする。）を乗じた値を使用することとする。さらに、インフレ率は考慮しないものとする。

なお、計算の途中において、保険金・支払備金については全て小数点以下第 1 位を四捨五入して整数値を用い、ロスディベロップメントファクター・進展率（ある年度に発生した事故の最新の累計支払保険金に対する最終累計発生保険金の比率）については小数点以下第 4 位を四捨五入して小数点以下第 3 位までの数値を用いることとする。

＜事故年度別　既経過保険料と経過年度別累計発生保険金の推移＞

事故年度	既経過保険料	経過年度			
		1	2	3	4
2019	63,600	34,000	38,400	40,200	41,700
2020	64,300	36,600	40,400	42,100	
2021	66,400	39,900	43,500		
2022	69,300	43,100			

【②の選択肢】

（Ａ）12,300　（Ｂ）12,800　（Ｃ）13,300　（Ｄ）13,800　（Ｅ）14,300
（Ｆ）14,800　（Ｇ）15,300　（Ｈ）15,800　（Ｉ）16,300　（Ｊ）16,800

（イ）支払備金の見積手法に関する次の**（A）～（C）**の記述のうち、内容が正しいものをすべて選び『③』に解答しなさい。なお、いずれも正しくない場合、**（D）**を選択しなさい。

【③の選択肢】

（A）個別見積法とは、既発生損害に係る個々の支払額を積算する方法であり、既発生未報告損害の見積もりに用いられる。

（B）算式見積法とは、一定の算出式を用いて算出する方法であり、既報告未払損害の見積もりに用いられる。

（C）予定損害率または予測損害率による見積法とは、実績が全くない新しい保険などの総発生保険金を見積もる際に用いる方法である。

（３）将来の保険金 X が平均 3、分散 2 の正規分布に従うものとするとき、以下のＡ～Ｄの保険料算出原理によって将来の保険金に対応する保険料（予定事業費等の付加保険料は考慮しない）を算出することを考える。このとき、次の（ア）、（イ）の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

Ａ 期待値原理（$P(X)=(1+h)\mu_X$）で $h=0.1$

Ｂ 指数原理（$P(X)=\dfrac{\log M_X(h)}{h}$）で $h=0.1$

Ｃ ワンの保険料算出原理（$P(X)=\int x\cdot e^{h\Phi^{-1}(F_X(x))-\frac{h^2}{2}}\cdot f_X(x)dx$）で $h=0.1$

Ｄ エッシャー原理（$P(X)=\dfrac{E(Xe^{hX})}{E(e^{hX})}$）で $h=0.1$

ただし、μ_X、$M_X(h)$、$F_X(x)$、$f_X(x)$ はそれぞれ X の期待値、積率母関数、分布関数、確率密度関数を表し、Φ^{-1} は標準正規分布の分布関数の逆関数を表す。

（ア）Ａ～Ｄで算出した保険料のうち、最大のものは［　④　］、最小のものは［　⑤　］である。

（イ）保険金 X が一律で 2 倍になったとき、Ａ～Ｄで算出した保険料のうち、最大のものは［　⑥　］、最小のものは［　⑦　］である。

【④～⑦の選択肢】（④～⑦で共通。同じ選択肢を複数回用いてもよい。）

（Ａ）Ａ　**（Ｂ）**Ｂ　**（Ｃ）**Ｃ　**（Ｄ）**Ｄ

（４）次の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

次の条件が与えられている保険契約（保険期間 1 年間）がある。

＜条件＞

・ 支払限度額は $2,000,000$ で、免責金額の適用はない。

・ 年間クレーム件数 N は、ポアソン分布にしたがう。

・ 損害額 L、支払保険金額 X の分布について、次のことが分かっている。

$$P(X > 1,000,000) = 0.0125$$

$$E[\min(L, 1,000,000)] = 65,000$$

$$E[\min(L, 2,000,000)] = 75,000$$

・ 年間支払保険金総額 S の平均は $3,000,000$ である。

・ 各損害額とクレーム件数は、互いに独立である。

この保険契約について、1 年間で損害額 L が $1,000,000$ を超えるクレームが1件も発生しない確率に最も近いものは ⑧ である。なお、必要があれば、$e = 2.7183$ として計算すること。

※本問において、「損害額」、「支払保険金額」は次を表わすものとする。

損害額　　　　：支払限度額を考慮する前の、事故の損害の額

支払保険金額：支払限度額を考慮し、保険会社が支払う保険金の額

【⑧の選択肢】

（Ａ）2%　（Ｂ）5%　（Ｃ）7%　（Ｄ）10%　（Ｅ）13%

（Ｆ）20%　（Ｇ）30%　（Ｈ）37%　（Ｉ）48%　（Ｊ）60%

（５）次の（ア）、（イ）の各問に答えなさい。

（ア）次の**（Ａ）**～**（Ｃ）の**記述のうち、内容が正しくないものをすべて選び『⑨』に解答しなさい。
なお、いずれも正しい場合、**（Ｄ）**を選択しなさい。

【⑨の選択肢】

（Ａ） コヒーレント・リスク尺度が満たす 4 つの公理は、それぞれ「平行移動不変性」「単調性」「劣加法性」「正の同次性」である。特に劣加法性とは、ある正のリスク量 X_1, X_2 に対して、リスク尺度 ρ が $\rho(X_1+X_2) \geq \rho(X_1)+\rho(X_2)$ の関係性を満たすことである。

（Ｂ） 2 変数のグンベル・コピュラ $C(u_1,u_2)=\exp\left(-\left((-\log(u_1))^{\alpha}+(-\log(u_2))^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)$ は一般に、左裾において裾従属性を持ち、右裾において漸近的に独立である。

（Ｃ） ある主体の富 x に対する効用関数を $u(x)=\log(x)$ と仮定する。このとき、期待効用原理によれば、当該効用関数をもつ主体はリスク回避的であり、そのリスク回避度は富の増大とともに増加する。

（イ）次の**（Ａ）**～**（Ｃ）**の記述のうち、内容が正しくないものをすべて選び『⑩』に解答しなさい。
なお、いずれも正しい場合、**（Ｄ）**を選択しなさい。

【⑩の選択肢】

（Ａ） 支払備金の予測手法である確率論的アプローチでは、リスクと不確実性に関する調整額の算出に将来キャッシュフローの確率分布または複数シナリオを用いる。他方、決定論的アプローチでは、将来キャッシュフローを一点（期待値）で予測し、この期待値をリスクフリーレートで割り引くことで、リスクと不確実性に関する調整を行う。

（Ｂ） 再保険を契約手続き面により分類すると、再保険条件などの取引内容を個々の元受契約について個別に取り決める任意再保険と、複数の元受契約につき包括して取り決める特約再保険に分類される。　一般に、任意再保険は割合再保険と非割合再保険の両方の形で取引がされている。

（Ｃ） 一般に、保険料が急増中の保険会社では、ペイドロスは今日の急成長を反映したものとなるが、リトンプレミアムは、概して従前の保険料のボリュームがまだ少ない当時のものを反映していることになる。その結果、リトンベーシス損害率は実態より高めとなり、急成長中の保険会社の収益を過小評価し、必要な料率水準を高めに見積もってしまう傾向にある。

問題２． 次の（１）～（４）について、各問の指示に従い解答しなさい。
（１），（４）：各７点　（２），（３）：各８点　（計 30 点）

（１）次の（ア）、（イ）の各問に答えなさい。

（ア）次の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

４月１日から翌年３月 31 日までを事業年度としている保険会社がある。この保険会社が販売した 2023 年４月１日始期契約で満期返戻金 200、保険期間５年の年払積立保険について、積立保険料として平準式積立保険料を採用した場合の第３保険年度末の払戻積立金V_1と、全期チルメル式積立保険料を採用した場合の第３保険年度末の払戻積立金V_2を比較したところ、$V_2/V_1 =$ 0.96 となった。このとき、積立保険料として全期チルメル式積立保険料を採用した場合における初保険年度の積立保険料と第２保険年度以降の積立保険料の差額に最も近いものは［　①　］である。なお、予定契約消滅率を考慮した現価率を$\phi = 0.97$とする。

【①の選択肢】

（Ａ）9.0　**（Ｂ）**9.5　**（Ｃ）**10.0　**（Ｄ）**10.5　**（Ｅ）**11.0
（Ｆ）11.5　**（Ｇ）**12.0　**（Ｈ）**12.5　**（Ｉ）**13.0　**（Ｊ）**13.5

（イ）一般的な積立保険に関する次の**（Ａ）**～**（Ｃ）**の記述のうち、内容が正しくないものをすべて選び『②』に解答しなさい。なお、いずれも正しい場合、**（Ｄ）**を選択しなさい。

