損保数理（問題）

特に断りがないかぎり、消費税については考慮しないこととする。また、免責金額および支払限度額は１事故あたりのものであり、各クレームは独立であるものとする。

問題１． 次の（１）～（５）の各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選びなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。　各４点　（計２０点）

（１）以下の表は、各保険料算出原理が満たす性質を○×で示したものである。この表の ① および ② に当てはまる保険料算出原理をすべて選びなさい。なお、いずれにも該当しない場合、**（H）**を選択しなさい。

【保険料算出原理が満たす性質】

保険料算出原理	リスクプレミアムは非負	保険料は保険金の上限額以下	平行移動不変性	正の同次性	独立なリスクに対する加法性
①	○	○	○	×	○
②	○	×	○	○	×

【①、②の選択肢】

（A） 期待値原理　**（B）** 分散原理　**（C）** 標準偏差原理

（D） 指数原理　**（E）** パーセンタイル原理　**（F）** エッシャー原理

（G） ワンの保険料算出原理

（2）次の（ア）、（イ）の各問に答えなさい。

（ア）次の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

中途返れい金のある年払契約の積立型基本特約において、払戻積立金が負にならないために満たすべき関係式は $\boxed{\quad ③ \quad}$ である。ただし、満期返れい金を W 、中途返れい金を R 、保険期間を n 年、保険始期から中途返れい金の支払までの期間を j 年、予定利率を i 、現価率を $v\left[=\dfrac{1}{1+i}\right]$、予定契約消滅率 q を考慮した現価率を $\phi\left[=(1-q)v\right]$ とする。

【③の選択肢】

（A） $R \geq W \times \phi^{n-j} \times \dfrac{1-\phi^j}{\phi^j-\phi^n}$

（B） $R \leq W \times \phi^{n-j} \times \dfrac{1-\phi^j}{\phi^j-\phi^n}$

（C） $R \geq W \times \phi \times \dfrac{1-\phi^j}{\phi^j-\phi^n}$

（D） $R \leq W \times \phi \times \dfrac{1-\phi^j}{\phi^j-\phi^n}$

（E） $R \geq W \times \phi^{n} \times \dfrac{1-\phi^j}{\phi^j-\phi^n}$

（F） $R \leq W \times \phi^{n} \times \dfrac{1-\phi^j}{\phi^j-\phi^n}$

（G） $R \geq W \times \phi^{n-j} \times \dfrac{1-\phi}{\phi^j-\phi^n}$

（H） $R \leq W \times \phi^{n-j} \times \dfrac{1-\phi}{\phi^j-\phi^n}$

（I） $R \geq W \times \phi^{n} \times \dfrac{1-\phi}{\phi^j-\phi^n}$

（J） $R \leq W \times \phi^{n} \times \dfrac{1-\phi}{\phi^j-\phi^n}$

（K） いずれにも該当しない

（イ）一般的な積立保険の積立保険料に関する次の**（A）**～**（C）**の記述のうち、内容が<u>正しくないもの</u>をすべて選び『④』に解答しなさい。なお、いずれも正しい場合、**（D）**を選択しなさい。

【④の選択肢】

（A） 一般に、予定利率が高くなると、積立保険料は小さくなる。

（B） 一般に、予定契約消滅率が高くなると、積立保険料は大きくなる。

（C） 一般に、予定払込免除発生率が高くなると、積立保険料は大きくなる。

（３）ある保険契約の損害額 X は、確率密度関数 $f(x)=\dfrac{1}{\beta}\exp\left(-\dfrac{1}{\beta}x\right)\quad(x\geq 0),(\beta>0)$ の指数分布に従っている。この契約に対して以下２パターンの免責金額の設定を考える。

免責 A：エクセス方式の免責（免責金額 d_1）

免責 B：損害額が d_1 以下であれば保険金の支払はなく、損害額が $d_2\,(>d_1)$ を超える場合は全額が支払われる。その間の支払額は直線補間で決定される。つまり、

$$d_2\times\frac{X-d_1}{d_2-d_1}\quad(d_1<X\leq d_2)$$

となる。

このとき、次の（ア）、（イ）の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。なお、支払保険金の期待値は保険金支払いとならない事故も含んだすべての契約に対する支払保険金の期待値とする。

（ア）免責 A を適用した場合の支払保険金の期待値を $E_A(X)$、免責 B を適用した場合の支払保険金の期待値を $E_B(X)$ とするとき、

$$E_B(X)-E_A(X)=\frac{\boxed{⑤}}{\boxed{⑥}}\times\left(\boxed{⑦}-\boxed{⑧}\right)$$

となる。

【⑤～⑧の選択肢】

（A） 1	（B） d_1	（C） d_2	（D） $d_1\beta$	（E） $d_2\beta$
（F） d_1d_2	（G） d_2+d_1	（H） d_2-d_1	（I） $\dfrac{1}{d_1}$	（J） $\dfrac{1}{d_2}$
（K） β	（L） $\dfrac{1}{\beta}$	（M） $\exp\left(-\dfrac{1}{\beta}\right)$	（N） $\exp\left(-\dfrac{d_1}{\beta}\right)$	（O） $\exp\left(-\dfrac{d_2}{\beta}\right)$
（P） $\exp\left(-\dfrac{d_2}{d_1}\right)$	（Q） いずれにも該当しない			

（イ）$d_1 = 50$、$d_2 = 100$、$\beta = 100$ とする。免責 B のパターンに対して出再割合 α %の比例再保険を手配すると、正味支払保険金の期待値が免責 A と免責 B で同額となった。このとき、α に最も近いものは $\boxed{\quad ⑨ \quad}$ である。なお、必要があれば、$e^{-1} = 0.368$ を使用すること。

【⑨の選択肢】

（A） 20	（B） 21	（C） 22	（D） 23	（E） 24
（F） 25	（G） 26	（H） 27	（I） 28	（J） 29

（４）ある保険会社が販売している損害保険商品について、下表の実績データを基に 2021 年度末のＩＢＮＲ備金（＝（最終支払保険金累計予測値）－（2021 年度末支払保険金累計））を累計支払保険金によるチェインラダー法で見積もることとする。このとき、次の（ア）、（イ）の各問に答えなさい。

＜事故年度別　累計支払保険金の推移＞

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2019	3,150	4,650	5,890
2020	2,940	4,090	
2021	3,560		

ただし、全ての保険事故は年度末に起こり、その支払は事故発生時（経過年度１）、その翌年度末（経過年度２）およびその翌々年度末（経過年度３）にのみ行われる。また、累計支払保険金のロスディベロップメントファクターの予測値には、既知の対応する事故年度別ロスディベロップメントファクターを単純平均した値を用い、また、インフレ率は過去実績・将来予測とも一律で年率５％を用いることとする。

なお、計算の途中において、保険金・支払備金については全て小数点以下第１位を四捨五入して整数値を用い、ロスディベロップメントファクターについては全て小数点以下第４位を四捨五入して小数点以下第３位までの数値を用いることとする。

（ア）次の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

経過年度１→２のロスディベロップメントファクター予測値に最も近いものは $\boxed{⑩}$ である。また、2021 年度末のＩＢＮＲ備金に最も近いものは $\boxed{⑪}$ である。なお、ロスディベロップメントファクターの計算にあたっては、インフレの要素を分離した修正ロスディベロップメントを用いることとする。

【⑩の選択肢】

（Ａ）1.313　（Ｂ）1.333　（Ｃ）1.353　（Ｄ）1.373　（Ｅ）1.393
（Ｆ）1.413　（Ｇ）1.433　（Ｈ）1.453　（Ｉ）1.473　（Ｊ）1.493

【⑪の選択肢】

（Ａ）3,500　（Ｂ）3,600　（Ｃ）3,700　（Ｄ）3,800　（Ｅ）3,900
（Ｆ）4,000　（Ｇ）4,100　（Ｈ）4,200　（Ｉ）4,300　（Ｊ）4,400

（イ）次の（A）～（C）の記述のうち、内容が正しいものをすべて選び『⑫』に解答しなさい。なお、いずれも正しくない場合、（D）を選択しなさい。

【⑫の選択肢】

（A）支払備金の見積手法は個別見積法、算式見積法、統計的見積法等に区分することができ、このうち算式見積法は一定の算出式を用いて算出する方法であり、既報告未払損害の見積もりに用いられる。

（B）ボーンヒュッターファーガソン法は直近の累計支払保険金に全信頼度を置いて支払備金の推計を行うものであり、特に、実績データが少なく信頼性が小さい最近の事故年度に用いることが有効と考えられる。

（C）保険負債の評価にあたっては、決定論的アプローチと確率論的アプローチがあり、確率論的アプローチの主な手法としてマックモデル、ベイジアンメソッド、ベンクテンダー法があげられる。

（５）複合分類リスクの料率算定手法につき、次の（ア）、（イ）の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

（ア）$\boxed{⑬}$法は、複合分類リスクの構造が$\boxed{⑭}$で、複合等級リスクが互いに独立でポアソン分布に従うとき、料率係数の決定方法として最尤法を用いることができるものである。

危険標識をＡ、Ｂの２種類とし、その危険度に応じてＡの危険等級を$a_1, a_2, ..., a_k$、Ｂの危険等級を$b_1, b_2, ..., b_l$に分けるものとする。a_iとb_jとで定められる部分リスク(a_i, b_j)のエクスポージャー数をn_{ij}、相対クレームコスト指数をr_{ij}、r_{ij}の推定値を$\hat{r}_{ij}$で表す。

上記の仮定のもとで尤度関数Lは次のように表される。

$$L = \prod_{i,j} e^{-n_{ij}\hat{r}_{ij}} \frac{\left(n_{ij}\hat{r}_{ij}\right)^{n_{ij}r_{ij}}}{\left(n_{ij}r_{ij}\right)!}$$

a_i、b_jに対応する料率係数をそれぞれx_i、y_jとし、その推定値をそれぞれ$\hat{x}_i$、$\hat{y}_j$とすると、尤度関数Lを最大にする$\hat{r}_{ij}$は次の連立方程式を解くことによって求められる。

$$\frac{\partial \log L}{\partial \hat{x}_i} = 0, \ \frac{\partial \log L}{\partial \hat{y}_j} = 0$$

