

損保数理（問題）

特に断りがないかぎり、消費税については考慮しないこととする。また、免責金額および支払限度額は1事故あたりのものであり、各クレームは独立であるものとする。

問題 1. 次の I～V の各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。 I～IV:各4点 V:5点 (計21点)

I. ある保険会社では保険期間が1年の保険種目を取り扱っている。その保険種目では2018年度末に70,000千円の未経過保険料を計上し、2019年度中に以下のような保険料内訳を記録した。

新契約保険料	200,000 千円 (うち、2019 年度末未経過保険料は 100,000 千円)
2019 年 4 月以前に保険期間が満了した契約に関する追徴保険料	10,000 千円
2019 年 4 月以前に保険期間が満了した契約に関する優良戻し保険料	20,000 千円

また、2020 年 12 月末時点で、過去のクレームデータは以下のとおりとなっている。

クレーム No.	事故発生日	調査状況
1	2015/7/8	2018 年度末に支払備金 40,000 千円を計上。 2019/8/26 に保険金 60,000 千円を支払い、支払完了。
2	2016/9/2	2018 年度末に支払備金 30,000 千円を計上。 2019 年度は支払備金の修正がなく、支払備金は前年度積み立てた 30,000 千円のままであった。
3	2017/5/3	2018 年度末に支払備金 20,000 千円を計上。 2019 年度末に支払備金を 50,000 千円に修正。
4	2019/5/17	2019/10/24 に保険金 10,000 千円を支払い、支払完了。
5	2019/9/18	2019 年度末に支払備金 25,000 千円を計上。
6	2020/8/21	2020/11/29 に保険金 50,000 千円を支払い、支払完了。

なお、年度は4月～3月とする。このとき、次の(1)、(2)の各問に答えなさい。

- (1) 2019年度のアーンドベース損害率(会計年度統計ベース)は $\boxed{a}\boxed{b}.\boxed{c}$ %である。a、b、cのそれぞれに当てはまる1桁の数字を解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、計算の途中において端数処理は行わず、計算結果はパーセント表示における小数点以下第2位を四捨五入して小数点以下第1位まで求めることとし、計算結果が10%未満となった場合はaの欄に0をマークしなさい。
- (2) 2019年度のアーンドベース損害率(会計年度—事故年度統計ベース)は $\boxed{d}\boxed{e}.\boxed{f}$ %である。d、e、fのそれぞれに当てはまる1桁の数字を解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、計算の途中において端数処理は行わず、計算結果はパーセント表示における小数点以下第2位を四捨五入して小数点以下第1位まで求めることとし、計算結果が10%未満となった場合はdの欄に0をマークしなさい。

II. 効用関数が $u(x) = -\exp(-0.1x)$ である契約者が、期初に 100 の富を持っている。この契約者が保有しているリスク X は、クレーム件数が平均 3 のポアソン分布、1 事故あたりのクレーム額が平均 4 の指数分布に従うものとする。この契約者がリスク X を移転するために支払う保険料の上限に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、クレーム件数と各クレーム額は互いに独立であるとする。

- | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| (A) 10 | (B) 12 | (C) 15 | (D) 20 | (E) 25 |
| (F) 30 | (G) 35 | (H) 40 | (I) 50 | (J) 75 |

Ⅲ. N 年度末にサープラスを 800 万円保有している保険会社が、次の条件を満たす保険商品 1 件の引受を開始する。

- ①1 年間の収入保険料は 5,000 万円で、年度期初に払い込まれる。
- ②1 年間の事故件数と事故 1 件あたりの保険金支払額の発生確率は下表のとおりであり、事故発生と同時に保険金が支払われる。

事故件数	発生確率
0 件	0.5
1 件	0.3
2 件	0.2

保険金支払額	発生確率
1,500 万円	0.5
3,000 万円	0.3
4,500 万円	0.2

- ③1 年間保険金の支払がなかった場合、年度期末に収入保険料の 20%を無事故戻しとして返戻する。
- ④代理店手数料は保険料の 20%で、保険料収入時に支払う。
- ⑤社費は年額 1,000 万円であり、年間を通じ平準的に支出する。
- ⑥運用益は考慮しない。

このとき、この保険会社が $N+2$ 年度末までに破産する確率に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、1 度でもサープラスが 0 万円未満となった場合、保険会社は破産したものとみなす。

- (A) 25% (B) 26% (C) 27% (D) 28% (E) 29%
 (F) 30% (G) 31% (H) 32% (I) 33% (J) 34%

V. Minimum Bias 法に関して、次の (1)、(2) の各問に答えなさい。

(1) Bailey と Simon が 1960 年に発表した論文の中では、料率の満たすべき基準として次の 4 条件を挙げている。

- ① 複合等級リスクのデータの信頼性を反映したものであること。
- ② 実際のデータとの誤差の総計が最小になること。
- ③ 単一の等級リスクおよびリスク全体での収支のバランスがとれること。
- ④ 複合等級リスクの料率は十分経験値に近く、その誤差は偶然に起因するにすぎないものであること。

Minimum Bias 法は、上記の①～④のうち、どの条件に着目した料率算定方法であるか。正しいものをすべて選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。ただし、すべて誤っている場合は、**(E)** をマークしなさい。

- (A) ① (B) ② (C) ③ (D) ④

(2) ある保険会社の火災保険の料率は、地域（地域Aか地域Bか）と構造（耐火か非耐火か）の 2 つの危険標識で複合的に区分されている。この火災保険に関するある年度の実績統計が下表のとおりであったとする。