【②の選択肢】

（Ａ）保険料の算出において収支相等の原則が適用され、保険料算出の際の基礎率が予定通り実現していれば、過去法による責任準備金と将来法による責任準備金は一致する。

（Ｂ）一般に、保険設計や保険料算出の際の基礎率など、他の条件が全て同一であり、かつ、初年度経費相当額がある場合、チルメル式払戻積立金は平準式払戻積立金よりも小さくなる。

（Ｃ）積立保険の一部には、保険期間中、所定の事由の発生（扶養者の死亡など）を条件に、将来の保険料の払い込みを免除する制度を有するものがある。これを払込免除制度と言うが、保険料の払込免除による影響は保険金支払いに比して微々たるものであるため、保険料には織り込まれない。

（２）ある保険商品の直近年度の実績データは以下の表のとおりであった。

計上契約件数	20,000 件
計上保険料	240,000 千円
支払保険金	135,000 千円
実績社費	50,400 千円
発生クレーム件数	2,500 件
既経過保険料	244,200 千円
既発生保険金（インカードロス）	140,000 千円
経過契約件数	20,350 件
クレーム額の標準偏差	74,500 円

また、この保険商品の現行の予定料率構成割合と営業保険料は以下の表のとおりであり、全契約の営業保険料は同一であるものとする。

予定損害率	50%
予定社費率	25%
予定代理店手数料率	20%
予定利潤率	5%
営業保険料	12,000 円

次の（ア）～（ウ）の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。なお、各問で計算した結果を後の問題で用いる場合は、各問で選択肢から選んだ数値を用いることとする。

（ア）以下の条件の下で算出した全信頼度に必要なクレーム件数に最も近いものは $\boxed{\quad ③ \quad}$ である。
なお、必要があれば下表（標準正規分布の上側 ε 点）の数値を使用すること。

※　クレーム件数はポアソン分布に従うものとする。

※　クレーム件数および各クレーム額は互いに独立であり、クレーム総額を T、その平均と分散をそれぞれ、$E(T)$、$V(T)$ としたとき、$\dfrac{T-E(T)}{\sqrt{V(T)}}$ は標準正規分布 $N(0,1)$ で近似できる。

※　各クレーム額の平均および標準偏差は、直近年度の実績データを使用する。

※　クレーム総額が 90%の確率で、真のクレームコストの上下 5%以内に収まれば、クレーム総額に全信頼度を与える。

＜表＞　標準正規分布の上側 ε 点：$u(\varepsilon)$

ε	0.200	0.100	0.050	0.025	0.010
$u(\varepsilon)$	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326

【③の選択肢】

（Ａ）800 件　（Ｂ）1,000 件　（Ｃ）1,200 件　（Ｄ）1,500 件　（Ｅ）1,800 件
（Ｆ）2,000 件　（Ｇ）2,500 件　（Ｈ）3,000 件　（Ｉ）3,800 件　（Ｊ）5,000 件

（イ）直近年度の実績データを用いて、純保険料法により改定純保険料を求める。算出に当たっては信頼度を勘案するものとし、（ア）で求めた全信頼度に必要なクレーム件数を用いると、改定純保険料の値に最も近いものは$\boxed{\quad ④ \quad}$円となる。

【④の選択肢】

（A）6,000	（B）6,100	（C）6,200	（D）6,300	（E）6,400
（F）6,500	（G）6,600	（H）6,700	（I）6,800	（J）6,900

（ウ）（イ）で求めた改定純保険料に基づき、営業保険料を算出することを考える。改定後の社費率、代理店手数料率および利潤率は、それぞれ実績社費率、予定代理店手数料率および予定利潤率と同一とした場合、営業保険料の値に最も近いものは$\boxed{\quad ⑤ \quad}$円となる。なお、実績社費率は実績社費と計上保険料から求めるものとする。

【⑤の選択肢】

（A）12,000	（B）12,100	（C）12,200	（D）12,300	（E）12,400
（F）12,500	（G）12,600	（H）12,700	（I）12,800	（J）12,900

（３）ある保険商品の年間クレーム総額Sの分布関数$H\left(x:\alpha,\beta,x_0\right)$は、ガンマ分布の分布関数

$$G\left(x:\alpha,\beta\right)=\int_0^x \frac{\beta^\alpha}{\Gamma\left(\alpha\right)} t^{\alpha-1}e^{-\beta t}dt \qquad \left(0\le x<\infty, 0<\alpha<\infty, 0<\beta<\infty\right)$$ を用いて、

$H\left(x:\alpha,\beta,x_0\right)=G\left(x-x_0:\alpha,\beta\right)$と近似できることがわかっている。

このとき、次の（ア）～（ウ）の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

年間クレーム総額Sの平均、標準偏差、歪度は上記近似を行っても変化しないこととする。歪度は、確率変数Xのk次キュムラントχ_kを用いて、歪度＝$\dfrac{\chi_3}{\sigma^3}$にて定義される。なお、必要があれば次頁に示されるガンマ分布の分布関数$G\left(x:\alpha,\beta\right)$の値を用いること。

（ア）3 次キュムラントχ_3は$\dfrac{\boxed{⑥}}{\boxed{⑦}}$で表される。

【⑥, ⑦の選択肢】

（A） α	**（B）** 2α	**（C）** 3α	**（D）** α^2	**（E）** α^3
（F） β	**（G）** β^2	**（H）** 2β	**（I）** $2\beta^2$	**（J）** β^3

（イ）この保険商品の年間クレーム総額Sについて、平均 3、標準偏差 1、歪度 1 であることが分かっている。このとき、x_0の値に最も近いものは、$\boxed{⑧}$である。

【⑧の選択肢】

（A） 0.5	**（B）** 1.0	**（C）** 1.5	**（D）** 2.0	**（E）** 2.5
（F） 3.0	**（G）** 3.5	**（H）** 4.0	**（I）** 4.5	**（J）** 5.0

（ウ）この保険商品の年間クレーム総額に対して、エクセスポイント 3 のストップロス再保険を手配する。このストップロス再保険のネット再保険料（再保険者の負担する保険金の期待値）に最も近いものは、$\boxed{⑨}$である。

【⑨の選択肢】

（A） 0.40	**（B）** 0.60	**（C）** 0.80	**（D）** 1.00	**（E）** 1.20
（F） 1.40	**（G）** 1.60	**（H）** 1.80	**（I）** 2.00	**（J）** 2.20

＜表＞ガンマ分布の分布関数の値

$x=2$ のとき

$G(2:\alpha,\beta)$		α							
		1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0
β	0.5	0.632	0.264	0.080	0.019	0.004	0.001	0.000	0.000
	1.0	0.865	0.594	0.323	0.143	0.053	0.017	0.005	0.001
	1.5	0.950	0.801	0.577	0.353	0.185	0.084	0.034	0.012
	2.0	0.982	0.908	0.762	0.567	0.371	0.215	0.111	0.051
	2.5	0.993	0.960	0.875	0.735	0.560	0.384	0.238	0.133
	3.0	0.998	0.983	0.938	0.849	0.715	0.554	0.394	0.256
	3.5	0.999	0.993	0.970	0.918	0.827	0.699	0.550	0.401
	4.0	1.000	0.997	0.986	0.958	0.900	0.809	0.687	0.547
	4.5	1.000	0.999	0.994	0.979	0.945	0.884	0.793	0.676
	5.0	1.000	1.000	0.997	0.990	0.971	0.933	0.870	0.780
	5.5	1.000	1.000	0.999	0.995	0.985	0.962	0.921	0.857
	6.0	1.000	1.000	0.999	0.998	0.992	0.980	0.954	0.910
	6.5	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.989	0.974	0.946
	7.0	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.994	0.986	0.968
	7.5	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.997	0.992	0.982
	8.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.990

$x=3$ のとき

$G(3:\alpha,\beta)$		α							
		1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0
β	0.5	0.777	0.442	0.191	0.066	0.019	0.004	0.001	0.000
	1.0	0.950	0.801	0.577	0.353	0.185	0.084	0.034	0.012
	1.5	0.989	0.939	0.826	0.658	0.468	0.297	0.169	0.087
	2.0	0.998	0.983	0.938	0.849	0.715	0.554	0.394	0.256
	2.5	0.999	0.995	0.980	0.941	0.868	0.759	0.622	0.475
	3.0	1.000	0.999	0.994	0.979	0.945	0.884	0.793	0.676
	3.5	1.000	1.000	0.998	0.993	0.979	0.950	0.898	0.821
	4.0	1.000	1.000	0.999	0.998	0.992	0.980	0.954	0.910
	4.5	1.000	1.000	1.000	0.999	0.997	0.992	0.981	0.959
	5.0	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.997	0.992	0.982
	5.5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.997	0.993
	6.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.997
	6.5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999
	7.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	7.5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	8.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