タリフ構造が$\boxed{⑭}$の場合、上記の連立方程式は$\boxed{⑮}$法の連立方程式と一致し、$\boxed{⑬}$法と$\boxed{⑮}$法の結果は一致する。

【⑬～⑮の選択肢】

（Ａ）Bailey-Simon　（Ｂ）Minimum Bias　（Ｃ）Jung

（Ｄ）加法型　（Ｅ）乗法型

（イ）ある保険会社の自動車保険の料率は、年齢（３５歳未満か３５歳以上）と運転目的（日常・レジャー使用か業務使用か）の２つの危険標識で複合的に区分されている。この自動車保険に関するある年度の実績統計が下表のとおりであったとする。

<エクスポージャー（E_{ij}）>

	日常・レジャー使用	業務使用	計
３５歳未満	$E_{11}=500$	$E_{12}=400$	$E_{1\bullet}=900$
３５歳以上	$E_{21}=125$	$E_{22}=200$	$E_{2\bullet}=325$
計	$E_{\bullet 1}=625$	$E_{\bullet 2}=600$	$E_{\bullet\bullet}=1,225$

<クレーム総額（C_{ij}）>

	日常・レジャー使用	業務使用	計
３５歳未満	$C_{11}=315$	$C_{12}=276$	$C_{1\bullet}=591$
３５歳以上	$C_{21}=42$	$C_{22}=102$	$C_{2\bullet}=144$
計	$C_{\bullet 1}=357$	$C_{\bullet 2}=378$	$C_{\bullet\bullet}=735$

この複合分類リスクの構造は[⑭]であるものとして、２つの危険標識それぞれについての料率係数を Minimum Bias 法により求める。なお、計算の途中において、クレームコストおよび相対クレームコスト指数は、全て小数点以下第４位を四捨五入して小数点以下第３位までの数値を用いることとする。

(a) 年齢区分「３５歳未満」、運転目的区分「業務使用」に対応する相対クレームコスト指数 r_{12} に最も近いものは[⑯]である。

【⑯の選択肢】

（A）0.75　（B）0.80　（C）0.85　（D）0.90　（E）0.95
（F）1.00　（G）1.05　（H）1.10　（I）1.15　（J）1.20

(b) 運転目的区分「日常・レジャー使用」に対応する料率係数 y_1 の値に最も近いものは[⑰]である。ただし、年齢区分「３５歳以上」に対応する料率係数 x_2 は、それに対応する実績の相対クレームコスト指数に等しいものとする。

【⑰の選択肢】

（A）0.910　（B）0.930　（C）0.950　（D）0.970　（E）0.990
（F）1.010　（G）1.030　（H）1.050　（I）1.070　（J）1.090

問題２． 次の（１）～（５）の各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選びなさい。
なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

（１）、（３）、（４）、（５）：各６点　（２）：５点　（計２９点）

（１）N 保険年度の保険商品（保険期間１年）の予定料率構成割合は下表のとおりであり、年間営業保険料は 300 であった。

予定損害率	55%
予定新契約費率	15%
予定維持費率	10%
予定代理店手数料率	15%
予定利潤率	5%

また、この商品の保険期間５年の長期一時払契約の営業保険料は、以下を前提に算出しているものとする。

＜前提＞

・純保険料および維持費は毎年同額としている。
・新契約費は契約初年度のみ支出され、維持費は全ての保険年度において支出される。
・予定代理店手数料率（対営業保険料）および予定利潤率（対営業保険料）は、保険期間１年における予定代理店手数料率および予定利潤率を用いる。
・予定利率は 1%であり、各保険年度の支出は各保険年度初に全て支払われる。

N 保険年度の予定料率に対する実績は、全て予定通り支出されているものとするとき、次の（ア）、（イ）の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

（ア）N＋１保険年度以降、以下の上昇トレンドが生じた場合、N 保険年度の長期一時払契約の営業保険料（上昇トレンドを考慮しない営業保険料）の実際の利潤率に最も近いものは $\boxed{\quad ① \quad}$ である。なお、N＋１保険年度以降もクレーム単価の変動はないものとする。

＜上昇トレンド＞

・クレーム頻度：対前年度比で毎年度 4%ずつ上昇（N＋１保険年度のクレーム頻度は、N 保険年度のクレーム頻度の 1.04 倍。N＋２年度以降も同様。）
・発生経費　　：対前年度比で毎年度 2%ずつ上昇（N＋１保険年度の発生経費は、N 保険年度の発生経費の 1.02 倍。N＋２保険年度以降も同様。）

【①の選択肢】

（A） －1.2%　**（B）** －0.8%　**（C）** －0.4%　**（D）** 0%　**（E）** 0.4%
（F） 0.8%　**（G）** 1.2%　**（H）** 1.6%　**（I）** 2.0%　**（J）** 2.4%

（イ）この保険会社は保険期間 1 年と保険期間 5 年の商品のみを販売しており、保険期間 1 年と保険期間 5 年の契約件数の比は 4：1 であるものとする。N 保険年度において、長期一時払契約の営業保険料を（ア）の上昇トレンドを考慮して算出する場合、この保険会社の N 保険年度の営業保険料全体に占める純保険料の割合に最も近いものは $\boxed{\quad ② \quad}$ である。なお、保険期間 1 年の営業保険料は見直さないものとする。

【②の選択肢】

（A）57.5%　（B）58.0%　（C）58.5%　（D）59.0%　（E）59.5%
（F）60.0%　（G）60.5%　（H）61.0%　（I）61.5%　（J）62.0%

（２）ある保険商品１契約の年間クレーム件数は平均$\frac{1}{\lambda}$ $(\lambda > 0)$のポアソン分布に従っており、個々のクレーム額の分布は下表のとおりであることがわかっている。この保険商品を400λ件引受けている元受保険会社が、出再割合が$100(1-\alpha)$%の比例再保険を特約再保険として手配し、さらに１契約あたりの保有部分に対してエクセスポイント4α、カバーリミット3αの超過損害額再保険を手配することとした。次の（ア）、（イ）の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

クレーム額	確率
3	0.4
6	0.3
8	0.2
9	0.1

（ア）年間元受支払保険金総額Sの変動係数$CV(S)\left(=\frac{\sqrt{V(S)}}{E(S)}\right)$に最も近いものは$\boxed{\quad ③ \quad}$である。

【③の選択肢】

（A）0.040　（B）0.042　（C）0.044　（D）0.046　（E）0.048
（F）0.050　（G）0.052　（H）0.054　（I）0.056　（J）0.058

（イ）再保険適用後の年間正味支払保険金総額Tの変動係数$CV(T)$に最も近いものは$\boxed{\quad ④ \quad}$である。

【④の選択肢】

（A）0.040　（B）0.042　（C）0.044　（D）0.046　（E）0.048
（F）0.050　（G）0.052　（H）0.054　（I）0.056　（J）0.058

（3）次の（ア）、（イ）の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

（ア）クレーム件数 N は確率分布 $p(n)=p(1-p)^n$ （$n=0,1,2\cdots$），$(0<p<1)$ に従うものとし、個々のクレーム額 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ がそれぞれ平均 μ $(\mu>0)$ の指数分布に従うようなクレーム総額モデル $S=X_1+X_2+\cdots+X_N$ を考える。

クレーム総額 S の積率母関数は、$M_S(t)=\dfrac{\boxed{⑤}}{\boxed{⑥}}$

クレーム総額 S の分布関数は、$F_S(x)=\boxed{⑦}$

となる。

【⑤、⑥の選択肢】

（A）1　（B）p　（C）$1-p$　（D）$p(1-p)$
（E）$1-\mu t$　（F）$p(1-\mu t)$　（G）$(1-p)(1-\mu t)$　（H）$p(\mu-t)$
（I）$p\mu-t$　（J）$p-\mu t$　（K）いずれにも該当しない

【⑦の選択肢】

（A）$e^{-\frac{p}{\mu}x}$　（B）$pe^{-\frac{p}{\mu}x}$　（C）$(1-p)e^{-\frac{p}{\mu}x}$
（D）$1-e^{-\frac{p}{\mu}x}$　（E）$1-pe^{-\frac{p}{\mu}x}$　（F）$1-(1-p)e^{-\frac{p}{\mu}x}$
（G）$p\left(1-e^{-\frac{p}{\mu}x}\right)$　（H）$(1-p)\left(1-e^{-\frac{p}{\mu}x}\right)$　（I）$1-p\left(1-e^{-\frac{p}{\mu}x}\right)$
（J）$1-(1-p)\left(1-e^{-\frac{p}{\mu}x}\right)$　（K）いずれにも該当しない

（イ）以下の Lundberg モデルについて、破産確率を算出することを考える。

・初期サープラス　　　　　　　：u_0
・時刻tのサープラス　　　　　　：U_t
・クレーム件数過程のパラメータ　：λ
・個々のクレーム額X　　　　　：平均μの指数分布に従う
・個々のクレーム額の分布関数　　：$F_X(x)$
・安全割増率　　　　　　　　　：θ

(a) 初期サープラスu_0ときの破産確率$\varepsilon(u_0)$を求めるため、以下の確率変数Lを定義する。

L_1：u_0と、U_tが初めてu_0を下回った時（T_1）のサープラスU_{T_1}との差
L_2：U_{T_1}と、U_tが初めてU_{T_1}を下回った時（T_2）のサープラスU_{T_2}との差

以下同様に$L_3, L_4, \cdots$を定義すると、L_nは、n回目にU_tの「最低記録」を更新した時（時刻T_n）における「記録の更新幅」を表すことから、$L = L_1 + L_2 + \cdots$とすると、破産とはLがu_0を超えることを意味する。

(b) ここで、「最低記録」の更新が起きる回数Kについて、$K = k$となる確率$p(k)$を考える。

・「最低記録」が更新される確率は、初期サープラス$u_0 = 0$で破産する確率と同じである。

・初期サープラス$u_0 = 0$のときの破産確率は、$\boxed{⑧}$である。

・「最低記録」の更新が起きる回数Kの確率は、$p(k) = \boxed{⑨} \cdot \left(\boxed{⑩}\right)^k$と表される。

(c) 一方、初期サープラス$u_0 = 0$で破産が発生した時の欠損額について、「記録の更新幅」L_nの確率分布は欠損額Yの確率分布に等しく、その分布関数は、
$F_Y(y) = \dfrac{1}{\mu}\int_0^y \{1 - F_X(x)\} dx$で表される。