<エクスポージャ (E_{ij}) >

	耐火	非耐火	計
地域A	$E_{11} = 600$	$E_{12} = 200$	$E_{1\bullet} = 800$
地域B	$E_{21} = 200$	$E_{22} = 120$	$E_{2\bullet} = 320$
計	$E_{\bullet 1} = 800$	$E_{\bullet 2} = 320$	$E_{\bullet\bullet} = 1,120$

<クレーム総額 (C_{ij}) >

	耐火	非耐火	計
地域A	$C_{11} = 360$	$C_{12} = 240$	$C_{1\bullet} = 600$
地域B	$C_{21} = 164$	$C_{22} = 132$	$C_{2\bullet} = 296$
計	$C_{\bullet 1} = 524$	$C_{\bullet 2} = 372$	$C_{\bullet\bullet} = 896$

リスクの構造が加法型であると仮定して、2つの危険標識について相対クレームコスト指数および料率係数を **Minimum Bias** 法により求めるとき、構造区分「非耐火」に対応する料率係数 y_2 の値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

なお、地域区分「地域A」に対応する料率係数 x_1 は、それに対応する実績の相対クレームコスト指数に等しいものとする。また、計算の途中において、クレームコストおよび相対クレームコスト指数は、すべて小数点以下第4位を四捨五入して小数点以下第3位までの数値を用いることとする。

- | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| (A) 0.462 | (B) 0.482 | (C) 0.502 | (D) 0.522 | (E) 0.542 |
| (F) 0.562 | (G) 0.582 | (H) 0.602 | (I) 0.622 | (J) 0.642 |

問題 2. 次の I ~ IV の各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
I、III : 各 6 点 II、IV : 各 7 点 (計 26 点)

I. 次の (1)、(2) の各問に答えなさい。

(1) 保険料の払込免除制度を持つ年払契約の積立型基本特約における第 t 保険年度の予定利息を表すものとして最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。ここで、予定利息とは、平準式積立保険料で保険料算出する際に予定されている利息のことをいう。なお、満期返戻金を W 、保険期間を n 年、予定利率を i 、現価率を $v \left(= \frac{1}{1+i} \right)$ 、予定契約消滅率 q を考慮した現価率を $\phi = (1-q)v$ 、予定契約消滅率 q および予定払込免除発生率 d を考慮した現価率を $\psi = (1-d)(1-q)v$ とする。

(A) $W\psi^n \frac{1}{1-\psi^n} \left\{ v^{-t} (1-\psi^t) (1-v) \right\}$

(B) $W\phi^n \frac{1}{1-\phi^n} \left\{ v^{-t} (1-\phi^t) (1-v) \right\}$

(C) $W\psi^n \frac{1}{1-\psi^n} \left\{ v^{-t} (1-\phi^t) (1-v) \right\}$

(D) $W\phi^n \frac{1}{1-\phi^n} \left\{ v^{-t} (1-\psi^t) (1-v) \right\}$

(E) $W\psi^n \frac{1}{1-\phi^n} \left\{ v^{-t} (1-\psi^t) (1-v) \right\}$

(F) $W\phi^n \frac{1}{1-\psi^n} \left\{ v^{-t} (1-\phi^t) (1-v) \right\}$

(G) $W\psi^n \frac{1}{1-\phi^n} \left\{ v^{-t} (1-\phi^t) (1-v) \right\}$

(H) $W\phi^n \frac{1}{1-\psi^n} \left\{ v^{-t} (1-\psi^t) (1-v) \right\}$

(I) $W\psi^n \frac{1}{1-\psi^n} \left\{ v^{-t} (1-\psi^t) \right\}$

(J) $W\phi^n \frac{1}{1-\phi^n} \left\{ v^{-t} (1-\phi^t) \right\}$

(K) いずれにも該当しない

(2) 以下のイ～ハのうち、正しいものの組み合わせとして最も適切なものは、選択肢のうちどれか。

- イ. 積立保険において、営業保険料のうち危険保険料については、非積立保険と同様の性質を持っていることから契約者配当の算出の対象としておらず、積立保険料および付加保険料について契約者配当の算出の対象としている。
- ロ. 積立保険の契約者配当の算出に用いる利回り（契約者配当適用利回り）は、投資経費をはじめとする運用上のコスト等を考慮し、契約時に決定される。
- ハ. 積立保険料を算出する要素として予定契約消滅率があるが、予定契約消滅率は満期返戻金を支払わない契約（全損失効）が発生する確率であり、予定契約消滅率が高くなると積立保険料は小さくなる。

(A) 全て正しい

(B) イ、ロのみ正しい

(C) イ、ハのみ正しい

(D) ロ、ハのみ正しい

(E) イのみ正しい

(F) ロのみ正しい

(G) ハのみ正しい

(H) 全て誤り

II. 事故が発生した年度（事故年度）から 4 年間で支払が完了する保険商品（2015 年度から販売開始）について、2015 年度から 2019 年度までの各年度の支払保険金および各年度末の個別見積りによる普通支払備金が次のように与えられているとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

なお、2019 年度のインフレ率（対前年度）は 10%とし、その他の年度のインフレ率（対前年度）は将来を含めて 0%とする。支払保険金はその支払年度の貨幣価値によるものとし、2018 年度末の普通支払備金は 2019 年度のインフレ率 10%を加味して算出済の値である。