（４）次の条件を満たす保険商品の引き受けを実施するにあたり、事業年度における破産確率を検討する。

＜条件＞

- １契約あたりのクレーム件数は平均 0.01 のポアソン分布に従い、クレーム額は平均 50 万円の指数分布に従う。また、クレーム総額の分布は近似的に正規分布に従う。なお、クレーム件数とクレーム額は独立である。
- この保険商品のみの引き受けを行い、保険金支払いは事業年度期初のサープラス 600 万円と、純保険料に安全割増 10%を加えた保険料収入で賄う。
- 契約引受件数は、5,000 件。
- 契約はすべて事業年度期初に締結されると同時に保険料が領収され、保険金支払いは事業年度中にすべて行われるものとする。なお、運用益は考慮しない。

このとき、次の（ア）、（イ）の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。なお、必要があれば下表（標準正規分布の上側ε点）の数値（表に記載のない数値は表中の隣り合う２つの値を直線補間することで算出された数値）および$e^{-1}=0.3679$を使用すること。

＜表＞標準正規分布の上側ε点：$u(\varepsilon)$

ε	0.080	0.050	0.025	0.020	0.015	0.010
$u(\varepsilon)$	1.405	1.645	1.960	2.054	2.170	2.326

（ア）当該事業年度における破産確率に最も近いものは、$\boxed{\quad ⑩ \quad}$である。

【⑩の選択肢】

（Ａ）2.5%　（Ｂ）3.0%　（Ｃ）3.5%　（Ｄ）4.0%　（Ｅ）4.5%
（Ｆ）5.0%　（Ｇ）5.5%　（Ｈ）6.0%　（Ｉ）6.5%　（Ｊ）7.0%

（イ）１クレームごとに、エクセス方式の免責金額 50 万円と支払限度額 350 万円の支払条件(*)を設けた場合の破産確率に最も近いものは、$\boxed{\quad ⑪ \quad}$である。なお、変更した支払条件に基づき純保険料を計算するものとする。

(*)例えば、クレーム額が 450 万円の場合は、$\min\{350, 450-50\}=350$ 万円を支払う。

【⑪の選択肢】

（Ａ）1.0%　（Ｂ）1.5%　（Ｃ）2.0%　（Ｄ）2.5%　（Ｅ）3.0%
（Ｆ）3.5%　（Ｇ）4.0%　（Ｈ）4.5%　（Ｉ）5.0%　（Ｊ）5.5%

問題３． 次の（１）～（５）について、各問の指示に従い解答しなさい。

（１），（３），（４）：各 10 点　（２），（５）：各９点　（計 48 点）

（１）団体 A と団体 B の過去３年間の実績クレームコストの保険成績が以下の通りであったとする。

		１年目 ($j=1$)	２年目 ($j=2$)	３年目 ($j=3$)
団体 A ($i=1$)	契約者数 m_{1j}	50	60	90
	クレーム総額 $m_{1j}X_{1j}$	1,000	1,440	2,160
団体 B ($i=2$)	契約者数 m_{2j}	100	80	120
	クレーム総額 $m_{2j}X_{2j}$	2,200	2,240	3,960

４年目の団体別のクレーム総額を推定するにあたり、Bühlmann-Straub モデルを用いることとする。なお、クレーム総額の推定にあたっては、以下の統計量を使用する。

$$\hat{\mu}=\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^{r} m_i \bar{X}_i}{m},\quad \hat{v}=\frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i} m_{ij}\left(X_{ij}-\bar{X}_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{r}\left(n_i-1\right)},\quad \hat{w}=\frac{\sum_{i=1}^{r} m_i\left(\bar{X}_i-\bar{X}\right)^2-\hat{v}\left(r-1\right)}{m-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{r} m_i^2}$$

ただし、$\bar{X}_i=\dfrac{\sum_{j=1}^{n_i} m_{ij}X_{ij}}{m_i}$,　$m_i=\displaystyle\sum_{j=1}^{n_i} m_{ij}$,　$m=\displaystyle\sum_{i=1}^{r} m_i$ とし、

n_i は各団体において実績が判明している年数、r は団体数とする。

このとき、次の（ア）、（イ）の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

（ア）統計量 $\hat{v}$ の値に最も近い値は $\boxed{\quad ①\quad}$、統計量 $\hat{w}$ の値に最も近い値は $\boxed{\quad ②\quad}$ となる。

【①の選択肢】

（A）200　（B）300　（C）500　（D）800　（E）1,000

（F）1,300　（G）1,500　（H）1,800　（I）2,200　（J）2,500

【②の選択肢】

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4　（E）5

（F）6　（G）7　（H）8　（I）9　（J）10

（イ）４年目の契約者数は団体 A が 100 人、団体 B が 160 人であることがわかっている。このとき、団体 A の４年目のクレーム総額の推定値に最も近い値は $\boxed{\quad ③\quad}$、団体 B の４年目のクレーム総額の推定値に最も近い値は $\boxed{\quad ④\quad}$ となる。

【③の選択肢】

（Ａ）2,100	（Ｂ）2,150	（Ｃ）2,200	（Ｄ）2,250	（Ｅ）2,300
（Ｆ）2,350	（Ｇ）2,400	（Ｈ）2,450	（Ｉ）2,500	（Ｊ）2,550

【④の選択肢】

（Ａ）4,150	（Ｂ）4,200	（Ｃ）4,250	（Ｄ）4,300	（Ｅ）4,350
（Ｆ）4,400	（Ｇ）4,450	（Ｈ）4,500	（Ｉ）4,550	（Ｊ）4,600

（２）ある保険商品は、契約者集団内の危険度のばらつきが大きいため、この保険商品のクレーム件数過程を通常の（パラメータが定数の）ポアソン過程としてモデリングすると、クレーム件数の分散を実際よりも過小評価するおそれがあった。そのため、パラメータを確率変数とし、クレーム件数過程$\left\{N_t\right\}_{t\geq 0}$を、次のようにモデリングした。

・$\left\{N_t\right\}_{t\geq 0}$は、確率変数$\Lambda=\lambda$の条件のもとでパラメータ$\lambda$のポアソン過程に従う。

　したがって、例えば以下の性質が成り立つ。

$$P(N_t=n\,|\,\Lambda=\lambda)=\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \qquad \left(t>0, \quad n=0,1,2,\cdots\right)$$

・Λは以下の確率密度関数を持つ分布に従う。なお、Λは時刻tによらないとする。

$$f\left(\lambda\right)=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda} \qquad \left(0\leq\lambda<\infty,\underline{1<\alpha<\infty,1<\beta<\infty}\right)$$

このとき、次の（ア）～（ウ）の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。
なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

（ア）$t>0$のとき、$V(N_t)/E(N_t)$は $\boxed{⑤}$ ＋ $\boxed{⑥}$ で表される。（⑤と⑥は順不同）

【⑤, ⑥の選択肢】

（A）1	（B）α	（C）β	（D）α^{-1}	（E）β^{-1}
（F）t	（G）αt	（H）βt	（I）$\alpha^{-1}t$	（J）$\beta^{-1}t$

（イ）$t>0$のとき、$P(N_t=0)$は$\left(\dfrac{\boxed{⑦}}{\boxed{⑧}}\right)^{\boxed{⑨}}$で表される。

【⑦～⑨の選択肢】

（A）1	（B）α	（C）β	（D）t	（E）$\alpha-1$
（F）$\beta-1$	（G）$t+1$	（H）$\alpha+\beta$	（I）$\alpha+t$	（J）$\beta+t$

（ウ） $\{N_t\}_{t\geq 0}$ について、初めてクレームが発生する時刻を T とするとき、$E(T)$ は $\dfrac{\boxed{⑩}}{\boxed{⑪}}$ で

表される。

【⑩, ⑪の選択肢】

（A） 1	（B） α	（C） β	（D） $\alpha+1$	（E） $\beta+1$
（F） $\alpha-1$	（G） $\beta-1$	（H） $\alpha+\beta$	（I） $\alpha+\beta+1$	（J） $\alpha+\beta-1$

（３）ある保険契約の損害額 X の分布関数は、次のとおり表される。

$$F_X(x) = 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \quad \beta > 0、\xi > 0、x \geq 0$$

このとき、次の（ア）～（ウ）の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

（ア）$\beta = 2$、$\xi = 0.5$ のとき、この保険契約に支払限度額 10 を設定した場合の支払保険金の期待値に最も近いものは、$\boxed{⑫}$ である。