(d) (a)～(c)より、Lは「最低記録」の更新が起きる回数と「記録の更新幅」との複合分布に従う。

ここで、各パラメータの値が$\mu = 10$、$u_0 = 75$、$\theta = 25\%$であることが分かっているとき、破産確率$\varepsilon(u_0)$に最も近いものは$\boxed{⑪}$となる。（必要があれば、$e = 2.718$を使用してよい。）

【⑧～⑩の選択肢】

（Ａ）θ　（Ｂ）$1+\theta$　（Ｃ）$1-\theta$　（Ｄ）$\dfrac{1}{\theta}$　（Ｅ）$\dfrac{1}{1+\theta}$

（Ｆ）$\dfrac{\theta}{1+\theta}$　（Ｇ）$\dfrac{1-\theta}{1+\theta}$　（Ｈ）$\dfrac{1}{1-\theta}$　（Ｉ）$\dfrac{\theta}{1-\theta}$　（Ｊ）$\dfrac{1+\theta}{1-\theta}$

（Ｋ）いずれにも該当しない

【⑪の選択肢】

（Ａ）12%　（Ｂ）14%　（Ｃ）16%　（Ｄ）18%　（Ｅ）20%

（Ｆ）22%　（Ｇ）24%　（Ｈ）26%　（Ｉ）28%　（Ｊ）30%

（4）ある保険商品の年間支払保険金 X の分布関数は次のとおり表される。

$$F_X(x) = 1-(1-x)^{\alpha} \quad (0 \le x \le 1),\ (\alpha > 0)$$

このとき、次の（ア）、（イ）の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。なお、必要があれば $\log 2 = 0.693$、$\log 3 = 1.099$、$\log 5 = 1.609$ を使用すること

（ア）$\alpha = 0.5$ のとき、この保険商品の年間支払保険金 X の 90%VaR の値に最も近いものは $\boxed{⑫}$ となり、90%$TVaR$ の値に最も近いものは $\boxed{⑬}$ となる。

【⑫、⑬の選択肢】

（A）0.972　（B）0.975　（C）0.978　（D）0.981　（E）0.984
（F）0.987　（G）0.990　（H）0.993　（I）0.996　（J）0.999

（イ）この保険商品を n 年間販売したときの毎年の年間支払保険金 $X_1, X_2, \cdots, X_n$（互いに独立）について、最大支払保険金 $M_n = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ を考える。このとき、$Z_n = (M_n - d_n)/c_n$、$c_n = n^{-1/\alpha}$、$d_n = 1$ とすると、Z_n の分布関数 $F_{Z_n}(x)$ は次のとおり法則収束する。

$$F_{Z_n}(x) \xrightarrow{n\to\infty} \left(\boxed{⑭}\right)^{-\left(\boxed{⑮}\right)^{\boxed{⑯}}} \quad (x \le 0)$$

また、$\alpha = 1$, $n = 100$ のとき、上記の近似分布を用いて最大支払保険金 M_n を計算すると、M_n の 90%VaR の値に最も近いものは $1-\boxed{⑰}$ となる。

【⑭～⑯の選択肢】

（A）α　（B）$-\alpha$　（C）$1/\alpha$　（D）$-1/\alpha$　（E）x
（F）$-x$　（G）$1-x$　（H）e　（I）$-e$
（J）いずれにも該当しない

【⑰の選択肢】

（A）0.00090　（B）0.00092　（C）0.00094　（D）0.00096　（E）0.00098
（F）0.00100　（G）0.00102　（H）0.00104　（I）0.00106　（J）0.00108

（５）商品Ａの年間支払保険金Ｘと商品Ｂの年間支払保険金Ｙについて、以下のとおり過去７年の支払額のデータがわかっているものとする。

事業年度	1	2	3	4	5	6	7
X	11	14	10	20	17	15	13
Y	100	150	250	900	1,000	180	500

このとき、次の（ア）、（イ）の各問に答えなさい。

（ア）次の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

過去７年の支払額のデータから求めたＸとＹのケンドールの τ の値に最も近いものは ⑱ 、スピアマンの ρ の値に最も近いものは ⑲ である。

また、パラメータ α $(\alpha > 0)$ のクレイトン・コピュラ $C(u_1, u_2) = \left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1\right)^{-1/\alpha}$ のケンドールの τ が ⑱ と一致するとき、α の値に最も近いものは ⑳ である

【⑱、⑲の選択肢】

（Ａ）0.189　**（Ｂ）**0.237　**（Ｃ）**0.285　**（Ｄ）**0.333　**（Ｅ）**0.381
（Ｆ）0.429　**（Ｇ）**0.477　**（Ｈ）**0.525　**（Ｉ）**0.573　**（Ｊ）**0.621

【⑳の選択肢】

（Ａ）0.5　**（Ｂ）**1.0　**（Ｃ）**1.5　**（Ｄ）**2.0　**（Ｅ）**2.5
（Ｆ）3.0　**（Ｇ）**3.5　**（Ｈ）**4.0　**（Ｉ）**4.5　**（Ｊ）**5.0

（イ）次の**（Ａ）**～**（Ｃ）**の記述のうち、内容が<u>正しいもの</u>をすべて選び『㉑』に解答しなさい。なお、いずれも正しくない場合、**（Ｄ）**を選択しなさい。

【㉑の選択肢】

（Ａ）ピアソンの積率相関係数、ケンドールの τ 、スピアマンの ρ のうち、周辺分布に依存するのはピアソンの積率相関係数のみである。

（Ｂ）確率変数 X, Y が互いに独立の時は、 X, Y のピアソンの積率相関係数、ケンドールの τ 、スピアマンの ρ のいずれも０となる。

（Ｃ）確率変数 X, Y のピアソンの積率相関係数が０であったとしても、X, Y が独立とは限らない。 X, Y のケンドールの τ が０の場合や、スピアマンの ρ が０の場合も同様に、X, Y が独立とは限らない。

問題３． 次の（１）～（５）の各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選びなさい。
なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

（１）～（４）:各１０点　（５）: １１点　（計５１点）

（１）ある保険商品は、保険期間１年契約のみを販売している。この保険商品は過去の事故歴に応じた割引体系を導入しており、前契約も前々契約も無事故だった場合、基準となる保険料から３０％の割引が適用される。また、保険期間中の事故率は契約者によらず、一律２０％であるものとする。このとき、次の（ア）～（ウ）の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

（ア）この保険商品の加入者は全体で 10,000 人であるとし、割引制度導入から十分な期間が経過して定常状態となっており、割引適用者数の毎年の変動はないものとする。このとき、３０％の割引が適用される契約者の人数に最も近いものは $\boxed{\quad ① \quad}$ である。なお、この保険商品へ新規加入する契約者、継続しない契約者はいないものとする。

【①の選択肢】

（Ａ） 1,600	**（Ｂ）** 2,500	**（Ｃ）** 3,600	**（Ｄ）** 4,900	**（Ｅ）** 5,400
（Ｆ） 6,400	**（Ｇ）** 7,200	**（Ｈ）** 7,500	**（Ｉ）** 8,100	**（Ｊ）** 9,000

この保険商品につき、新規加入する契約者や継続しない契約者がいる場合を考える。新規加入者は毎年 600 人とする。また、３０％の割引を適用した契約者が事故を起こした場合は、２０％の確率で保険期間終了後にこの保険商品を継続しないものとし、それ以外の契約者は２．５％の確率で保険期間終了後にこの保険商品を継続しないものとする。

（イ）この制度が割引制度導入から十分な期間が経過して定常状態となっており、割引適用者数の毎年の変動はないものとすると、３０％の割引が適用される契約者の人数に最も近いものは
$\boxed{\quad ② \quad}$ である。

【②の選択肢】

（Ａ） 1,500	**（Ｂ）** 3,200	**（Ｃ）** 4,700	**（Ｄ）** 5,400	**（Ｅ）** 6,400
（Ｆ） 7,100	**（Ｇ）** 7,900	**（Ｈ）** 9,100	**（Ｉ）** 12,300	**（Ｊ）** 14,200

（ウ）新規加入する契約者や継続しない契約者がいる場合といない場合の、基準となる保険料（割引適用前の保険料）の差について考える。全加入者の平均保険料はどちらの場合（新規加入する契約者や継続しない契約者がいる場合は新規加入者 600 人を含めた平均保険料で考える。）も同額になるものとすると、新規加入する契約者や継続しない契約者がいる場合の基準となる保険料は、いない場合と比べて $\boxed{\quad ③ \quad}$。

【③の選択肢】

（A）1%低い	（B）2%低い	（C）3%低い	（D）4%低い	（E）5%低い
（F）1%高い	（G）2%高い	（H）3%高い	（I）4%高い	（J）5%高い

（2）契約者の各年のクレーム総額 X_i は、あるパラメータ $\Theta=\theta$ の下で独立であり、同一の確率密度関数 $f_{X_i|\Theta}(x_i|\theta)$ に従うとする。また、パラメータ θ は契約者ごとにばらつきがあり、確率変数 Θ の実現値であるとし、契約者単位の時系列で観察した場合、同一の契約者の Θ は同一であるが、その他のパラメータは年度によらず、全契約者に共通するものとする。

n 年間のクレーム総額実績 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ および契約者の全体的傾向 $\pi(\theta)$ から、ベイズ方法論を用いて $n+1$ 年目のクレーム総額 X_{n+1} を推定することを考える。

このとき、次の（ア）、（イ）の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

（ア）ベイズ方法論では、ベイズの定理により Θ の事後分布 $\pi_{\Theta|X}(\theta|x)$ を求め、推定に活用する。

$X=x$ の条件の下、Θ を $g(x)$ によって推定することを考えると、Θ と $g(x)$ の二乗誤差は以下のように分解できるから、二乗誤差を最小化する推定量 $g(x)$ は $\boxed{④}$ であることがわかる。

$$E[(\Theta-g(x))^2|x]=(g(x)-(\boxed{④}))^2+\boxed{⑤}$$

【④、⑤の選択肢】

（A） $E[\Theta|x]$　（B） $E[\Theta^2|x]$　（C） $V[\Theta|x]$

（D） $E[\Theta|x]^2$　（E） $\sqrt{V[\Theta|x]}$　（F） $E[\Theta^2|x]+E[\Theta|x]^2$

（G） $E[\Theta^2|x]+V[\Theta|x]$　（H） $V[\Theta|x]-E[\Theta|x]^2$　（I） $E[\Theta|x]+\sqrt{V[\Theta|x]}$