また、計算の途中において、事故年度、経過年数別のロスディベロップメントを作成する際、 n 事故年度分の $n+k$ 事業年度の支払保険金および年度末普通支払備金は下表のとおり事故年度からの経過年数 $k+1$ 年目のデータとし、ロスディベロップメントファクターについては小数点以下第 4 位を四捨五入して小数点以下第 3 位までの数値を用い、支払保険金・支払備金については小数点以下第 1 位を四捨五入して整数値を用いるものとする。

事業年度	支払保険金									
	2015 事故年度分	2016 事故年度分		2017 事故年度分		2018 事故年度分		2019 事故年度分		
		経過年数	経過年数	経過年数	経過年数	経過年数	経過年数	経過年数		
2015	1,462	1,462	1 年							
2016	1,785	546	2 年	1,239	1 年					
2017	2,242	293	3 年	638	2 年	1,311	1 年			
2018	2,583	316	4 年	480	3 年	544	2 年	1,243	1 年	
2019	2,864	0	5 年	146	4 年	461	3 年	551	2 年	1,706 1 年

事業年度	年度末普通支払備金									
	2015 事故年度分	2016 事故年度分		2017 事故年度分		2018 事故年度分		2019 事故年度分		
		経過年数	経過年数	経過年数	経過年数	経過年数	経過年数	経過年数		
2015	626	626	1 年							
2016	887	356	2 年	531	1 年					
2017	1,199	247	3 年	390	2 年	562	1 年			
2018	976	0	4 年	58	3 年	332	2 年	586	1 年	
2019	1,090	0	5 年	0	4 年	52	3 年	307	2 年	731 1 年

(1) ロスディベロップメントから判断した場合、特殊な大口の I B N R 損害が発生していると考えられる事故年度および事業年度の組み合わせとして最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| (A) 2015 事故年度の 2016 事業年度時点 | (B) 2015 事故年度の 2017 事業年度時点 |
| (C) 2015 事故年度の 2018 事業年度時点 | (D) 2015 事故年度の 2019 事業年度時点 |
| (E) 2016 事故年度の 2017 事業年度時点 | (F) 2016 事故年度の 2018 事業年度時点 |
| (G) 2016 事故年度の 2019 事業年度時点 | (H) 2017 事故年度の 2018 事業年度時点 |
| (I) 2017 事故年度の 2019 事業年度時点 | (J) 2018 事故年度の 2019 事業年度時点 |

(2) 事故年度、経過年数別の累計発生保険金のロスディベロップメントを作り、それを用いて、チェインラダー法により事故年度別の最終累計発生保険金を推定した場合、2019 事故年度最終累計発生保険金に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、ロスディベロップメントファクターの予測値としては、既知の対応する事故年度別ロスディベロップメントファクター (ただし、(1)における特殊な大口の I B N R 損害が発生した事故年度のデータは全ての経過時点から除く) の単純平均値を用いること。

- | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| (A) 2,900 | (B) 2,925 | (C) 2,950 | (D) 2,975 | (E) 3,000 |
| (F) 3,025 | (G) 3,050 | (H) 3,075 | (I) 3,100 | (J) 3,125 |

Ⅲ. あるリスクの損害額 X は、平均 2λ の指数分布に従っている。このリスクを補償する保険商品に、以下の条件を追加することを考える。

㉞ フランチャイズ方式の免責金額 λ を設定し、損害保険金を支払う。

㉟ 損害保険金の $\alpha\%$ ($\alpha > 0$) を費用保険金として支払う。ただし、損害保険金が 2λ 以上の場合、費用保険金は $0.02\alpha\lambda$ とする。

この商品は、条件㉞の免責金額だけを設定した場合、免責金額も費用保険金も設定しない場合と比較して、1 事故あたりの支払保険金の期待値は 倍になる。

また、条件㉞の免責金額および条件㉟の費用保険金を設定した場合、1 事故あたりの支払保険金の期待値は免責金額も費用保険金も設定しない場合と一致した。このとき α は になる。なお、免責金額には費用保険金部分を含まないこととする。

①および②に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、期待値の計算においては、保険会社の支払対象とならない事故についても含めるものとする。また、必要があれば、 $e^{-1} = 0.368$ を使用すること。

【①の選択肢】

- | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| (A) 0.81 | (B) 0.83 | (C) 0.85 | (D) 0.87 | (E) 0.89 |
| (F) 0.91 | (G) 0.93 | (H) 0.95 | (I) 0.97 | (J) 0.99 |

【②の選択肢】

- | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| (A) 15 | (B) 17 | (C) 19 | (D) 21 | (E) 23 |
| (F) 25 | (G) 27 | (H) 29 | (I) 31 | (J) 33 |

IV. ある保険商品の支払保険金総額 S が、区間 (α, β) において、 $\Pr(\alpha < S < \beta) = 0$ となる場合、次の

(1)、(2) の各問に答えなさい。なお、 S は連続型確率変数とする。

(1) $\alpha < k < \beta$ において、エクセスポイントを k とするストップロス再保険のネット再保険料 $E(I_k)$

は次のように表せる。

$$E(I_k) = \frac{\boxed{\text{①}}}{\boxed{\text{②}}} \times E(I_\alpha) + \frac{\boxed{\text{③}}}{\boxed{\text{④}}} \times E(I_\beta)$$

①～④に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

- | | | | | |
|-----------------|----------------------|------------------|-----------------|------------------|
| (A) 1 | (B) α | (C) β | (D) k | (E) $1 - \alpha$ |
| (F) $1 - \beta$ | (G) $1 - k$ | (H) $\alpha - k$ | (I) $\beta - k$ | (J) $k - \alpha$ |
| (K) $k - \beta$ | (L) $\beta - \alpha$ | (M) いずれにも該当しない | | |