【⑫の選択肢】

（Ａ）2.80　（Ｂ）2.82　（Ｃ）2.84　（Ｄ）2.86　（Ｅ）2.88
（Ｆ）2.90　（Ｇ）2.92　（Ｈ）2.94　（Ｉ）2.96　（Ｊ）2.98

（イ）$\beta = 2$、$\xi = 0.5$ のとき、この保険契約の支払保険金の $90\% VaR$ に最も近いものは、$\boxed{⑬}$ である。

【⑬の選択肢】

（Ａ）8.0　（Ｂ）8.2　（Ｃ）8.4　（Ｄ）8.6　（Ｅ）8.8
（Ｆ）9.0　（Ｇ）9.2　（Ｈ）9.4　（Ｉ）9.6　（Ｊ）9.8

（ウ）$\beta = 2$、$\xi = 0.5$ のとき、この保険契約に支払限度額 10 を設定した場合の支払保険金の $90\% TVaR$ に最も近いものは、$\boxed{⑭}$ である。

【⑭の選択肢】

（Ａ）9.0　（Ｂ）9.1　（Ｃ）9.2　（Ｄ）9.3　（Ｅ）9.4
（Ｆ）9.5　（Ｇ）9.6　（Ｈ）9.7　（Ｉ）9.8　（Ｊ）9.9

（4）保険種目 A および保険種目 B を販売している保険会社について、離散時間型モデルの破産確率を考える。時点 $n(=1,2,\cdots)$ におけるサープラス U_n は、

$$U_n = u_0 + cn - S_n^A - S_n^B$$

u_0 ：期首サープラス

W_i^A, W_i^B ：期間 i における保険種目 A,B のクレーム総額

$S_n^A = W_1^A + W_2^A + \cdots + W_n^A, S_n^B = W_1^B + W_2^B + \cdots + W_n^B$:最初の n 期間中の保険種目 A,B のクレーム総額

c ：各期間の収入保険料

により表されるものとし、次の仮定を置く。

・W_i^A および W_i^B はそれぞれ、個々のクレーム額が平均 μ_A および μ_B の指数分布に従い、クレーム件数がパラメータ λ_A および λ_B のポアソン分布に従う複合ポアソン分布であるとする。

・２つの保険種目の保険料の安全割増率は等しく、θ とする。

このとき、次の（ア）～（ウ）の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

（ア）この保険種目 A と B について、$\mu_A = \mu_B = \mu_0$ かつ $\lambda_A = \lambda_B = \lambda_0$ が成り立っており、また、保険種目 A と B のクレーム件数の間、および保険種目 A と B のクレーム額の間に正の完全相関があった場合を考える。すなわち、保険種目 A と B は同時に同件数のクレームが発生し、その時の保険種目 A と B のクレーム額は同額であるものとする。
保険種目 A と B の個々のクレーム件数、クレーム額は、保険種目 A と B のクレーム件数どうし、および保険種目 A と B のクレーム額どうしを除いて互いに独立であるとすると、Lundberg の不等式を用いて保険会社にとって最も保守的に評価した破産確率は、exp($\boxed{⑮}$)である。

【⑮の選択肢】

（A） $-\dfrac{\theta}{1+\theta}u_0$　（B） $-\dfrac{\theta}{(1+\theta)\mu_0}u_0$　（C） $-\dfrac{\theta}{(1+\theta)\lambda_0\mu_0}u_0$　（D） $-\dfrac{2\theta}{1+\theta}u_0$

（E） $-\dfrac{2\theta}{(1+\theta)\mu_0}u_0$　（F） $-\dfrac{2\theta}{(1+\theta)\lambda_0\mu_0}u_0$　（G） $-\dfrac{\theta}{2(1+\theta)\mu_0}u_0$

（H） $-\dfrac{\theta}{2(1+\theta)\lambda_0\mu_0}u_0$　（I） $-\dfrac{\theta}{4(1+\theta)\mu_0}u_0$　（J） $-\dfrac{\theta}{4(1+\theta)\lambda_0\mu_0}u_0$

（イ）この保険種目 A と B について、$\mu_A = \mu_B = \mu_0$ かつ $\lambda_A = \lambda_B = \lambda_0$ が成り立っており、また、保険種目 A と B の個々のクレーム件数、クレーム額はいずれも互いに独立であるとすると、Lundberg の不等式を用いて保険会社にとって最も保守的に評価した破産確率は、exp(⑯)である。

【⑯の選択肢】

（A）$-\dfrac{\theta}{1+\theta}u_0$　（B）$-\dfrac{\theta}{(1+\theta)\mu_0}u_0$　（C）$-\dfrac{\theta}{(1+\theta)\lambda_0\mu_0}u_0$　（D）$-\dfrac{2\theta}{1+\theta}u_0$

（E）$-\dfrac{2\theta}{(1+\theta)\mu_0}u_0$　（F）$-\dfrac{2\theta}{(1+\theta)\lambda_0\mu_0}u_0$　（G）$-\dfrac{\theta}{2(1+\theta)\mu_0}u_0$

（H）$-\dfrac{\theta}{2(1+\theta)\lambda_0\mu_0}u_0$　（I）$-\dfrac{\theta}{4(1+\theta)\mu_0}u_0$　（J）$-\dfrac{\theta}{4(1+\theta)\lambda_0\mu_0}u_0$

（ウ）この保険種目 A と B について、$\mu_A = 5$、$\mu_B = 2$、$\lambda_A = 1$、$\lambda_B = 2$ であり、また、保険種目 A と B の個々のクレーム件数、クレーム額はいずれも互いに独立であるとする。$u_0 = 20$ のとき、Lundberg の不等式を用いて保険会社にとって最も保守的に評価した破産確率が e^{-2} となる場合の安全割増率 θ の値に最も近いものは ⑰ である。

【⑰の選択肢】

（A）0.250　（B）0.333　（C）0.500　（D）0.667　（E）0.750

（F）1.000　（G）1.250　（H）1.333　（I）1.500　（J）1.677

（５）ある保険会社は 4 つの保険商品 A,B,C,D を販売している。このとき、次の（ア）～（ウ）の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。また、本問で必要があれば、$e = 2.7183$ として計算すること。

（ア）(X, Y) を一般的な連続分布に従う確率変数とする。

・$Y = f(X)$ が成り立つ単調増加関数 f が存在するとき、X と Y は共単調であるという。

・X と $-Y$ が共単調のとき、X と Y は反単調であるという。

逆に、X と Y が共単調であるとき、$Y = f(X)$ が成り立つ単調増加関数 f が存在する。

例えば、X は正規分布 $N(0, \sigma^2)$ 、Y は正規分布 $N(\mu, 1)$ にそれぞれ従い、

かつ X と Y が共単調のとき、$Y = f(X)$ が成り立つ単調増加関数 $f(x)$ に該当するものを選択肢から選ぶと、$\boxed{⑱}$ である。

【ヒント】$P(X \le x)$ を与えられた条件の下で変形する。

【⑱の選択肢】

（Ａ）$\frac{1}{\sigma}(x + \mu)$ （Ｂ）$\frac{1}{\sigma}(x + \mu\sigma)$ （Ｃ）$\frac{1}{\sigma}(x - \mu\sigma)$ （Ｄ）$\frac{1}{\sigma}(\sigma x + \mu)$ （Ｅ）$\frac{1}{\sigma}(\sigma x - \mu)$

（Ｆ）$x + \mu$ （Ｇ）$x + \mu\sigma$ （Ｈ）$x - \mu\sigma$ （Ｉ）$\sigma x + \mu$ （Ｊ）$\sigma x - \mu$

（イ）保険商品 A,B について考える。

・保険商品 A,B のクレーム額はそれぞれ Y_1, Y_2 であり、いずれも確率変数である。

・$\log Y_1$ は正規分布 $N(0,1)$ に従い、$\log Y_2$ は正規分布 $N(0, (1.5)^2)$ に従う。

・Y_1, Y_2 は同時分布に従い、Y_1, Y_2 は反単調である。

このとき、Y_1, Y_2 のピアソンの積率相関係数の値に最も近いものは $\boxed{⑲}$ であり、

ケンドールの順位相関係数の値に最も近いものは $\boxed{⑳}$ となる。

【⑲, ⑳の選択肢】

（Ａ）－1.0 （Ｂ）－0.8 （Ｃ）－0.6 （Ｄ）－0.4 （Ｅ）－0.2

（Ｆ）0 （Ｇ）0.2 （Ｈ）0.4 （Ｉ）0.6 （Ｊ）0.8

（Ｋ）1.0

（ウ）保険商品 C,D について考える。

・保険商品 C,D のクレーム額はそれぞれ U,V であり、いずれも確率変数である。

・U,V の確率密度関数は以下のとおり。

$$f_U(x)=\begin{cases} e^{-x} \cdots x>0 \\ 0 \quad \cdots \text{その他} \end{cases} \qquad f_V(y)=\begin{cases} 1 \cdots 0<y<1 \\ 0 \cdots \text{その他} \end{cases}$$