（J）いずれにも該当しない

（イ）契約者の各年のクレーム総額 X_i は、平均 Θ、分散 b の正規分布に従い、Θ 自身も平均 μ、分散 a の正規分布に従うものと仮定する。

ここで $a=150$, $b=200$, $\mu=300$ のとき、ある契約者 A の 2 年間のクレーム総額実績が $x=(x_1,x_2)=(200,300)$ という条件の下で、3 年目のクレーム総額をベイズ方法論により推定する。このとき、契約者 A の各年のクレーム総額についての事後分布の分散の値に最も近いものは $\boxed{⑥}$ であり、契約者 A の 3 年目のクレーム総額の推定値に最も近いものは $\boxed{⑦}$ となる。

なお、本問においては、クレーム総額は負の値を取りうるものとする。

【⑥の選択肢】

（A）10　（B）20　（C）30　（D）40　（E）50

（F）60　（G）70　（H）80　（I）90　（J）100

【⑦の選択肢】

（A）230　（B）235　（C）240　（D）245　（E）250

（F）255　（G）260　（H）265　（I）270　（J）275

（３）正の定数h、連続な確率変数S、ならびにその確率密度関数$f_S(s)$を用いて

$f^Q{}_S(s)=\dfrac{e^{hs}}{E\left[e^{hS}\right]}f_S(s)$を定義する。このとき、$f^Q{}_S(s)$の期待値$\pi\left(S\right)=E^Q\left(S\right)$はリスクプレミアム反映後の$S$に対する保険料と考えることが出来る。これは、保険料算出原理におけるエッシャー原理に該当するものであり、上記で定義した$f_S(s)$から$f^Q{}_S(s)$への確率分布の変換をエッシャー変換と呼ぶ。

このとき、次の（ア）、（イ）の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

（ア）Sが平均μ、分散σ^2の正規分布に従うとき、$f^Q{}_S(s)$を考える。このとき$f^Q{}_S(s)$は、

平均$\boxed{\quad ⑧ \quad}$、分散$\boxed{\quad ⑨ \quad}$の正規分布の確率密度関数である。

【⑧、⑨選択肢】

（A）μ	（B）$\mu+h\sigma$	（C）$\mu+h\sigma^2$	（D）σ^2	（E）$h\sigma^2$
（F）$(1+h)\sigma^2$	（G）$h(\mu+\sigma^2)$	（H）μh	（I）$\mu h+\sigma^2$	（J）$h\sigma$
（K）いずれにも該当しない				

（イ）Zは標準正規分布$N(0,1)$に従う確率変数とし、$\Phi\left(z\right)=P(Z\leq z)$を定義する。

またA、Kを正の実数（定数）とし、クレーム額$Y=\max(Ae^{hZ-\frac{h^2}{2}}-K,0)$を定義する。

このときYの期待値$E[Y]$を考えるため、以下の指示関数を導入する。

$$1_E=\begin{cases}1\cdots\text{事象}E\text{に該当する場合}\\0\cdots\text{事象}E\text{に該当しない場合}\end{cases}$$

すると、$E[Y]=E[\max(Ae^{hZ-\frac{1}{2}h^2}-K,0)]$

$$=E[(Ae^{hZ-\frac{1}{2}h^2}-K)1_{Ae^{hZ-\frac{1}{2}h^2}-K>0}]$$

$$=AE[e^{hZ-\frac{1}{2}h^2}1_{Ae^{hZ-\frac{1}{2}h^2}-K>0}]-KE[1_{Ae^{hZ-\frac{1}{2}h^2}-K>0}]$$

と変形することが出来る。

ここで、第一項の $AE[e^{hZ-\frac{1}{2}h^2}1_{Ae^{hZ-\frac{1}{2}h^2}-K>0}]$ については、エッシャー変換の考え方を利用すると、$A\times$ ⑩ と変形することができる。

上記を利用して計算を進めると、
$E[Y]=A\Phi[$ ⑪ $+$ ⑫ $]-K\Phi[$ ⑬ $+$ ⑭ $]$ と求めることが出来る。

【⑩の選択肢】

（A） $E[1_{Ae^{h(Z+h)-\frac{1}{2}h^2}-K>0}]$　（B） $E[1_{Ae^{h(Z-h)-\frac{1}{2}h^2}-K>0}]$　（C） $E[1_{Ae^{hZ-\frac{1}{2}h^2}-K>0}]$
（D）いずれにも該当しない

【⑪、⑬の選択肢】

（A） $\frac{1}{K}\log(\frac{h}{A})$　（B） $\frac{h}{K}\log(\frac{A}{K})$　（C） $\frac{1}{h}\log(\frac{A}{K})$　（D） $h^2\log(\frac{A}{K})$　（E） $\log(A)$
（F） $\frac{A}{h}\log(\frac{A}{K})$　（G） $\frac{1}{h^2}\log(\frac{A}{K})$　（H） $\log(\frac{A}{K})$　（I） $K\log(\frac{h}{A})$　（J） $\log(h)$
（K）いずれにも該当しない

【⑫、⑭の選択肢】

（A） h　（B） h^2　（C） $\frac{1}{2}h$　（D） $\frac{1}{2}h^2$　（E） $2h$
（F） $-h$　（G） $-h^2$　（H） $-\frac{1}{2}h$　（I） $-\frac{1}{2}h^2$　（J） $-2h$
（K）いずれにも該当しない

（４）次の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

期間$[0,t]$において発生するクレーム件数をN_tとする。クレーム件数過程$\{N_t\}$はマルコフ過程に従い$p_{n,n+k}(t,s)=P(N_s=n+k \mid N_t=n) \quad (k\geq 0, s>t)$、$\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=0$として、次の条件１～３を満たす。

条件１：任意の時刻$t_n<\cdots<t_1<t$および任意のクレーム件数$x_{t_n},\cdots,x_{t_1}$に対して

$$P(N_t\leq x \mid N_{t_n}=x_{t_n},\cdots,N_{t_1}=x_{t_1})=P(N_t\leq x \mid N_{t_1}=x_{t_1})$$ を満たす。

条件２：$p_{n,n+1}(t,t+h)=h\lambda_{n+1}(t)+o(h) \qquad (n=0,1,2,\cdots)$

ただし、$\lambda_n(t)(n=1,2,\cdots)$は時刻$t$における$n$件目のクレーム発生率密度である。

条件３：$\sum_{k=2}^{\infty}p_{n,n+k}(t,t+h)=o(h) \qquad (n=0,1,2,\cdots)$

このとき、$p_{n,n+k}(t,s)$を求めたい。

条件２、条件３を用いると、

条件４：$p_{n,n}(t,t+h)=1-\sum_{k=1}^{\infty}p_{n,n+k}(t,t+h)=1-h\lambda_{n+1}(t)+o(h)$

が導かれる。

$p_{n,n+k}(t,s+h)$となる確率は、次の確率の和である。

（ア）$(s,s+h]$でクレームが発生しない確率

（イ）$(s,s+h]$でクレームが１件発生する確率

（ウ）$(s,s+h]$でクレームが２件以上発生する確率

ただし、$k=0$の場合は（ア）のみ、$k=1$の場合は（ア）と（イ）の和である。

（ア）は、$\boxed{⑮}\times\left(1-\boxed{⑯}+o(h)\right)$

（イ）は、$\boxed{⑰}\times\left(\boxed{⑱}+o(h)\right)$

（ウ）は、$o(h)$

となるので、

$$p_{n,n+k}(t,s+h)=\boxed{⑮}\times\left(1-\boxed{⑯}+o(h)\right)+\boxed{⑰}\times\left(\boxed{⑱}+o(h)\right)+o(h)$$

と表される。

ここで$h\to 0$とすると$p_{n,n+k}(t,s+h)$は次の微分方程式を満たすことがわかる（$k=0$の場合は第一項のみ。）。

$$\frac{\partial}{\partial s}p_{n,n+k}(t,s)=-\boxed{⑲}+\boxed{⑳}$$

この微分方程式を解くことで、$p_{n,n+k}(t,s)$が得られる。

【⑮、⑰の選択肢】

（A） $p_{n,n+k-1}(t,s)$　（B） $p_{n,n+k}(t,s)$　（C） $p_{n,n+k+1}(t,s)$

（D） $p_{n+k-1,n+k}(t,s)$　（E） $p_{n+k,n+k}(t,s)$　（F） $p_{n+k,n+k+1}(t,s)$

（G） $p_{n+k-1,n+k}(s,s+h)$　（H） $p_{n+k,n+k}(s,s+h)$　（I） $p_{n+k,n+k+1}(s,s+h)$

（J）いずれにも該当しない

【⑯、⑱の選択肢】

（A） $\lambda_{n+k-1}(s)$　（B） $h\lambda_{n+k-1}(s)$　（C） $\lambda_{n+k-1}(s+h)$

（D） $\lambda_{n+k}(s)$　（E） $h\lambda_{n+k}(s)$　（F） $\lambda_{n+k}(s+h)$

（G） $\lambda_{n+k+1}(s)$　（H） $h\lambda_{n+k+1}(s)$　（I） $\lambda_{n+k+1}(s+h)$

（J）いずれにも該当しない

【⑲、⑳の選択肢】

（A） $\lambda_{n+k-1}(s)\,p_{n,n+k-1}(t,s)$　（B） $\lambda_{n+k}(s)\,p_{n,n+k-1}(t,s)$　（C） $\lambda_{n+k+1}(s)\,p_{n,n+k-1}(t,s)$

（D） $\lambda_{n+k-1}(s)\,p_{n,n+k}(t,s)$　（E） $\lambda_{n+k}(s)\,p_{n,n+k}(t,s)$　（F） $\lambda_{n+k+1}(s)\,p_{n,n+k}(t,s)$