(2) $\alpha = 80$ 、 $\beta = 100$ 、 $E(I_\alpha) = 20$ 、 $E(I_\beta) = 15$ となる場合、支払保険金総額 S が 80 以下となる確率に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

- | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| (A) 0.40 | (B) 0.45 | (C) 0.50 | (D) 0.55 | (E) 0.60 |
| (F) 0.65 | (G) 0.70 | (H) 0.75 | (I) 0.80 | (J) 0.85 |

問題 3. 次の I～V の各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
I～III:各 8 点 IV、V:各 9 点 (計 42 点)

I. 確率変数の従属性に関し、次の (1)、(2) の各問に答えなさい。

(1) 連続型確率変数 X_1 、 X_2 について、 (X_1, X_2) の同時分布関数を $F(x_1, x_2)$ 、 X_1 および X_2 の周辺分布関数をそれぞれ $F_1(x_1)$ 、 $F_2(x_2)$ とする。なお、 $E(X_1)$ 、 $E(X_2)$ 、 $E(X_1X_2)$ はすべて有限であるとする。このとき、 X_1 、 X_2 の共分散 $Cov(X_1, X_2)$ は、

$$Cov(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{F(x_1, x_2) - F_1(x_1)F_2(x_2)\} dx_1 dx_2$$

と表せる。この式から、 X_1 、 X_2 の分散が 0 でない有限値であるとき、 X_1 、 X_2 の相関係数 (ピアソンの積率相関係数) を ρ とすると、ある ρ_{\min} 、 ρ_{\max} が存在して、 ρ のとり得る値の範囲は、 $\rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max}$ となることがわかる。

ここで、 $\rho = \rho_{\min}$ となるような場合を考える。このときの X_1 と X_2 の同時分布のコピュラの名称は 、 X_1 と X_2 の同時分布のコピュラの式は となる。①、②に入る適切なものは、
選択肢のうちのどれか。

【①の選択肢】

- (A) 共単調コピュラ (B) 反単調コピュラ (C) 積コピュラ

【②の選択肢】

- (A) $C(u_1, u_2) = \max(u_1, u_2)$ (B) $C(u_1, u_2) = \min(u_1, u_2)$
 (C) $C(u_1, u_2) = \max(u_1 - u_2 - 1, 0)$ (D) $C(u_1, u_2) = \max(u_1 - u_2 + 1, 0)$
 (E) $C(u_1, u_2) = \max(u_1 + u_2 - 1, 0)$ (F) $C(u_1, u_2) = \max(u_1 + u_2 + 1, 0)$
 (G) $C(u_1, u_2) = \min(u_1 - u_2 - 1, 0)$ (H) $C(u_1, u_2) = \min(u_1 - u_2 + 1, 0)$
 (I) $C(u_1, u_2) = \min(u_1 + u_2 - 1, 0)$ (J) $C(u_1, u_2) = \min(u_1 + u_2 + 1, 0)$
 (K) $C(u_1, u_2) = u_1 u_2$

(2) ある保険会社の2つの保険商品1、2の支払保険金単価 Y_1 、 Y_2 について、 $\log Y_1$ は標準正規分布 $N(0,1)$ に従い、 $\log Y_2$ は期待値0、標準偏差2の正規分布 $N(0,2^2)$ に従うことがわかっている。 Y_1 と Y_2 の従属性によって Y_1 と Y_2 の相関係数は異なるが、相関係数が最小になる場合を考えると、相関係数のとり得る最小値は となる。また、このとき、 Y_1 と Y_2 のケンドールの τ は となる。③、④に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、必要があれば、 $e = 2.718$ を使用すること。

【③の選択肢】

- | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| (A) -1.0 | (B) -0.9 | (C) -0.8 | (D) -0.7 | (E) -0.6 |
| (F) -0.5 | (G) -0.4 | (H) -0.3 | (I) -0.2 | (J) -0.1 |

【④の選択肢】

- | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| (A) -1.0 | (B) -0.8 | (C) -0.6 | (D) -0.4 | (E) -0.2 |
| (F) 0.0 | (G) 0.2 | (H) 0.4 | (I) 0.6 | (J) 0.8 |
| (K) 1.0 | | | | |

II. ある保険会社は k 件の保険契約を引き受けており、各契約の保険金額 A は、確率密度関数が

$f(a) = \frac{1}{30} (10 \leq a \leq 40)$ で表わされる一様分布に従うとみなすことができるものとする。また、各契約の年間クレーム件数 N は平均 3 のポアソン分布に従い、 $A = a$ の条件の下での元受クレーム額 X は

確率密度関数が $f(x) = \left(\frac{\gamma}{\beta}\right) \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\gamma-1} (0 \leq x \leq \beta)$ で表わされる分布に従うものとする。ここで、 $\beta = a$ 、

$$\gamma = \frac{\sqrt{a}}{a - \sqrt{a}} \text{ とする。}$$

この保険会社の保有限度額は 10 であり、以下の特約の再保険を手配している。

- ① 出再限度額 15 の超過額再保険
- ② エクセスポイント 10、カバーリミット 15 の超過損害額再保険 (①を適用後の保有部分に適用される。)