・U,V は同時分布に従い、$V=h(U)$ という関係が成り立つような単調増加関数 h が存在する。

このとき、U,V のピアソンの積率相関係数の値に最も近いものは $\boxed{\text{㉑}}$ であり、ケンドールの順位相関係数の値に最も近いものは $\boxed{\text{㉒}}$ となる。

【㉑, ㉒の選択肢】

（A）－1.0	（B）－0.8	（C）－0.6	（D）－0.4	（E）－0.2
（F）0	（G）0.2	（H）0.4	（I）0.6	（J）0.8
（K）1.0				

以上

損保数理（解答例）

問題１

（１）

①**（Ｅ）**［５点］

$y_1 = 800$（構造Ａかつ地域Ｃ）、$y_2 = 650$（構造Ａかつ地域Ｄ）、

$y_3 = 400$（構造Ｂかつ地域Ｃ）、$y_4 = 350$（構造Ｂかつ地域Ｄ）とする。

リンク関数が対数関数であることから、

$$\mu_i = g^{-1}\left(\beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3}\right) = \begin{cases} e^{\beta_1+\beta_3} & (i=1) \\ e^{\beta_1} & (i=2) \\ e^{\beta_2+\beta_3} & (i=3) \\ e^{\beta_2} & (i=4) \end{cases}$$ となる。

尤度関数は$L = \prod_{i=1}^{4} \frac{\mu_i^{y_i}}{y_i!} e^{-\mu_i}$であることから、対数尤度関数は、

$$l = \log L = \sum_{i=1}^{4} \left(y_i \log \mu_i - \log y_i! - \mu_i\right)$$
$$= 800\left(\beta_1+\beta_3\right) - \log 800! - e^{\beta_1+\beta_3} + 650\left(\beta_1\right) - \log 650! - e^{\beta_1}$$
$$+400\left(\beta_2+\beta_3\right) - \log 400! - e^{\beta_2+\beta_3} + 350\left(\beta_2\right) - \log 350! - e^{\beta_2}$$

となる。

$\frac{\partial l}{\partial \beta_i} = 0 \quad \left(i = 1,2,3\right)$より、

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_1} = 1,450 - e^{\beta_1} - e^{\beta_1+\beta_3} = 0 \qquad \cdots\text{(i)}$$
$$\frac{\partial l}{\partial \beta_2} = 750 - e^{\beta_2} - e^{\beta_2+\beta_3} = 0 \qquad \cdots\text{(ii)}$$
$$\frac{\partial l}{\partial \beta_3} = 1,200 - e^{\beta_1+\beta_3} - e^{\beta_2+\beta_3} = 0 \qquad \cdots\text{(iii)}$$

(i)より$e^{\beta_1} = \frac{1,450}{e^{\beta_3}+1}$、(ii)より$e^{\beta_2} = \frac{750}{e^{\beta_3}+1}$、これを(iii)に代入し、$1,200 = e^{\beta_3}\left(e^{\beta_1}+e^{\beta_2}\right) = \frac{2,200e^{\beta_3}}{e^{\beta_3}+1}$

したがって、$1,000e^{\beta_3} = 1,200$より$e^{\beta_3} = 1.2$であるから、「構造Ａかつ地域Ｃ」のクレーム単価の期待値を「構造Ａかつ地域Ｄ」のクレーム単価の期待値で除した値は、$e^{\beta_1+\beta_3} \div e^{\beta_1} = e^{\beta_3} = 1.2$

（２）

<u>（ア）②（**C**）（イ）③（**C**）</u>

［（ア） ３点　（イ） ２点］

（ア）

＜ロスディベロップメントファクターと進展率B_j＞

事故年度	経過年度			B_j
	1→2	2→3	3→4	
2019	1.129	1.047	1.037	1.000
2020	1.104	1.042	1.037	1.037
2021	1.090	1.045	1.037	1.084
2022	1.108	1.045	1.037	1.201

＜ボーンヒュッターファーガソン法による支払備金＞

事故年度	既経過保険料	予定損害率	当初予測値	2022 年度末累計支払保険金	B_j	$1-1/B_j$	最終累計発生保険金	支払備金
2019	63,600	70%	44,520	41,700	1.000	0.000	41,700	0
2020	64,300	70%	45,010	42,100	1.037	0.036	43,720	1,620
2021	66,400	70%	46,480	43,500	1.084	0.077	47,079	3,579
2022	69,300	70%	48,510	43,100	1.201	0.167	51,201	8,101
合計	263,600		184,520	170,400			183,700	13,300

（イ）

（A） 個別見積法とは、<u>既報告損害</u>に係る個々の支払見込額を積算する方法であり、<u>既報告未払損害</u>の見積もりに用いる。（テキスト 5-4）

（B） 算式見積法とは、一定の算出式を用いて算出する方法であり、<u>既発生未報告損害</u>の見積もりに用いる。（テキスト 5-4）

（C） 正しい。（テキスト 5-4）

（３）

（ア）最大：④（**A**）、最小：⑤（**B**）　（イ）最大：⑥（**D**）、最小：⑦（**C**）

［（ア）完答　２点　（イ）完答　２点］

（ア）

A：定義どおりに計算して、$P(X)=(1+0.1)\times 3=3.30$

B：テキスト 7-23 練習問題３の解答から、将来の保険金が正規分布に従うとき、指数原理による保険料は次のように変形して計算できる。

$$P(X)=\mu_X+\frac{h}{2}\times\sigma_X^2=3+\frac{0.1}{2}\times 2=3.10$$

C：テキスト 7-13 のとおり、将来の保険金が正規分布に従うとき、ワンの保険料算出原理による保険料は、次のように変形して計算できる。

$$P(X)=\mu_X+h\sigma_X=3+0.1\times\sqrt{2}=3.14$$

D：テキスト 7-24 練習問題６の解答から、将来の保険金が正規分布に従うとき、エッシャー原理による保険料は次のように変形して計算できる。

$$P(X)=\mu_X+h\sigma_X^2=3+0.1\times 2=3.20$$

上記より、A：3.30、B：3.10、C：3.14、D：3.20 となる。

（イ）

将来の保険金が平均$6(=3\times 2)$、分散$8(=2\times 2^2)$の正規分布に従うものとして、（ア）で求めた保険料算出式を利用すると、A：6.60、B：6.40、C：6.28、D：6.80 となる。

（４）

⑧（Ｊ）［４点］

$E(S)=E(N)\cdot E(X)=3{,}000{,}000$

条件の１つ目と３つ目より、$E(X)=E[\min(L,\ 2{,}000{,}000)]=75{,}000$であるから、

$$E(N)=\frac{3{,}000{,}000}{75{,}000}=40$$

$P(X>1{,}000{,}000)=0.0125$より、損害額Lが 1,000,000 を超える年間クレーム件数の平均は、

$$E(N)\cdot P(X>1{,}000{,}000)=40\times 0.0125=0.5$$

また、年間クレーム件数N がポアソン分布にしたがう場合、損害額Lが 1,000,000 を超える年間クレーム件数もポアソン分布に従う。（テキスト 8−62）

したがって、損害額Lが 1,000,000 を超える年間クレーム件数は、平均 0.50 のポアソン分布にしたがう。

よって、求める確率は、$e^{-0.5}=\frac{1}{2.7183^{0.5}}=0.6065$である。

（５）

（ア）⑨（**Ａ**）（**Ｂ**）（**Ｃ**）

（イ）⑩（**Ａ**）（**Ｃ**）

［(ア) 完答 2 点 (イ) 完答 2 点 ］

（ア）

（Ａ）×10-48 参照。問題文の不等号の向きを逆にすると正しい。

（Ｂ）×10-38 参照。左裾と右裾の説明文を逆にすると正しい。

（Ｃ）×7-20 参照。リスク回避度は富の増大とともに減少するが正しい。

（イ）

（Ａ）×決定論的アプローチでは、5-25 の記載より、リスクフリーレートではなく、リスクフリーレートを低めに調整した「リスクフリーレート$-\alpha$」で割り引く。(確率論的アプローチについては 5-36 の記載より、正しい。)

（Ｂ）○9-2 参照。

（Ｃ）×1-9 参照。リトンプレミアムとペイドロスについての説明が逆。また後半の文章は、正しくは「リトンベーシス損害率は実態より低めとなり、急成長中の保険会社の収益を過大評価し、必要な料率水準を低めに見積もってしまう傾向にある。」である。