（G） $\lambda_{n+k-1}(s)\,p_{n,n+k+1}(t,s)$　（H） $\lambda_{n+k}(s)\,p_{n,n+k+1}(t,s)$　（I） $\lambda_{n+k+1}(s)\,p_{n,n+k+1}(t,s)$

（J）いずれにも該当しない

（5）ある保険会社の保有する損害保険契約の損害率を考える。時刻 t $(0 \le t \le T)$ における損害率は、標準ブラウン運動 $\{W_t\}$ に従うものと仮定する。

なお、標準ブラウン運動 $\{W_t\}$ は以下の性質を満たす。$0 < s < t$ として、

・$W_0 = 0$

・$W_t - W_s$ は平均 0、分散 $t-s$ の正規分布に従う

・W_s と $W_t - W_s$ は互いに独立

$\{W_t\}$ の $(0 \le t \le T)$ における最大値を確率変数 $M_T = \max_{0 \le t \le T}\{W_t\}$ と定義するとき、次の（ア）、（イ）の各問に答えなさい。なお、本問においては、損害率は負の値を取りうるものとする。

（ア）次の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

(a) $\{W_t\}$ がある閾値 a $(a > 0)$ に初めて到達する時刻を τ_a、すなわち、$\tau_a = \min\{t \mid W_t \ge a\}$ とするとき、τ_a の確率密度関数は $f_{\tau_a}(t) = \boxed{\quad ㉑ \quad} \times \exp\left(- \boxed{\quad ㉒ \quad}\right)$ と表すことができる。

ヒント：$\tilde{W}_t = \begin{cases} W_t & (t \le \tau_a) \\ 2a - W_t & (t > \tau_a) \end{cases}$ と定義すると、$\{\tilde{W}_t\}$ は標準ブラウン運動となる。

このことを踏まえると、$P(\tau_a < t, W_t < w) = P(W_t > 2a - w)$ が成立する。

(b) M_T に以下のような再保険契約を付すことを考える。

・M_T がある閾値 a 以上の場合、M_T の実現値×「一定額」を再保険会社は支払う。

・M_T がある閾値 a に到達しない場合、支払はない。

ここで、$f_{M_T}(x)$ を M_T の確率密度関数と定義し、$a = 2$、$T = 1$、「一定額」$=1$ とする。このとき、$P = \int_a^\infty x \times f_{M_T}(x)dx$ の値に最も近いものは $\boxed{\quad ㉓ \quad}$ である。ただし、必要であれば $\pi = 3.142$、$e = 2.718$ を用いること。

【㉑、㉒の選択肢】

（A）$\dfrac{2a\pi}{\sqrt{t}}$　（B）$\dfrac{2a^2}{t}$　（C）$\dfrac{a}{2t}$　（D）$\dfrac{a^2}{2t}$　（E）$\dfrac{2a}{\sqrt{t}}$

（F）$\dfrac{a}{\sqrt{2t}}$　（G）$\dfrac{t}{\sqrt{2\pi a^3}}$　（H）$\dfrac{a}{\sqrt{2\pi t^3}}$　（I）$\dfrac{at}{\sqrt{2\pi t}}$　（J）$\dfrac{a^2}{2\pi t}$

（K）いずれにも該当しない

【㉓の選択肢】

（A）0.100　（B）0.101　（C）0.102　（D）0.103　（E）0.104

（F）0.105　（G）0.106　（H）0.107　（I）0.108　（J）0.109

（ウ）比例再保険およびストップロス再保険のように、「再保険者の責任額が保険会社の年間の支払保険金総額から直接的に算出される」関数型の再保険方式を考える。このとき、次の**（A）**～**（C）**の記述のうち、内容が<u>正しくないもの</u>をすべて選び『㉔』に解答しなさい。なお、いずれも正しい場合、**（D）**を選択しなさい。

【㉔の選択肢】

（A） 関数型の再保険において再保険者の支払責任は、元受保険金が少数の大クレームから成り立っているか、または、多数の小クレームから成り立っているかどうかに影響される。

（B） 任意の関数型ではない再保険処理に対して、再保険料は同一であるが、保有保険金、再保険金とも分散が小さくなる関数型の再保険処理が常に存在する。

（C） 支払保険金総額が複合ポアソン分布に従うとき、ELC 再保険を付した時の保有分に係る調整係数は、この ELC 再保険と同じ再保険付加率及び同じネット再保険料を持つ任意の関数型再保険を付した時の保有分に係る調整係数よりも大きい。

以上

損保数理（解答例）

問題１

（１）

<u>**①（Ｄ）（Ｆ）　②（Ｃ）**</u>　　［①２点　②２点］

テキスト 7-6 のとおり。

（２）

（ア）③（**B**）　（イ）④（**B**）　［（ア）２点　（イ）２点］

（ア）

第t保険年度末の払戻積立金は、

$${}_tV=(W\times\phi^{n-t}+R\times\phi^{j-t})\times\frac{1-\phi^t}{1-\phi^n}\qquad t<j$$

$${}_tV=(W\times\phi^{n-t}+R\times\phi^{j-t})\times\frac{1-\phi^t}{1-\phi^n}-R\times\phi^{j-t}\qquad t\geq j$$

${}_tV$ は、$t=j$ のときに最小になるので、そのときに負にならなければよい。よって、

$${}_jV=(W\times\phi^{n-j}+R\times\phi^{j-j})\times\frac{1-\phi^j}{1-\phi^n}-R\times\phi^{j-j}\geq 0$$

$$R\times\left(1-\frac{1-\phi^j}{1-\phi^n}\right)\leq W\times\phi^{n-j}\times\frac{1-\phi^j}{1-\phi^n}$$

$$R\times\left(\frac{\phi^j-\phi^n}{1-\phi^n}\right)\leq W\times\phi^{n-j}\times\frac{1-\phi^j}{1-\phi^n}$$

$R\leq W\times\phi^{n-j}\times\dfrac{1-\phi^j}{\phi^j-\phi^n}$ より、正しい選択肢は<u>**（B）**</u>である。

（イ）以下のとおり。

（A）正しい

（B）予定契約消滅率は<u>積立保険料の割引要素</u>となる。(テキスト 6-4)

（C）正しい

（3）

（ア）⑤（**D**）⑥（**H**）⑦（**N**）⑧（**O**）（⑤～⑧は完答）　（イ）⑨（**I**）

［（ア）２点　（イ）２点］

（ア）

$$E_A(X)=\int_{d_1}^{\infty}(x-d_1)\beta^{-1}e^{-\frac{1}{\beta}x}dx=\beta e^{-\frac{d_1}{\beta}}$$

$$E_B(X)=\int_{d_1}^{d_2}d_2\frac{x-d_1}{d_2-d_1}\beta^{-1}e^{-\frac{1}{\beta}x}dx+\int_{d_2}^{\infty}x\beta^{-1}e^{-\frac{1}{\beta}x}dx=\frac{d_2\beta}{d_2-d_1}\left(e^{-\frac{d_1}{\beta}}-e^{-\frac{d_2}{\beta}}\right)+\beta e^{-\frac{d_2}{\beta}}$$

より、$E_B(X)-E_A(X)=\dfrac{d_1\beta}{d_2-d_1}\left(e^{-\frac{d_1}{\beta}}-e^{-\frac{d_2}{\beta}}\right)$

（イ）

$$\alpha E_B(X)=E_B(X)-E_A(X)$$

に $d_1=50$、$d_2=100$、$\beta=100$ を代入すると

$$\alpha=\frac{1-e^{-\frac{1}{2}}}{2-e^{-\frac{1}{2}}}=0.28$$

（４）

（ア）⑩（Ｆ）⑪（Ｆ）　（イ）⑫（Ｄ）　［（ア）⑩１点　⑪１点　（イ）２点］

（ア）

単年度（インフレ調整前）

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2019	3,150	1,500	1,240
2020	2,940	1,150	
2021	3,560		

単年度（インフレ調整後。基準は 2021 年度。）

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2019	3,473	1,575	1,240
2020	3,087	1,150	
2021	3,560		

累計（インフレ調整後。基準は 2021 年度。）

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2019	3,473	5,048	6,288
2020	3,087	4,237	
2021	3,560		

ロスディベロップメントファクター

事故年度	経過年度	
	1→2	2→3
2019	1.453	1.246
2020	1.373	1.246
2021	1.413	1.246

累計（インフレ調整後。基準は 2021 年度。）

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2019	3,473	5,048	6,288
2020	3,087	4,237	5,279
2021	3,560	5,030	6,267

単年度（インフレ調整後。基準は 2021 年度。）

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2019	3,473	1,575	1,240
2020	3,087	1,150	1,042

2021	3, 560	1, 470	1, 237

単年度（インフレ調整前）

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2019	3, 150	1, 500	1, 240
2020	2, 940	1, 150	1, 094
2021	3, 560	1, 544	1, 364

よって、ＩＢＮＲ備金 ＝ 1, 094 ＋ 1, 544 ＋ 1, 364 ＝ 4, 002

（イ）

（Ａ） 算式見積法は既発生未報告損害の見積もりに用いる。(テキスト 5-4)

（Ｂ） 直近の累計支払保険金に全信頼度を置くのはチェインラダー法である。(テキスト 5-23)

（Ｃ） ベンクテンダー法は決定論的アプローチである。(テキスト 5-24)

（５）

<u>（ア）⑬（**Ｃ**）⑭（**Ｅ**）⑮（**Ｂ**）（⑬～⑮は完答）　（イ）⑯（**Ｉ**）⑰（**Ａ**）</u>

［（ア）１点　（イ）⑯１点　⑰２点］

（１）テキスト 4-13 のとおり。

（２）

(a)

各リスク区分ごとのクレームコスト $R_{ij} = \dfrac{C_{ij}}{E_y}$ および相対クレームコスト指数 $r_y = \dfrac{R_{ij}}{R_{\square\square}}$ を実績データから計算すると、以下のとおりとなる。

＜クレームコスト（R_{ij}）＞

	日常・レジャー使用	業務使用	計
３５歳未満	0.630	0.690	0.657
３５歳以上	0.336	0.510	0.443
計	0.571	0.630	0.600

＜相対クレームコスト指数（r_y）＞

	日常・レジャー使用	業務使用	計
３５歳未満	1.050	1.150	1.095
３５歳以上	0.560	0.850	0.738
計	0.952	1.050	1.000