このとき、次の (1)、(2) の各問に答えなさい。なお、複数の契約において、同時に事故が発生することはないものとする。

(1) 超過額再保険からの年間の再保険金回収額の期待値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

- (A) $6.52k$ (B) $6.62k$ (C) $6.72k$ (D) $6.82k$ (E) $6.92k$
 (F) $7.02k$ (G) $7.12k$ (H) $7.22k$ (I) $7.32k$ (J) $7.42k$

(2) $A = \alpha (25 \leq \alpha \leq 40)$ の契約において、超過損害額再保険からの回収が 1 年間に発生する確率として最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。

- (A) $e^{3\left(\frac{10}{\alpha-10}\right)^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha-\sqrt{\alpha}}}}$ (B) $e^{3\left(\frac{10}{\alpha-15}\right)^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha-\sqrt{\alpha}}}}$ (C) $e^{3\left(\frac{15}{\alpha-15}\right)^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha-\sqrt{\alpha}}}}$ (D) $e^{3\left(\frac{10}{\alpha-10}\right)^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha-\sqrt{\alpha}}}-3}$
 (E) $e^{3\left(\frac{10}{\alpha-15}\right)^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha-\sqrt{\alpha}}}-3}$ (F) $e^{3\left(\frac{15}{\alpha-15}\right)^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha-\sqrt{\alpha}}}-3}$ (G) $1 - e^{3\left(\frac{10}{\alpha-10}\right)^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha-\sqrt{\alpha}}}}$ (H) $1 - e^{3\left(\frac{10}{\alpha-15}\right)^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha-\sqrt{\alpha}}}}$
 (I) $1 - e^{3\left(\frac{15}{\alpha-15}\right)^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha-\sqrt{\alpha}}}}$ (J) $1 - e^{3\left(\frac{10}{\alpha-10}\right)^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha-\sqrt{\alpha}}}-3}$ (K) $1 - e^{3\left(\frac{10}{\alpha-15}\right)^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha-\sqrt{\alpha}}}-3}$ (L) $1 - e^{3\left(\frac{15}{\alpha-15}\right)^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha-\sqrt{\alpha}}}-3}$

(M) いずれにも該当しない

Ⅲ. ある保険商品の年間の総支払保険金 S について、以下の事項を前提とする。

- S は a または b の 2 値のみをとり得る確率変数である。
ここで、 a および b はともに 0 以上 5 以下を満たす実数とする。
- S の期待値は $E(S) = 1$ 、分散は $V(S) = 2$ である。

このとき、次の (1)、(2) の各問に答えなさい。

(1) 仮に $b = 4$ としたとき、 a の値は であり、 S が b となる確率は である。

①、②に当てはまる数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

【①の選択肢】

- | | | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| (A) $\frac{1}{2}$ | (B) $\frac{1}{3}$ | (C) $\frac{1}{4}$ | (D) $\frac{1}{5}$ | (E) $\frac{1}{6}$ |
| (F) $\frac{1}{7}$ | (G) $\frac{1}{8}$ | (H) $\frac{1}{9}$ | (I) $\frac{1}{10}$ | (J) $\frac{1}{11}$ |

【②の選択肢】

- | | | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|---------------------|
| (A) $\frac{1}{11}$ | (B) $\frac{2}{11}$ | (C) $\frac{3}{11}$ | (D) $\frac{4}{11}$ | (E) $\frac{5}{11}$ |
| (F) $\frac{6}{11}$ | (G) $\frac{7}{11}$ | (H) $\frac{8}{11}$ | (I) $\frac{9}{11}$ | (J) $\frac{10}{11}$ |

(2) この保険商品にエクセスポイント 2 のストップロス再保険を手配する。 a および b が問題文の条件を満たす範囲で動くとき、ネット再保険料のとり得る最大値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

- | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| (A) 0.365 | (B) 0.375 | (C) 0.385 | (D) 0.395 | (E) 0.405 |
| (F) 0.415 | (G) 0.425 | (H) 0.435 | (I) 0.445 | (J) 0.455 |

IV. 信頼性理論について、次の (1)、(2) の各問に答えなさい。

(1) 以下の条件の下で、 $\mu(\Theta)$ の推定量について考える。

- あるリスクに関する n 年間の各年の事故件数を確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n とする。(エクスポージャは同一)
- 確率変数 X_i はあるパラメータによっており、 $\Theta = \theta$ の条件付きの期待値および分散を、それぞれ、 $E[X_i | \Theta = \theta] = \mu(\theta)$ 、 $V[X_i | \Theta = \theta] = \sigma^2(\theta)$ とする。また、 X_1, X_2, \dots, X_n は θ の条件付きの下では互いに独立である。
- Θ はある分布 U に従い、 $\mu(\Theta)$ の期待値は μ (これは集団全体の全平均になる) である。

ここで、 $\mu(\Theta)$ の推定量を $\hat{P}_{n+1} = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i$ としたとき、 $E\left[\left(X_{n+1} - \left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i\right)\right)^2\right]$ を最小化

する a_0, a_1, \dots, a_n を求める。上式を $a_0, a_j (j=1, \dots, n)$ で偏微分した式をゼロとすると、次の方程式が得られる。

$$a_0 + \sum_{i=1}^n \boxed{\text{①}} = E[X_{n+1}] \cdots \cdots \cdots \text{⑦}$$

$$a_0 E[X_j] + \sum_{i=1}^n \boxed{\text{②}} = E[X_j X_{n+1}] \cdots \cdots \cdots \text{⑧}$$

$$\text{⑦に } E[X_j] \text{ を乗じて、⑧を差し引くことで、} \sum_{i=1}^n \boxed{\text{③}} = \text{Cov}[X_j, X_{n+1}] \cdots \cdots \text{⑨}$$