問題２
（１）
（ア）①（**Ｅ**）　（イ）②（**Ｃ**）
［（ア）４点　（イ）３点］

（ア）
予定契約消滅率を考慮した現価率を $\phi = 0.97$ 、満期返戻金を $W = 200$ とする。
積立保険料として平準式積立保険料を採用した場合の積立保険料 P は

$$P = W\phi^5 \frac{1-\phi}{1-\phi^5}$$

であるから、将来法によって第３保険年度末の払戻積立金 V_1 は、

$$V_1 = W\phi^2 - P\frac{1-\phi^2}{1-\phi} = W\frac{\phi^2-\phi^5}{1-\phi^5}$$

と求められる。一方、積立保険料として全期チルメル式を採用した場合、初保険年度の積立保険料と第２保険年度以降の積立保険料の差額を α とすると、第２保険年度以降の積立保険料 P_S は

$$P_S = \left(\alpha + W\phi^5\right)\times\frac{1-\phi}{1-\phi^5}$$

となるため、将来法によって第３保険年度末の払戻積立金 V_2 は、

$$V_2 = W\phi^2 - P_S\frac{1-\phi^2}{1-\phi} = W\phi^2 - \left(\alpha + W\phi^5\right)\frac{1-\phi}{1-\phi^5}\frac{1-\phi^2}{1-\phi} = V_1 - \alpha\frac{1-\phi^2}{1-\phi^5}$$

と求められる。ここで、$V_2/V_1 = 0.96$ が成り立つことから、

$$\alpha\frac{1-\phi^2}{1-\phi^5} = 0.04V_1$$

が得られる。したがって、α の値は、

$$\alpha = 0.04V_1\frac{1-\phi^5}{1-\phi^2} = 0.04W\frac{\phi^2-\phi^5}{1-\phi^5}\frac{1-\phi^5}{1-\phi^2} = 0.04W\frac{\phi^2-\phi^5}{1-\phi^2}$$

$$= 0.04 \times 200 \times \frac{0.97^2 - 0.97^5}{1 - 0.97^2} = 11.1$$

となる。

（イ）

（A） 正しい：通常は一致する。（テキスト P6-14）

（B） 正しい：チルメル式積立保険料は、初年度経費相当額を将来の期間にわたって再配分したものである（テキスト P6-15）。したがって、チルメル式払戻積立金の方が平準式払戻積立金よりも小さくなる

（C） 誤り：保険料の払込免除のために必要となるファンドを、あらかじめ保険料中に織り込んでいる。（テキスト P6-30）

（２）

（ア）③（**H**）　（イ）④（**I**）　（ウ）⑤（**G**）

［(ア）２点　(イ）３点　(ウ）３点］

（ア）

テキスト（３．７）式より、クレーム総額が「100 p %の確率で真の値の±100k%の範囲内」に入るとき、クレーム総額に全信頼度を与える場合、全信頼度に必要なクレーム件数n_Fは、以下のようになる。

$$n_F = n_0 \left\{ 1 + \left(\frac{\sigma}{m} \right)^2 \right\}$$

ここで、$n_0 = y^2 / k^2$であり、yは$2\int_0^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = p$なる点である。

本問では、$p = 0.90$、$k = 0.05$、$m = 140,000\text{千円} / 2,500 = 56$千円、$\sigma = 74.5$千円であるから、これらを上式に代入すると、

$$n_F = 1.645^2 / 0.05^2 \times \left(1 + 74.5^2 / 56^2 \right) = 2,998$$

（イ）

クレーム頻度＝2,500 件/20,350 件

平均クレーム単価＝140,000 千円/2,500 件より

実績純保険料は 2,500 件/20,350 件×140,000 千円/2,500 件＝6,880 円となる。

また、予定損害率による予定純保険料は 12,000 円×50%＝6,000 円となる。

信頼度は$\sqrt{\frac{2,500}{3,000}} = 0.9129$となるので、求める純保険料は

0.9129×6,880 円＋（1－0.9129）×6,000 円＝6,803 円となる。

（ウ）

実績社費率＝50,400 円÷240,000 円＝21%

よって、営業保険料＝6,800 円/(1－21%－20%－5%)=12,592 円

（３）

<u>（ア）⑥（**B**）⑦（**J**）　（イ）⑧（**B**）　（ウ）⑨（**A**）</u>

［（ア）⑥⑦完答２点　（イ）２点　（ウ）４点］

（ア）
教科書 2-31 のとおり。

（イ）
$V(S)=1$かつ歪度が 1 なので、$E\left(\left(S-E(S)\right)^3\right)=1$となる。

教科書 2-32 の次式に$E(S)=3$、$V(S)=1$、$E\left(\left(S-E(S)\right)^3\right)=1$を代入して、$x_0=1$を得る。

$$x_0=E(S)-2\frac{V(S)^2}{E\left(\left(S-E(S)\right)^3\right)}$$

（ウ）
教科書 2-31 の次式に$E(S)=3$、$V(S)=1$、$E\left(\left(S-E(S)\right)^3\right)=1$を代入して、$\alpha=4$、$\beta=2$を得る。

$$\alpha=4\frac{V(S)^3}{E\left(\left(S-E(S)\right)^3\right)^2}$$

$$\beta=2\frac{V(S)}{E\left(\left(S-E(S)\right)^3\right)}$$

年間クレーム総額Sは、$\alpha=4$、$\beta=2$のガンマ分布$G(x:\alpha,\beta)$を$x_0=1$の分だけ平行移動させた分布に従うことから、年間クレーム総額Sにエクセスポイント 3 のストップロス再保険を適用した際のネット再保険料は、ガンマ分布$G(x:\alpha,\beta)$に従う確率変数S'にエクセスポイント 2 のストップロス再保険を適用した際の再保険料に等しい。
教科書 9-14 から、ガンマ分布$G(x:\alpha,\beta)$に従う確率変数S'にエクセスポイント 2 のストップロス再保険を適用した際の再保険料ストップロス再保険料$E(I_2)$は、

$$\frac{\alpha}{\beta}\left(1-G\left(2:\alpha+1,\beta\right)\right)-2\times\left(1-G\left(2:\alpha,\beta\right)\right)$$

で表されるため、$\alpha=4$、$\beta=2$ を代入して、

$$E\left(I_2\right)=0.392$$

を得る。

（4）

（ア）⑩（**E**）　（イ）⑪（**A**）　　［（ア）３点　（イ）４点］

（ア）

①平均値

クレーム件数の平均値は$n_1 = 5{,}000 \times 0.01 = 50$、１クレームあたりの支払額期待値は$m_1 = 50$万円であるので、支払総額の期待値は$E\left(S_1\right) = m_1 \times n_1 = 2{,}500$万円となる。

②標準偏差

クレーム額は平均 50 万円の指数分布に従うことから、クレーム額の原点周りの２次モーメントが

$$\int_0^\infty x^2 \frac{e^{-\frac{x}{50}}}{50} dx = 5{,}000 \quad \cdots \mathrm{A}$$

であることから、標準偏差は、$\sqrt{V\left(S_1\right)} = \sqrt{n_1 \times A} = 500$万円である。

③破産確率

期初のサープラスをu_0とすると、破産確率は次のとおり表される。

$$P\left(u_0 + 1.1E\left(S_1\right) - S_1 < 0\right) = P\left(\frac{S_1 - E\left(S_1\right)}{\sqrt{V\left(S_1\right)}} > \frac{u_0 + 0.1E\left(S_1\right)}{\sqrt{V\left(S_1\right)}}\right)$$

ここで、$Z = \dfrac{S_1 - E\left(S_1\right)}{\sqrt{V\left(S_1\right)}}$は標準正規分布に従うものとし、期初サープラス値および①・②で求めた数値を上式に代入して、直線補間により確率を求める。

$$P\left(Z > \frac{u_0 + 0.1E\left(S_1\right)}{\sqrt{V\left(S_1\right)}}\right) = P\left(Z > 1.7\right)$$
$$= \frac{0.025 - 0.050}{1.960 - 1.645} \times \left(1.7 - 1.645\right) + 0.05$$
$$= 4.5\%$$

（イ）

①平均値

クレーム件数の平均値は$n_2 = 5{,}000 \times 0.01 = 50$、１クレームあたりの支払額期待値は

$$m_2 = \int_{50}^{400} (x-50) \frac{e^{-\frac{x}{50}}}{50} dx + \int_{400}^{\infty} 350 \frac{e^{-\frac{x}{50}}}{50} dx = 50 \times \left(e^{-1} - e^{-8}\right) = 18.375$$