よって $r_{12} = 1.15$

(b)

Minimum Bias 法により、(a) で求めた相対クレームコスト指数 r_{ij} から相対クレームコスト指数の推定値 $\hat{r}_{ij}$ を求めることを考える。このとき、Minimum Bias 法における満たすべき条件は、次の連立方程式のようになる。

$$E_{11} \cdot \left(r_{11} - \hat{r}_{11}\right) + E_{12} \cdot \left(r_{12} - \hat{r}_{12}\right) = 0$$
$$E_{21} \cdot \left(r_{21} - \hat{r}_{21}\right) + E_{22} \cdot \left(r_{22} - \hat{r}_{22}\right) = 0$$
$$E_{11} \cdot \left(r_{11} - \hat{r}_{11}\right) + E_{21} \cdot \left(r_{21} - \hat{r}_{21}\right) = 0$$
$$E_{12} \cdot \left(r_{12} - \hat{r}_{12}\right) + E_{22} \cdot \left(r_{22} - \hat{r}_{22}\right) = 0$$

この連立方程式において、C を定数として、

$$E_{11} \cdot \left(r_{11} - \hat{r}_{11}\right) = E_{22} \cdot \left(r_{22} - \hat{r}_{22}\right) = C$$
$$E_{21} \cdot \left(r_{21} - \hat{r}_{21}\right) = E_{12} \cdot \left(r_{12} - \hat{r}_{12}\right) = -C$$

と表すことができる。

　この複合分類リスクの構造が乗法型であることから、各相対クレームコスト指数の推定値は料率係数を用いて、$\hat{r}_{ij} = x_i \times y_j \left(i = 1,2 \quad j = 1,2\right)$ と表される。

　これを、上記連立方程式に代入して整理すると、

$$x_1 \times y_1 = r_{11} - C / E_{11} \cdots (a),\ x_1 \times y_2 = r_{12} + C / E_{12} \cdots (b)$$
$$x_2 \times y_1 = r_{21} + C / E_{21} \cdots (c),\ x_2 \times y_2 = r_{22} - C / E_{22} \cdots (d)$$

となる。

　$(a) \times (d) = (b) \times (c)$ より

$$\left(r_{11} - C / E_{11}\right)\left(r_{22} - C / E_{22}\right) = \left(r_{12} + C / E_{12}\right)\left(r_{21} + C / E_{21}\right)$$

であり、

$$E_{12}E_{21}\left(E_{11}r_{11} - C\right)\left(E_{22}r_{22} - C\right) = E_{11}E_{22}\left(E_{12}r_{12} + C\right)\left(E_{21}r_{21} + C\right)$$
$$400 \cdot 125\left(500 \cdot 1.05 - C\right)\left(200 \cdot 0.850 - C\right) = 500 \cdot 200\left(400 \cdot 1.150 + C\right)\left(125 \cdot 0.560 + C\right)$$
$$\left(525 - C\right)\left(170 - C\right) = 2\left(460 + C\right)\left(70 + C\right)$$
$$89,250 - 695C + C^2 = 64,400 + 1,060C + 2C^2$$
$$C^2 + 1,755C - 24,850 = 0$$

　C について解くと、$C = 14.047, -1769.05$

　ここで、$C = -1769.05$ では、負となる料率係数があるので不適。

　よって、$C = 14.047$

　これを代入して、$y_1 = \dfrac{r_{21} + C / E_{21}}{x_2} = \dfrac{0.560 + 14.047 / 125}{0.738} = 0.911$

問題２

（１）

（ア）①（**B**）　（イ）②（**G**）　［（ア）３点　（イ）３点］

（ア）

１年契約の予定損害率、予定新契約費率、予定維持費率、予定代理店手数料率、予定利潤率をそれぞれ $p, \alpha, \beta, \theta, \delta$ とすると、 $p = 0.55, \alpha = 0.15, \beta = 0.10, \theta = 0.15, \delta = 0.05$

予定利率 $i = 0.01$ に対し、$v = \dfrac{1}{1+i}$ とすると、$\dfrac{1-v^5}{1-v} = 4.901965\cdots$

長期一時払契約の営業保険料を計算すると、

$$P = 300 \frac{\alpha + (\beta + p) \cdot \dfrac{1-v^5}{1-v}}{1-(\theta+\delta)} = 1,251 \text{ となる。}$$

実際の利潤額を、営業保険料から実際に支払うこととなる保険金と実際にかかったコストを引くことにより求める。

$v_1 = \dfrac{1.04}{1.01}, v_2 = \dfrac{1.02}{1.01}$ とおく。$\dfrac{1-v_1^5}{1-v_1} = 5.305984\cdots, \dfrac{1-v_2^5}{1-v_2} = 5.099995\cdots$

- 実際の支払保険金現価　：$300 \times 0.55 \times 5.305984 = 875.49$
- 実際の新契約費　：$300 \times 0.15 = 45$
- 実際の維持費現価　：$300 \times 0.10 \times 5.099995 = 153.00$
- 実際の代理店手数料　：$1,251 \times 0.15 = 187.65$

上記より、実際の利潤額は -10.14 となり、実際の利潤額の営業保険料に対する割合は、$-10.14 \div 1,251 = -0.8\%$ となる。

（イ）保険料収入全体に占める純保険料の割合は、

$$\frac{0.8\times 1\text{年契約の純保険料}+0.2\times 5\text{年契約の純保険料}}{0.8\times 1\text{年契約の営業保険料}+0.2\times 5\text{年契約の営業保険料}}$$

$$= \frac{0.8P \times p + 0.2P \times p \dfrac{1-v_1^5}{1-v_1}}{0.8P + 0.2P \times \dfrac{\alpha + \beta \dfrac{1-v_2^5}{1-v_2} + p \dfrac{1-v_1^5}{1-v_1}}{1-(\theta+\delta)}} = \frac{0.8p + 0.2p \dfrac{1-v_1^5}{1-v_1}}{0.8 + 0.2 \dfrac{\alpha + \beta \dfrac{1-v_2^5}{1-v_2} + p \dfrac{1-v_1^5}{1-v_1}}{1-(\theta+\delta)}}$$

$p = 0.55, \alpha = 0.15, \beta = 0.10, \theta = 0.15, \delta = 0.05$, $\dfrac{1-v_1^5}{1-v_1} = 5.305984\cdots, \dfrac{1-v_2^5}{1-v_2} = 5.099995\cdots$ を代入して

計算すると、$(\text{上式}) = 0.604$ となる。

（２）

<u>（ア）③（Ｈ）　（イ）④（Ｇ）</u>　［（ア）２点　（イ）３点］

（ア）

クレーム額の分布を X 、ポートフォリオ全体でのクレーム件数の分布を N とすると、

$E(N)=V(N)=\dfrac{1}{\lambda}\times 400\lambda=400$ であるから、

$$CV(S)=\frac{\sqrt{V(X)E(N)+E(X)^2V(N)}}{E(N)E(X)}=\frac{\sqrt{E(N)(V(X)+E(X)^2)}}{E(N)E(X)}=\frac{\sqrt{E(N)E(X^2)}}{E(N)E(X)}=\frac{1}{20}\times\frac{\sqrt{E(X^2)}}{E(X)}$$

となる。

$E(X)=3\times 0.4+6\times 0.3+8\times 0.2+9\times 0.1=5.5$

$E(X^2)=9\times 0.4+36\times 0.3+64\times 0.2+81\times 0.1=35.3$

従って、$CV(S)=\dfrac{1}{20}\times\dfrac{\sqrt{35.3}}{5.5}=0.054$

（イ）

再保険適用後は、個々のクレーム額の分布は次のとおりとなる。

元受クレーム額	再保険適用後の保有クレーム額	確率
3	3α	0.4
6	4α	0.3
8	5α	0.2
9	6α	0.1

従って、$CV(T)=\dfrac{1}{20}\times\dfrac{\sqrt{(3\alpha)^2\times 0.4+(4\alpha)^2\times 0.3+(5\alpha)^2\times 0.2+(6\alpha)^2\times 0.1}}{3\alpha\times 0.4+4\alpha\times 0.3+5\alpha\times 0.2+6\alpha\times 0.1}=0.052$

（３）

（ア）⑤**（Ｆ）**⑥**（Ｊ）**（⑤、⑥は完答）⑦**（Ｆ）**

（イ）⑧**（Ｅ）**⑨**（Ｆ）**⑩**（Ｅ）**（⑧～⑩は完答）⑪**（Ｄ）**

［（ア）⑤⑥１点　⑦２点　（イ）⑧～⑩１点　⑪２点］

（ア）

$M_X(t)=\dfrac{1}{1-\mu t}$，$M_N(t)=\dfrac{p}{1-(1-p)e^t}$ より、

$$M_S(t)=M_N(\log M_X(t))=\frac{p}{1-(1-p)M_X(t)}=\frac{p}{1-(1-p)\frac{1}{1-\mu t}}=\frac{p(1-\mu t)}{p-\mu t}$$

$M_S(t)$ を変形すると、$M_S(t)=\dfrac{p(1-\mu t)}{p-\mu t}=p\cdot 1+(1-p)\cdot\dfrac{p}{p-\mu t}$ となる。

この式の第１項において１は定数０の積率母関数であり、第２項の $\dfrac{p}{p-\mu t}$ はパラメータが $\dfrac{p}{\mu}$ の指数分布の積率母関数であることから、S は定数０と指数分布とをそれぞれ重み p および $1-p$ による加重平均したものとみなすことができる。

したがって、$F_S(x)=p+(1-p)\left(1-e^{-\frac{p}{\mu}x}\right)=1-(1-p)e^{-\frac{p}{\mu}x}$ となる。

（イ）

初期サープラス$u_0=0$の Lundberg モデルにおいて、破産が発生し、かつ破産直後のサープラスが

$-y(y>0)$以上である確率は、$G(y)=\dfrac{\lambda}{c}\int_0^y\{1-F(x)\}dx$と表される。

（ここで、cは単位時間当たりの収入保険料、$F(x)$は個々のクレームの分布関数）

$$\varepsilon(0)=\lim_{y\to\infty}G(y)=\lim_{y\to\infty}\frac{\lambda}{c}\int_0^y\{1-F(x)\}dx=\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty\{1-F(x)\}dx=\frac{\lambda}{c}\mu$$