が得られる。

$i \neq j$ のとき、条件付きモーメントの関係から、

$$\text{Cov}[X_i, X_j] = \text{Cov}[E(X_i | \Theta), E(X_j | \Theta)] + E[\text{Cov}(X_i, X_j | \Theta)] = \boxed{\text{④}} \text{ となること}$$

を用い、⑨について $j=1, \dots, n$ に対する連立方程式を解くと、 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ かつ、

$$a_j = \frac{V[\mu(\Theta)]}{nV[\mu(\Theta)] + E[\sigma^2(\Theta)]} \quad (j=1, \dots, n) \text{ となる。}$$

さらに、 $na_j = Z (j=1, \dots, n)$ とすると、⑦から、 $a_0 = (1-Z)\mu$ となる。

以上より、 \hat{P}_{n+1} ($= X_{n+1}$ の推定量) が得られる。

①～④に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちどれか。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

【①～③の選択肢】

- (A) $E[X_i]$ (B) $a_i E[X_i]$ (C) $a_i E[X_j]$ (D) $E[X_i X_j]$
 (E) $a_i E[X_i X_j]$ (F) $E[X_i] E[X_j]$ (G) $a_i E[X_i] E[X_j]$ (H) $Cov[X_i, X_j]$
 (I) $a_i Cov[X_i, X_j]$ (J) いずれにも該当しない

【④の選択肢】

- (A) $E[\mu(\Theta)]$ (B) $V[\mu(\Theta)]$ (C) $E[\mu^2(\Theta)]$ (D) $V[\mu^2(\Theta)]$
 (E) $E[\sigma(\Theta)]$ (F) $V[\sigma(\Theta)]$ (G) $E[\sigma^2(\Theta)]$ (H) $V[\sigma^2(\Theta)]$
 (I) いずれにも該当しない

(2) ある保険契約の各契約者の 1 年間のクレーム件数の分布は、互いに独立にポアソン分布に従うとする。ただし、ポアソン分布のパラメータには、 λ_1, λ_2 (ともに値は既知) の 2 通りの可能性があり、契約者ごとにパラメータは一定であるが、各契約者のクレーム件数がどちらのパラメータのポアソン分布に従っているかは未知である。また、契約者を無作為に抽出したとき、その契約者のパラメータが λ_1 である確率は、 p (値は既知) であることがわかっている。いま、無作為に抽出した契約者の過去 2 年間のクレーム件数 X_1, X_2 がそれぞれ x_1, x_2 であったとき、この契約者の翌年のクレーム件数を推定したい。

$\lambda_1 = 2$ 、 $\lambda_2 = 5$ 、 $p = 0.3$ 、 $x_1 = 4$ 、 $x_2 = 2$ のとき、Bühlmann モデルを用いてクレーム件数を推定する場合、この契約者の翌年のクレーム件数は 件、ベイズ方法論を用いてクレーム件数を推定する場合、この契約者の翌年のクレーム件数は 件と推定される。⑤、⑥に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちどれか。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。また、必要があれば、 $e^{-1} = 0.368$ を使用すること。

- (A) 2.40 (B) 2.55 (C) 2.70 (D) 2.85 (E) 3.00
 (F) 3.15 (G) 3.30 (H) 3.45 (I) 3.60 (J) 3.75

V. ある契約者のクレームは、個々のクレーム額 X が平均 4 の指数分布に従い、クレーム件数過程

$\{N_t\}_{t \geq 0}$ が以下の条件を満たすような、連続時間型のクレーム総額過程 $\{S_t\}_{t \geq 0}$ に従うものとする。

- $0 \leq s < t \leq u < v \Rightarrow N_t - N_s$ と $N_v - N_u$ は独立
- 同一時刻に 2 件以上のクレームが発生することはない
- オペレーショナル・タイム $\tau(t) = -\log P(N_t = 0)$ は次のとおり表される

$$\tau(t) = t/3$$

このとき、次の (1) ~ (3) の各問に答えなさい。なお、必要があれば、 $e = 2.718$ を使用すること。

(1) 時刻 $t = 9$ における累計クレーム総額の期待値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

- | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| (A) 4 | (B) 6 | (C) 8 | (D) 10 | (E) 12 |
| (F) 14 | (G) 16 | (H) 18 | (I) 20 | (J) 22 |

(2) 当該契約者からのクレームに対し、1 件目の事故は免責金額 0、2 件目以降の事故はエクセス方式の免責金額 2 を導入することとした。このとき、時刻 $t = 9$ における累計保険金支払総額の期待値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

- | | | | | |
|---------|---------|---------|----------|----------|
| (A) 6.3 | (B) 6.8 | (C) 7.3 | (D) 7.8 | (E) 8.3 |
| (F) 8.8 | (G) 9.3 | (H) 9.8 | (I) 10.3 | (J) 10.8 |

(3) n 件目の保険金が支払われるクレームが発生した時刻を T_n とする (保険金を支払わないクレームは、件数にカウントしないことに注意) と、(2) の免責金額を導入した場合における、 T_2 の期待値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

- | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| (A) 7.0 | (B) 7.3 | (C) 7.6 | (D) 7.9 | (E) 8.2 |
| (F) 8.5 | (G) 8.8 | (H) 9.1 | (I) 9.4 | (J) 9.7 |

余白ページ

問題 4. 次の問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。 (11点)