であるので、支払総額の期待値は$E\left(S_2\right) = m_2 \times n_2 = 918.741$万円となる。

②標準偏差

クレーム額は平均 50 万円の指数分布に従うことから、クレーム額の原点周りの２次モーメントが

$$m_2 = \int_{50}^{400} (x-50)^2 \frac{e^{-\frac{x}{50}}}{50} dx + \int_{400}^{\infty} 350^2 \frac{e^{-\frac{x}{50}}}{50} dx = 5{,}000 e^{-1} - 40{,}000 e^{-8} = 1{,}825.753 \cdots \mathrm{B}$$

であることから、標準偏差は、$\sqrt{V\left(S_2\right)} = \sqrt{n_2 \times B} = 302.139$ 万円となる。

③破産確率

期初のサープラスをu_0とすると、破産確率は次のとおり表される。

$$P\left(u_0 + 1.1E\left(S_2\right) - S_2 < 0\right) = P\left(\frac{S_2 - E\left(S_2\right)}{\sqrt{V\left(S_2\right)}} > \frac{u_0 + 0.1E\left(S_2\right)}{\sqrt{V\left(S_2\right)}}\right)$$

ここで、$Z = \dfrac{S_2 - E\left(S_2\right)}{\sqrt{V\left(S_2\right)}}$は標準正規分布に従うものとし、期初サープラス値および①・②で求めた数値を上式に代入して、直線補間により確率を求める。

$$P\left(Z > \frac{u_0 + 0.1E\left(S_2\right)}{\sqrt{V\left(S_2\right)}}\right) = P\left(Z > 2.29\right)$$
$$= \frac{0.010 - 0.015}{2.326 - 2.170} \times \left(2.29 - 2.170\right) + 0.015$$
$$= 1.1\%$$

問題３

（１）

（ア）①（**H**） ②（**E**）（イ）③（**I**） ④（**D**）［（ア）各３点 （イ）各２点］

（ア）与えられた実績に基づき、各数値を計算すると以下のとおり。

		１年目	２年目	３年目	計
団体A	契約者数 m_{1j}	50	60	90	200
	クレーム総額 $m_{1j}X_{1j}$	1,000	1,440	2,160	4,600
	X_{1j}	20	24	24	－
	$m_{1j}\left(X_{1j}-\bar{X}_1\right)^2$	450	60	90	600
団体B	契約者数 m_{2j}	100	80	120	300
	クレーム総額 $m_{2j}X_{2j}$	2,200	2,240	3,960	8,400
	X_{2j}	22	28	33	－
	$m_{2j}\left(X_{2j}-\bar{X}_2\right)^2$	3,600	0	3,000	6,600

$$m_1 = 200, m_2 = 300$$

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum_{j=1}^{3} m_{1j}X_{1j}}{m_1} = \frac{4,600}{200} = 23,\quad \bar{X}_2 = \frac{\sum_{j=1}^{3} m_{2j}X_{2j}}{m_2} = \frac{8,400}{300} = 28$$

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{r} m_i \bar{X}_i}{m} = \frac{200\times 23 + 300\times 28}{200+300} = 26$$

$$\hat{v} = \frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i} m_{ij}\left(X_{ij}-\bar{X}_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{r}(n_i-1)} = \frac{600+6,600}{2+2} = 1,800$$

$$\hat{w} = \frac{\sum_{i=1}^{r} m_i\left(\bar{X}_i-\bar{X}\right)^2 - \hat{v}(r-1)}{m-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{r} m_i^2} = \frac{200\times(23-26)^2 + 300\times(28-26)^2 - 1,800}{500-\frac{1}{500}\left(200^2+300^2\right)} = 5$$

以上から、$\boxed{\quad ①\quad}$および$\boxed{\quad ②\quad}$の選択肢はそれぞれ（H）、（E）となる。

（イ）（ア）の結果を基に、団体 A、B の信頼度をそれぞれ Z_1、Z_2 として計算すると、

$$Z_1 = \frac{200}{200+\frac{1,800}{5}} = 0.3571\cdots \fallingdotseq 0.357 \quad , \quad Z_2 = \frac{300}{300+\frac{1,800}{5}} = 0.4545\cdots \fallingdotseq 0.455$$

これにより、各地域のクレームコストC_1、C_2を計算すると、

$$C_1 = 0.357 \times 23 + (1 - 0.357) \times 26 = 24.9285 \cdots \fallingdotseq 24.929$$
$$C_2 = 0.455 \times 28 + (1 - 0.455) \times 26 = 26.9090 \cdots \fallingdotseq 26.909$$

よって、クレームコスト総額の推定値は、
地域 A： $24.929 \times 100 = 2,492.9$
地域 B： $26.909 \times 160 = 4,305.44$
となり、$\boxed{\quad ③ \quad}$および$\boxed{\quad ④ \quad}$の選択肢はそれぞれ（I)、(D）となる。

（2）

（ア）⑤（A）⑥（J）（イ）⑦（C）⑧（J）⑨（B）（ウ）⑩（C）⑪（F）

［（ア）⑤⑥完答２点（⑤⑥は順不同）（イ）⑦～⑨完答３点（ウ）⑩⑪完答４点］

（ア）Λ はパラメータ (α,β) のガンマ分布に従うことに注意する。

$$E(N_t)=E(E(N_t\,|\,\Lambda))=E(\Lambda t)=tE(\Lambda)=t\frac{\alpha}{\beta}$$

$$\begin{aligned}V(N_t)&=E(V(N_t\,|\,\Lambda))+V(E(N_t\,|\,\Lambda))\\&=E(\Lambda t)+V(\Lambda t)=tE(\Lambda)+t^2V(\Lambda)=t\frac{\alpha}{\beta}+t^2\frac{\alpha}{\beta^2}\end{aligned}$$

したがって、

$$V(N_t)/E(N_t)=1+\beta^{-1}t$$

（イ）

$$\begin{aligned}&P(N_t=0)\\&=\int_0^\infty P(N_t=0\,|\,\Lambda=\lambda)\cdot f(\lambda)d\lambda\\&=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\cdot f(\lambda)d\lambda\\&=E(e^{-\Lambda t})=M_\Lambda(-t)\\&=\left(\frac{\beta}{\beta+t}\right)^\alpha\end{aligned}$$

(ここで、$M_\Lambda(\cdot)$ は Λ の積率母関数)

【補足】　問題の条件のもと、

$$N_t\sim NB\left(\alpha,\frac{\beta}{\beta+t}\right)$$

が導ける（導出方法はテキスト 2-8.2-9 と同様)。これを用いても（ア）（イ）は解ける。

（ウ）$P(T>t)$ は時刻 t までクレームが発生しない確率なので、（イ）の結果が利用できて、

$$P(T>t)=P(N_t=0)=\left(\frac{\beta}{\beta+t}\right)^\alpha$$

また、非負連続確率変数の期待値は一般に、分布関数 F を用いて

$$E(T)=\int_0^\infty(1-F(t))dt$$

と表せるので、上記２式を組み合わせて、

$$E(T)=\int_0^\infty\left(\frac{\beta}{\beta+t}\right)^\alpha dt$$

問題文の条件$\alpha>1$に注意してこの積分を解けば、

$$E(T)=\frac{\beta}{\alpha-1}$$

（３）

<u>（ア）⑫（**D**）　（イ）⑬（**D**）　（ウ）⑭（**J**）</u>

［（ア）３点　（イ）２点　（ウ）５点 ］

（ア）
支払限度額を設定していない場合の支払保険金の期待値をE、支払限度額 10 を設定したときの契約者の自己負担額の期待値をE_C、支払限度額 10 を設定したときの支払保険金の期待値をE_Lとすると、
$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_C + \boldsymbol{E}_L \Leftrightarrow \boldsymbol{E}_L = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_C$
が成立する。

損害額Xは、一般化パレート分布に従うことから、

$$E = \frac{\beta}{1-\xi}$$
$$= \frac{2}{1-0.5}$$
$$= 4$$

さらに、閾値uの一般化パレート分布の平均超過関数$e(u)$は

$$e(u) = \frac{\beta + \xi u}{1-\xi}$$

と表されるため、E_Cは、

$$E_C = \left(1 - F(10)\right) \times e(10)$$

となる。

したがって、

$$E_L = E - E_C$$
$$= 2.86$$

（イ）
$90\% VaR = A$とすると、

$1-0.9=1-F(A)$

$\Leftrightarrow 0.1=\left(1+\dfrac{0.5\times A}{2}\right)^{-\frac{1}{0.5}}$

$\Leftrightarrow 10=\left(1+0.25A\right)^2$

$\Leftrightarrow \pm\sqrt{10}=1+0.25A$

$\Leftrightarrow A=4\times\left(-1\pm\sqrt{10}\right)$

$A\geq 0$ より、

$A=4\times\left(-1+\sqrt{10}\right)=8.65$

したがって、最も近いものは（D）となる。

（ウ）

支払限度額が設定されていないときの $90\%TVaR$ は、$90\%VaR+e(90\%VaR)$ で求められる。一方で、$90\%VaR$ を超過するという条件付きの、支払限度額 10 を上回る金額（契約者の自己負担額）の期待値は、$\dfrac{1-F(10)}{1-0.9}\times e(10)$ と表されることから、支払限度額 10 が設定されている場合の $90\%TVaR$ は、