$\lambda\mu(1+\theta)=c$より、$\varepsilon(0)=\dfrac{1}{1+\theta}$となる。

また、Kは成功確率を$p=\dfrac{\theta}{1+\theta}$とする幾何分布に従い、$p(k)=\left(\dfrac{\theta}{1+\theta}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{1+\theta}\right)^k$となる。

「最低記録」の更新が起きる回数Kは幾何分布に従い、「記録の更新幅」L_nの確率分布は平均μの指数分布に従うので、Lは複合幾何分布に従う。

（ア）の結果を踏まえると、$F_L(x)=1-\dfrac{1}{1+\theta}e^{-\frac{\theta}{\mu(1+\theta)}x}$となる。

与えられた各パラメータの値の下で、破産確率を計算すると、

$$\varepsilon(u_0)=1-F_L(u_0)=\frac{1}{1+\theta}e^{-\frac{\theta}{\mu(1+\theta)}u_0}=\frac{1}{1.25}e^{-\frac{0.25\times75}{1.25\times10}}=\frac{1}{1.25}e^{-1.5}=0.18$$となる。

（４）

（ア）⑫（Ｇ）⑬（Ｉ）　（イ）⑭（Ｈ）⑮（Ｆ）⑯（Ａ）（⑭～⑯は完答）⑰（Ｈ）

［（ア）⑫１点　⑬１点　（イ）⑭～⑯２点　⑰２点］

（ア）

$90\%VaR = A$ とすると、A は以下のとおり求められる。

$$F(A) = 0.9$$
$$\Leftrightarrow 1-(1-A)^{0.5} = 0.9$$
$$\Leftrightarrow (1-A)^{0.5} = 0.1$$
$$\Leftrightarrow 1-A = 0.01$$
$$\Leftrightarrow A = 0.99$$

また、$90\%TVaR = B$ とすると、B は以下のとおり求められる。

$$B = \frac{1}{1-0.9}\int_{0.9}^{1} VaR_t(X)dt$$
$$= 10\times\int_{90\%VaR(X)}^{1} xf(x)dx$$
$$= 10\times\int_{0.99}^{1} \frac{1}{2}x(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx$$
$$= \frac{10}{2}\times\left\{\int_{0.99}^{1}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx - \int_{0.99}^{1}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx\right\}$$
$$= 0.996$$

となる。

（イ）

$$F_{Z_n}(x) = \left\{F_X\left(c_n x + d_n\right)\right\}^n$$
$$= \left\{F_X\left(n^{-\frac{1}{\alpha}}x + 1\right)\right\}^n$$
$$= \left\{1 - \left(-n^{-\frac{1}{\alpha}}x\right)^{\alpha}\right\}^n$$
$$= \left\{1 - \frac{(-x)^{\alpha}}{n}\right\}^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{-(-x)^{\alpha}}\ (x \le 0)$$

したがって、M_n の90%VaR の値をY とすると、$n=100, \alpha=1$ より、

$$P(M_{100} \geq Y) = P\left(\frac{M_{100}-d_{100}}{c_{100}} \geq \frac{Y-d_{100}}{c_{100}}\right)$$
$$= P\left(\frac{M-1}{100^{-1}} \geq \frac{Y-1}{100^{-1}}\right)$$
$$= 1 - F_{Z_{100}}\left(\frac{Y-1}{100^{-1}}\right)$$
$$\approx 1 - \exp\left\{-\left(-\frac{Y-1}{100^{-1}}\right)^{1}\right\}$$
$$\approx 1 - \exp\left\{100 \times (Y-1)\right\}$$

この値が$1-0.9=0.1$ となればよいので、

$$0.1 = 1 - \exp\left\{100 \times (Y-1)\right\}$$
$$\Leftrightarrow \exp\left\{100 \times (Y-1)\right\} = 0.9$$
$$\Leftrightarrow 100 \times (Y-1) = \log 0.9$$
$$\Leftrightarrow Y - 1 = \frac{2\log 3 - \log 2 - \log 5}{100}$$
$$\Leftrightarrow Y - 1 = \frac{2 \times 1.099 - 0.693 - 1.609}{100}$$
$$\Leftrightarrow Y = 1 - 0.00104$$

となる。

（5）

（ア）⑱（F）⑲（I）⑳（C）　（イ）㉑（A）（B）（C）

［（ア）⑱1点　⑲1点　⑳2点　（イ）2点］

（ア）

$i \neq j$ であるようなすべての $(X_i, Y_i), (X_j, Y_j)$ の組 $(i = 1, 2, \cdots, 7)$ に対して、$sign\left((X_i - X_j)(Y_i - Y_j)\right)$ を計算した結果は下表のとおり。

j＼i	1	2	3	4	5	6	7
1	-	1	-1	1	1	1	1
2	1	-	-1	1	1	1	-1
3	-1	-1	-	1	1	-1	1
4	1	1	1	-	-1	1	1
5	1	1	1	-1	-	1	1
6	1	1	-1	1	1	-	-1
7	1	-1	1	1	1	-1	-

したがってケンドールの τ は 18/42=0.4285…となり、選択肢のうち最も近いものは（F）の 0.429 となる。

スピアマンの ρ について、各事業年度の $rank(X_i)$、$rank(Y_i)$ を求めると下表のとおり。

事業年度	1	2	3	4	5	6	7
$rank(X_i)$	6	4	7	1	2	3	5
$rank(Y_i)$	7	6	4	2	1	5	3

これに対して、ピアソンの積率相関係数を計算した結果、0.5714…がスピアマンの ρ となり、選択肢のうち最も近いものは（I）の 0.573 となる。

また、テキスト 10-36 より、クレイトン・コピュラのケンドールの τ は $\alpha/(\alpha+2)$ で表される。前述のとおりケンドールの τ は 0.429 であり、これを基に α を計算すると $\alpha \fallingdotseq 1.5$ となる。

（イ）

（A） 正しい（テキスト 10-27、10-28）

（B） 正しい（テキスト 10-28）

（C） 正しい（テキスト 10-25、10-29）

問題３
（１）
（ア）①（Ｆ）　（イ）②（Ｇ）　（ウ）③（Ａ）　［（ア）３点　（イ）３点　（ウ）４点］

（ア）a_1 を前契約で事故があった契約者数、a_2 を前契約が無事故かつ前々契約で事故があった契約者数、a_3 を前契約も前々契約も無事故だった契約者数とすると、a_1～a_3 は以下の式で表せる。

$a_1 = 0.2(a_1 + a_2 + a_3)$ …①
$a_2 = 0.8a_1$ …②
$a_3 = 0.8(a_2 + a_3)$ …③

また、$a_1 + a_2 + a_3 = 10{,}000$ より、①から $a_1 = 2{,}000$ となる。
②に代入すると、$a_2 = 1{,}600$ となり、③より $a_3 = 6{,}400$ となる。

（イ）（ア）と同様に、a_1' を前契約で事故があった契約者数、a_2' を前契約が無事故かつ前々契約で事故があった契約者数、a_3' を前契約も前々契約も無事故だった契約者数とする。a_1'～a_3' は新規加入者と継続しない確率を反映させた以下の式で表せる。

$a_1' = 0.2 \times 0.975a_1' + 0.2 \times 0.975a_2' + 0.2 \times 0.8a_3' + 600$
$a_2' = 0.8 \times 0.975a_1'$
$a_3' = 0.8 \times 0.975a_2' + 0.8 \times 0.975a_3'$

整理すると
$a_1' = 0.195a_1' + 0.195a_2' + 0.16a_3' + 600$ …④
$a_2' = 0.78a_1'$ …⑤
$a_3' = 0.78a_2' + 0.78a_3'$ …⑥

⑤および⑥より、a_3' を a_1' で表すと、$a_3' = 0.78 \times 0.78 \div 0.22 \times a_1'$ となる。
このことおよび⑤より、④の a_2'、a_3' は a_1' で表すことができ、整理すると $a_1' = 2{,}851$ であることがわかる。したがって、$a_3' = 0.78 \times 0.78 \div 0.22 \times a_1'$ であることから、$a_3' = 7{,}885$ となる。

（ウ）新規加入者や継続しない契約者がいる場合の平均的な割引率は、以下のとおり。
$-30\% \times a_3' / (a_1' + a_2' + a_3') = -18.252\%$
また、新規加入者や継続しない契約者がいない場合の平均的な割引率は、以下のとおり。
$-30\% \times a_3 / (a_1 + a_2 + a_3) = -19.2\%$
よって、新規加入者や継続しない契約者がいる場合といない場合の基準となる保険料をそれぞれ P、P' とすると、$(1-19.2\%)P = (1-18.252\%)P'$ と表すことができる。
したがって、$P'/P = 98.84\%$ となり、いる場合はいない場合より約 1%低くなる。

（２）

（ア）④（**A**）⑤（**C**）（④、⑤は完答）　（イ）⑥（**F**）⑦（**I**）（⑥、⑦は完答）

［（ア）３点　（イ）７点 ］

（ア）

$$E[(\Theta - g(x))^2 | x] = g(x)^2 - 2E[\Theta | x] \times g(x) + E[\Theta^2 | x]$$

$$= (g(x) - E[\Theta | x])^2 + E[\Theta^2 | x] - E[\Theta | x]^2$$

$$= (g(x) - E[\Theta | x])^2 + V[\Theta | x]$$

とわかるので、答えはそれぞれ④（**A**）⑤（**C**）となる。

（イ）

ベイズの定理より

$$\pi_{\Theta|x}(\theta | x)$$

$$\propto \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta)^2}{2b} - \frac{(\theta - \mu)^2}{2a} \right)$$

$$\propto \exp\left(-\frac{\theta^2}{2}\left(\frac{n}{b} + \frac{1}{a}\right) + \theta\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{b} + \frac{\mu}{a}\right) \right)$$

$$\propto \exp\left(-\left(\frac{1}{2a} + \frac{n}{2b}\right)\left(\theta - \frac{a\sum_{i=1}^{n} x_i + \mu b}{an + b}\right)^2 \right)$$