ある保険商品のクレーム額 X が、対数正規分布 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 x}} \exp\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ ($0 < x$) に従

っており、クレームデータ 5 件が以下のとおり記録されている。

30 , 900 , 180 , 150 , 300

上記 5 件のクレームデータを用いて最尤法によりパラメータ μ, σ を推定する。このとき、次の (1) ~ (3) の各問に答えなさい。

(1) μ の最尤推定値は であり、 σ の最尤推定値は である。①、②に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、必要があれば、 $\log 2 = 0.693$ 、 $\log 3 = 1.099$ 、 $\log 5 = 1.609$ を使用すること。

【①の選択肢】

(A) 5.0 (B) 5.1 (C) 5.2 (D) 5.3 (E) 5.4
(F) 5.5 (G) 5.6 (H) 5.7 (I) 5.8 (J) 5.9

【②の選択肢】

(A) 1.0 (B) 1.1 (C) 1.2 (D) 1.3 (E) 1.4
(F) 1.5 (G) 1.6 (H) 1.7 (I) 1.8 (J) 1.9

(2) 最尤推定量 $\hat{\theta}$ の漸近分布は、 θ の真の値が θ_0 であるとき、多(k)次元正規分布 $N_k(\theta_0, (I(\theta_0))^{-1})$ となることを用いて、 μ, σ の 90%信頼区間を求める。($^{-1}$ は逆行列を表す。)

標本数 n のとき、フィッシャー情報行列 $I(\mu, \sigma)$ は、 $I(\mu, \sigma) = \begin{pmatrix} \textcircled{3} & \textcircled{4} \\ \textcircled{5} & \textcircled{6} \end{pmatrix}$ となることを用いると、

μ の 90%信頼区間の上限値は であり、 σ の 90%信頼区間の上限値は である。なお、 μ, σ の真なる値は未知であるため、 μ, σ の値には (1) で選択肢から選んだ最尤推定値 (小数点以下第 1 位までの数値) を用いることとする。③~⑥に当てはまる最も適切なもの、および⑦、⑧に当てはまる数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。また、必要があれば下表 (標準正規分布の上側 ε 点) の数値を使用すること。

<表> 標準正規分布の上側 ε 点 : $u(\varepsilon)$

ε	0.100	0.075	0.050	0.025
$u(\varepsilon)$	1.282	1.440	1.645	1.960

【③～⑥の選択肢】

- (A) 0 (B) n (C) σ (D) $n\sigma$ (E) $2n\sigma$
- (F) $n\sigma^2$ (G) $2n\sigma^2$ (H) $\frac{n}{\sigma}$ (I) $\frac{2n}{\sigma}$ (J) $\frac{n}{2\sigma}$
- (K) $\frac{n}{\sigma^2}$ (L) $\frac{2n}{\sigma^2}$ (M) $\frac{n}{2\sigma^2}$ (N) $\frac{\sigma}{n}$ (O) $\frac{2\sigma}{n}$
- (P) $\frac{\sigma}{2n}$ (Q) $\frac{\sigma^2}{n}$ (R) $\frac{2\sigma^2}{n}$ (S) $\frac{\sigma^2}{2n}$
- (T) いずれにも該当しない

【⑦の選択肢】

- (A) 5.5 (B) 5.6 (C) 5.7 (D) 5.8 (E) 5.9
- (F) 6.0 (G) 6.1 (H) 6.2 (I) 6.3 (J) 6.4

【⑧の選択肢】

- (A) 1.5 (B) 1.6 (C) 1.7 (D) 1.8 (E) 1.9
- (F) 2.0 (G) 2.1 (H) 2.2 (I) 2.3 (J) 2.4

(3) 最尤推定量の漸近分布を用いて、クレーム額が $\exp(5.75)$ を超える確率の 90%信頼区間を求めた場合、90%信頼区間の上限値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、 μ, σ の真なる値は未知であるため、 μ, σ の値には (1) で選択肢から選んだ最尤推定値 (小数点以下第 1 位までの数値) を用いることとする。また、必要があれば、(2) の表の数値、 $e^{-1} = 0.368$ 、円周率 $\pi = 3.142$ 、および下表 (標準正規分布の上側 ε 点) の数値を使用すること。

<表> 標準正規分布の上側 ε 点 : $u(\varepsilon)$

ε	0.309	0.159	0.077	0.023
$u(\varepsilon)$	0.5	1.0	1.5	2.0

- (A) 0.495 (B) 0.505 (C) 0.515 (D) 0.525 (E) 0.535
- (F) 0.545 (G) 0.555 (H) 0.565 (I) 0.575 (J) 0.585

以上

損保数理（解答例）

問題 1

I.