$90\%TVaR=90\%VaR+e(90\%VaR)-\dfrac{1-F(10)}{1-0.9}\times e(10)$

で求められる。

これを解くと、

$90\%TVaR=9.9$

（4）

<u>（ア）⑮（**G**）　（イ）⑯（**B**）　（ウ）⑰（**D**）</u>

［（ア）３点　（イ）３点　（ウ）４点］

（ア）保険種目 A と保険種目 B とでパラメータが完全に等しいこと、およびその間の相関から、実質的に本クレーム総額過程は「支払保険金が２倍となった保険種目 A」のクレーム総額過程とみなすことができる。
したがって、調整係数をrとすると、

$$M_X(r)=1+(1+\theta)2\mu_0 r$$

となり、ここで$M_X(r)$は平均$2\mu_0$の指数分布の積率母関数であるため、

$$\frac{1}{1-2\mu_0 r}=1+(1+\theta)2\mu_0 r$$ と表せる。

これを整理すると、$r=\dfrac{\theta}{(1+\theta)2\mu_0}$となる。したがって、Lundberg の不等式を用いて保険会社にとって最も保守的に評価した破産確率は$e^{-\frac{\theta}{2(1+\theta)\mu_0}u_0}$となる。

（イ）保険種目 A と保険種目 B とでパラメータが完全に等しいこと、および独立であることから、実質的に本クレーム総額過程は「クレーム件数のパラメータが２倍となった保険種目 A のクレーム総額過程とみなすことができる。
したがって、調整係数をrとすると、

$$M_X(r)=1+(1+\theta)\mu_0 r$$

となり、ここで$M_X(r)$は平均μ_0の指数分布の積率母関数であるため、

$$\frac{1}{1-\mu_0 r}=1+(1+\theta)\mu_0 r$$ と表せる。

これを整理すると、$r=\dfrac{\theta}{(1+\theta)\mu_0}$となる。したがって、Lundberg の不等式を用いて保険会社にとって最も保守的に評価した破産確率は$e^{-\frac{\theta}{(1+\theta)\mu_0}u_0}$となる。

（ウ）与えられた条件から実質的に本クレーム総額過程は「クレーム件数のパラメータが$\lambda=\lambda_A+\lambda_B=3$」

かつ「クレーム額は、1/3 の確率で$\mu_A=5$の指数分布に、2/3 の確率で$\mu_B=2$の指数分布に従う」

クレーム総額過程とみなすことができる。
調整係数を r とすると、Lundberg の不等式を用いて保険会社にとって最も保守的に評価した破産確率は e^{-ru_0} となり、これが e^{-2} となること、および $u_0=20$ であることから、$r=0.1$ となる。

$$M_X(r)=1+(1+\theta)\mu_0 r$$

となり、ここで $M_X(r)$ は「1/3 の確率で $\mu_A=5$ の指数分布、2/3 の確率で $\mu_B=2$ の指数分布」の積率母関数であるため、

$\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1-\mu_A r}+\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{1-\mu_B r}=1+(1+\theta)\left(\dfrac{1}{3}\mu_A+\dfrac{2}{3}\mu_B\right)r$ と表せる。

これに各パラメータを代入すると、

$1.5=1+0.3(1+\theta)$ となり、$\theta=2/3\fallingdotseq 0.667$ となる。

【補足】
上記回答は、いずれの問題もクレーム総額を単一の複合ポアソン分布とみなすことで計算しているが、みなしを行わず $M_W(r)=e^{rc}$ を基に計算することでも同じ結果となる。

（５）

（ア）⑱（**B**）

（イ）⑲（**E**）⑳（**A**）

（ウ）㉑（**J**）㉒（**K**）

［（ア）⑱２点（イ）⑲⑳ 完答３点（ウ）㉑㉒完答４点 ］

（ア）

$$
\begin{aligned}
&P(X \le x) \\
&\quad = P(f(X) \le f(x)) \\
&\quad = P(Y \le f(x)) \\
&\quad = P(Z + \mu \le f(x)) \\
&\quad = P(Z \le f(x) - \mu) \cdots (1)
\end{aligned}
$$

となる。ただし、以下では Z は $N(0,1)$ に従う確率変数とする。

一方、

$$
\begin{aligned}
&P(X \le x) \\
&\quad = P(\sigma Z \le x) \\
&\quad = P\left(Z \le \frac{x}{\sigma}\right) \cdots (2)
\end{aligned}
$$

である。(1),(2)より $f(x) = \dfrac{1}{\sigma}(x + \mu\sigma)$ を得る。

よって⑱（**B**）を得る。

【補足】

他の増加関数の選択肢は、Y の確率分布の条件を満たさず不適。

（イ）

（ア）と同様に考える。Y_1, Y_2 が反単調となるとき、単調減少関数 f を用いて、$Y_2 = f(Y_1)$ という関係が成立する。よってこの $f(y)$ を求めると、

$$
\begin{aligned}
&P(Y_1 \le y) \\
&= P(f(Y_1) \ge f(y)) \\
&= P(Y_2 \ge f(y)) \\
&= P(\log(Y_2) \ge \log(f(y))) \\
&= P(\frac{\log(Y_2)}{1.5} \ge \frac{\log(f(y))}{1.5}) \\
&= P(Z \le -\frac{\log(f(y))}{1.5})
\end{aligned}
$$

一方、

$$
\begin{aligned}
&P(Y_1 \le y) \\
&= P(\log(Y_1) \le \log(y)) \\
&= P(Z \le \log(y))
\end{aligned}
$$

より、$f(y) = y^{-1.5}$ を得る。

したがって、$Y_1 = \exp(Z)$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
Y_2 &= y^{-1.5}|_{y=\exp(Z)} \\
&= \exp(-1.5Z)
\end{aligned}
$$
を得る。

よって、Y_1, Y_2 が反単調であるとき、$(Y_1, Y_2) = (\exp(Z), \exp(-1.5Z))$ とおける。

このとき、ピアソンの積率相関係数は

$$
\begin{aligned}
\rho &= \frac{Cov(e^Z, e^{-1.5Z})}{\sqrt{V[e^Z]}\sqrt{V[e^{-1.5Z}]}} = \frac{e^{-1.5}-1}{\sqrt{e-1}\sqrt{e^{2.25}-1}} \\
&\approx -0.20
\end{aligned}
$$

より、⑲（E）となる。Y_1, Y_2 は反単調であるから、テキスト 10-28 の記載より、ケンドールの $\tau = -1.0$、つまり⑳（A）となる。

（ウ）

ピアソンの積率相関係数の定義から、（イ）同様

$$\rho = \frac{Cov(U,V)}{\sqrt{V[U]}\sqrt{V[V]}}$$

$$= \frac{E[UV] - E[U]E[V]}{\sqrt{V[U]}\sqrt{V[V]}}$$

を計算すればよい。

ここで、周辺分布から、$E[U]=1, E[V]=\frac{1}{2}, V[U]=1, V[V]=\frac{1}{12}$ を得る。

$E[UV]$ を計算するためには U,V の関係式が必要となる。ここでは同時分布を考えると、（ア）と同様に考えて、

$$P(U \le x) = P(h(U) \le h(x))$$

$$= P(V \le y)$$

を得る。ここで、$x > 0, 0 < y < 1$ のとき、$P(U \le x) = 1 - e^{-x}$、$P(V \le y) = y$ から

$V = 1 - e^{-U}$ の関係式を得る。よって、

$$E[UV] = E[U(1 - e^{-U})]$$

$$= 1 - \int_0^\infty xe^{-2x}dx$$

$$= 1 - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{4}$$

であるから、

$$\rho = \frac{E[UV] - E[U]E[V]}{\sqrt{V[U]}\sqrt{V[V]}}$$

$$= \frac{\frac{3}{4} - 1 \times \frac{1}{2}}{1 \times \sqrt{\frac{1}{12}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$$

より、選択肢の中で最も近い値は㉑（J）である。

一方、条件より U,V は共単調であるから、テキスト 10-28 の記載より、ケンドールの $\tau = 1.0$ となる。

つまり、㉒（K）となる。