となることから、事後分布は正規分布であり、

その平均は$\dfrac{a\sum_{i=1}^{n} x_i + \mu b}{an + b}$、分散は$\left(\dfrac{n}{b} + \dfrac{1}{a}\right)^{-1}$とわかる。

よって、与えられた条件を代入すると、事後分布の分散に最も近い値は（**F**）の 60、
3 年目のクレーム総額の推定値（事後分布の平均)に最も近い値は（**I**）270 となる。

（３）

（ア）⑧（C）⑨（D）（⑧、⑨は完答）

（イ）⑩（A）⑪（C）⑫（C）⑬（C）⑭（H）（⑩～⑭は完答）　［（ア）３点　（イ）７点］

（ア）

S が正規分布に従うとき、エッシャー原理は分散原理に一致することから、

$f^{Q}{}_{S}(s)$ は、平均 $\mu + h\sigma^2$、分散 σ^2 の正規分布の確率密度関数である。

（なお、エッシャー変換の定義に従って計算しても、同様の結果が得られる。）

（イ）

Y の期待値を考えるために、以下の指示関数を定義する。

$$1_E = \begin{cases} 1 \cdots \text{事象}E\text{に該当する場合} \\ 0 \cdots \text{事象}E\text{に該当しない場合} \end{cases}$$

すると、$E[Y]$ は以下のとおりとなる。

$$E[Y] = E[\max(Ae^{hZ-\frac{1}{2}h^2} - K, 0)]$$

$$= E[(Ae^{hZ-\frac{1}{2}h^2} - K)1_{Ae^{hZ-\frac{1}{2}h^2}-K>0}]$$

$$= AE[e^{hZ-\frac{1}{2}h^2}1_{Ae^{hZ-\frac{1}{2}h^2}-K>0}] - KE[1_{Ae^{hZ-\frac{1}{2}h^2}-K>0}]$$

第一項

$$= AE[\frac{e^{hZ}}{E[e^{hZ}]}1_{Ae^{hZ-\frac{1}{2}h^2}-K>0}]$$

$$= AE[1_{Ae^{h(Z+h)-\frac{1}{2}h^2}-K>0}]$$

$$= AP[Ae^{hZ+\frac{1}{2}h^2} > K]$$

$$= AP[hZ + \frac{1}{2}h^2 > \log(\frac{K}{A})]$$

$$= A\Phi[\frac{1}{h}\log(\frac{A}{K}) + \frac{1}{2}h]$$

第二項

$$= -KP[Ae^{hZ-\frac{1}{2}h^2} > K]$$
$$= -KP[hZ - \frac{1}{2}h^2 > \log(\frac{K}{A})]$$
$$= -K\Phi[\frac{1}{h}\log(\frac{A}{K}) - \frac{1}{2}h]$$

より、$E[Y] = A\Phi[\frac{1}{h}\log(\frac{A}{K}) + \frac{1}{2}h] - K\Phi[\frac{1}{h}\log(\frac{A}{K}) - \frac{1}{2}h]$とわかる。

（４）

⑮（**Ｂ**）　⑯（**Ｈ**）（⑮、⑯は完答）　⑰（**Ａ**）　⑱（**Ｅ**）（⑰、⑱は完答）

⑲（**Ｆ**）　⑳（**Ｂ**）（⑲、⑳は完答）　　［⑮⑯３点　⑰⑱３点　⑲⑳４点］

（ア）$\left(s,s+h\right]$でクレームが発生しない確率は、

$$\begin{aligned}
&P\left(N_s=n+k,N_{s+h}=n+k\mid N_t=n\right)\\
&=P\left(N_s=n+k\mid N_t=n\right)\times P\left(N_{s+h}=n+k\mid N_t=n,N_s=n+k\right)\\
&=P\left(N_s=n+k\mid N_t=n\right)\times P\left(N_{s+h}=n+k\mid N_s=n+k\right)\\
&=p_{n,n+k}\left(t,s\right)\times p_{n+k,n+k}\left(s,s+h\right)\\
&=p_{n,n+k}\left(t,s\right)\times\left(1-h\lambda_{n+k+1}\left(s\right)+o\left(h\right)\right)
\end{aligned}$$

となる。

（イ）$\left(s,s+h\right]$でクレームが１件発生する確率も同様に、

$$\begin{aligned}
&P\left(N_s=n+k-1,N_{s+h}=n+k\mid N_t=n\right)\\
&=P\left(N_s=n+k-1\mid N_t=n\right)\times P\left(N_{s+h}=n+k\mid N_t=n,N_s=n+k-1\right)\\
&=P\left(N_s=n+k-1\mid N_t=n\right)\times P\left(N_{s+h}=n+k\mid N_s=n+k-1\right)\\
&=p_{n,n+k-1}\left(t,s\right)\times p_{n+k-1,n+k}\left(s,s+h\right)\\
&=p_{n,n+k-1}\left(t,s\right)\times\left(h\lambda_{n+k}\left(s\right)+o\left(h\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&p_{n,n+k}\left(t,s+h\right)=p_{n,n+k}\left(t,s\right)\times\left(1-h\lambda_{n+k+1}\left(s\right)+o\left(h\right)\right)+p_{n,n+k-1}\left(t,s\right)\times\left(h\lambda_{n+k}\left(s\right)+o\left(h\right)\right)+o\left(h\right)\\
&\Leftrightarrow\frac{p_{n,n+k}\left(t,s+h\right)-p_{n,n+k}\left(t,s\right)}{h}=-\lambda_{n+k+1}\left(s\right)p_{n,n+k}\left(t,s\right)+\lambda_{n+k}\left(s\right)p_{n,n+k-1}\left(t,s\right)+\frac{o\left(h\right)}{h}
\end{aligned}$$

$h\to 0$とすると、

$$\frac{\partial}{\partial s}p_{n,n+k}\left(t,s\right)=-\lambda_{n+k+1}\left(s\right)p_{n,n+k}\left(t,s\right)+\lambda_{n+k}\left(s\right)p_{n,n+k-1}\left(t,s\right)$$

となる。

（５）

（ア）㉑（Ｈ）　㉒（Ｄ）（㉑、㉒は完答）　㉓（Ｉ）　（イ）㉔（Ａ）（Ｃ）

［別解］（イ）㉔（Ａ）

［（ア）㉑㉒４点　㉓５点　（イ）㉔２点］

（ア）

（a）

ヒントで与えられた等式において、$w=a$ を代入すると

$P(\tau_a < t, W_t < a) = P(W_t > a)$ を得る。

また、明らかに $P(\tau_a < t, W_t > a) = P(W_t > a)$ であることから、

$$
\begin{aligned}
P(\tau_a < t) &= P(\tau_a < t, W_t < a) + P(\tau_a < t, W_t > a) \\
&= 2P(W_t > a) \\
&= 2P(Z > \frac{a}{\sqrt{t}}) \\
&= 2\{1-\Phi(\frac{a}{\sqrt{t}})\}
\end{aligned}
$$

となる。（ここで、Z は標準正規分布に従う確率変数、$\Phi(Z)$ はその確率分布関数である。）

よって、

$$
\begin{aligned}
f_{\tau_a}(t) &= \frac{d}{dt} 2\{1-\Phi(\frac{a}{\sqrt{t}})\} \\
&= \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp(-\frac{a^2}{2t}) \qquad (t>0)
\end{aligned}
$$

を得る。

（b）

まず、M_T の確率密度関数 $f_{M_T}(x)$ を求める。

$\tau_a \le T \Leftrightarrow M_T \ge a$ であることから、（１）と同様の変形を行うと以下を得る。

$$
\begin{aligned}
P(M_T \ge a) &= P(\tau_a \le T) \\
&= 2P(W_T > a) \\
&= 2P(Z > \frac{a}{\sqrt{T}})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore P(M_T \le a) &= 1 - 2P(\tau_a \le T) \\
&= 1 - 2\{1-\Phi(\frac{a}{\sqrt{T}})\} \\
&= 2\Phi(\frac{a}{\sqrt{T}}) - 1
\end{aligned}
$$

上記で得られた式について、a で両辺を微分すると、

$f_{M_T}(a)=\dfrac{2}{\sqrt{2\pi T}}\exp(\dfrac{-a^2}{2T})$， $a\geq 0$ とわかる。

よって $f_{M_T}(x)=\dfrac{2}{\sqrt{2\pi T}}\exp(\dfrac{-x^2}{2T})$， $x\geq 0$ として、$P=\int_a^\infty x\times f_{M_T}(x)dx$ を求めると、

$$\begin{aligned}
P&=\int_a^\infty x\frac{2}{\sqrt{2\pi T}}\exp(\frac{-x^2}{2T})dx\\
&=\frac{2}{\sqrt{2\pi T}}\int_a^\infty x\exp(\frac{-x^2}{2T})dx\\
&=\frac{2}{\sqrt{2\pi T}}\left[-T\exp(\frac{-x^2}{2T})\right]_a^\infty\\
&=\frac{2T}{\sqrt{2\pi T}}\exp(\frac{-a^2}{2T})\\
&=\frac{\sqrt{2T}}{\sqrt{\pi}}\exp(\frac{-a^2}{2T})
\end{aligned}$$

となるので、$a=2$、$T=1$、$\pi=3.142$、$e=2.718$ を代入して計算すると、その結果に最も近い値は 0.108 となる。

［補足］

閾値が示されることで、問題を解く上で大きなヒントとなるため省略したが、「ヒント」に記載の等式は、$w\leq a$ の場合に限り成立することにご注意いただきたい。

（イ）

（A） 元受保険金が少数の大クレームから成り立っているか、または、多数の小クレームから成り立っているかどうかに影響されず、支払保険金総額のみに影響される。(テキスト 9-17)

（B） 正しい（テキスト 9-17)

（C） ELC 再保険を付した時の保有分に係る調整係数は、この ELC 再保険と同じ再保険付加率及び同じネット再保険料を持つ任意の「支払保険金 1 件あたりの再保険金が元受保険金の関数となるような再保険」を付した時の保有分に係る調整係数よりも大きい（テキスト 9-28)

［別解］

（イ）**（C）**の文章中の「関数型再保険」がテキスト 9-28 の脚注 10 に示された定義を踏まえられたものと判断し、「正しい」とした場合も正解として取り扱った。