(1) a **5** b **3** c **1** (a~cは完答) (2) d **2** e **1** f **9** (d~fは完答)

[(1) 2点 (2) 2点]

(1)

以下、金額の単位はすべて千円とする。

2019 年度アーンドプレミアム

$$\begin{aligned} &= 2018 \text{ 年度末未経過保険料} + 2019 \text{ 年度リトンプレミアム} - 2019 \text{ 年度末未経過保険料} \\ &= 70,000 + (200,000 + 10,000 - 20,000) - 100,000 \\ &= 160,000 \end{aligned}$$

2019 年度インカードロス

$$= 2019 \text{ 年度末支払備金} + 2019 \text{ 年度ペイドロス} - 2018 \text{ 年度末支払備金}$$

となるが、各項の値は以下のとおり計算できる。

$$2019 \text{ 年度末支払備金} : 30,000 + 50,000 + 25,000 = 105,000 \quad (\text{クレーム No. 2,3,5})$$

$$2019 \text{ 年度ペイドロス} : 60,000 + 10,000 = 70,000 \quad (\text{クレーム No. 1,4})$$

$$2018 \text{ 年度末支払備金} : 40,000 + 30,000 + 20,000 = 90,000 \quad (\text{クレーム No. 1,2,3})$$

以上より、2019 年度インカードロスは、

$$105,000 + 70,000 - 90,000 = 85,000$$

となる。

したがって、2019 年度のアーンドベース損害率（会計年度統計ベース）は、

$$\frac{85,000}{160,000} = 53.1\%$$

となる。

(2)

2019 年度アーンドプレミアムは (1) と同じである。

インカードロスについて、会計年度一事故年度統計における 2019 年度インカードロスは、2019 年度中に発生した事故に基づくペイドロスと支払備金の合計であり、

$$10,000 + 25,000 = 35,000 \quad (\text{クレーム No. 4,5})$$

である。

したがって、2019年度のアンドベース損害率（会計年度－事故年度統計ベース）は、

$$\frac{35,000}{160,000} = 21.9\%$$

となる。

II.

(D) [4 点]

保険料を P とすると、求める額は、保険を購入する場合の効用 $u(100 - P)$ と保険を購入しない場合の期待効用 $E(u(100 - X))$ が一致する場合である。それぞれ、

$$E(u(100 - X)) = E(-\exp(-0.1(100 - X))) = -\exp(-10) \times M_X(0.1)$$

$$u(100 - P) = -\exp(-10) \times \exp(0.1P)$$

であることから、求める保険料 P は

$$-\exp(-10) \times M_X(0.1) = -\exp(-10) \times \exp(0.1P)$$

より、 $P = 10 \times \log(M_X(0.1))$ となる。

クレーム件数を表す確率変数を N 、1 事故あたりのクレーム額を表す確率変数を Y とすると、

$$M_X(t) = M_N(\log M_Y(t))$$

$$= \exp\{3(M_Y(t) - 1)\}$$

$$= \exp\left\{3\left(\frac{1}{1-4t} - 1\right)\right\} \quad \left(t < \frac{1}{4}\right)$$

であるから、

$$M_X(0.1) = \exp\left(3\left(\frac{1}{1-0.4} - 1\right)\right) = \exp(2)$$

と表され、これを代入すると、

$$P = 10 \times 2 = 20$$

と求められる。

Ⅲ.

(F) [4点]

1年間の保険金支払総額の発生確率は下表のとおりとなる。

保険金支払 総額 (万円)	事故件数			発生確率
	0件	1件	2件	
0	0.5			0.5
1,500		0.15		0.15
3,000		0.09	0.05	0.14
4,500		0.06	0.06	0.12
6,000			0.058	0.058
7,500			0.024	0.024
9,000			0.008	0.008

また、 $N+1$ 年度末のサープラスは、以下のとおりとなる。

$800 + 5,000 - 1,000$ (社費) $- 1,000$ (代理店手数料) $-$ (保険金支払総額) $- 1,000$ (事故件数が0件の場合の無事故戻し)

$= 3,800 -$ (保険金支払総額) $- 1,000$ (事故件数が0件の場合の無事故戻し)

サープラス (万円)	発生確率
2,800	0.5
2,300	0.15
800	0.14
-700	0.12
-2,200	0.058
-3,700	0.024
-5,200	0.008

したがって、 $N+1$ 年度末までの破産確率は $0.12 + 0.058 + 0.024 + 0.008 = 0.21$ となる。

次に、 $N+1$ 年度末でサープラスがプラスだった場合の、 $N+2$ 年度末のサープラスは下表のとおりとなる。

$N+1$ 年度末の サープラス (万円)	発生 確率	$N+2$ 年度末の サープラス (万円)
2,800	0.5	$5,800 -$ (保険金支払総額) $- 1,000$ (事故件数が0件の場合)
2,300	0.15	$5,300 -$ (保険金支払総額) $- 1,000$ (事故件数が0件の場合)
800	0.14	$3,800 -$ (保険金支払総額) $- 1,000$ (事故件数が0件の場合)

$N+1$ 年度末でサープラスがプラスだった場合に、 $N+2$ 年度末のサープラスがマイナスとなる確率は以下のとおりとなる。

$$0.5 \times (0.058 + 0.024 + 0.008) + 0.15 \times (0.058 + 0.024 + 0.008) + 0.14 \times (0.12 + 0.058 + 0.024 + 0.008) = 0.0879$$

したがって、 $N+2$ 年度末までの破産確率は $0.21 + 0.0879 = 30\%$ となる。

IV.

(1) (D) (2) (A) [(1) 2点 (2) 2点]

(1)

$$P(X) = \log M_X(h)/h = \frac{\log e^{\mu_X h + \frac{\sigma_X^2 h^2}{2}}}{h} = \frac{1}{h} \left(\mu_X h + \frac{\sigma_X^2 h^2}{2} \right) \text{となり、} \mu_X = \alpha^2, \sigma_X^2 = h = \alpha \text{を代入して、}$$

$$P(X) = \frac{1}{\alpha} \left(\alpha^3 + \frac{\alpha^3}{2} \right) = \frac{3}{2} \alpha^2$$

$$P(Y) = \frac{E(Ye^{hY})}{E(e^{hY})} = \frac{M'_Y(h)}{M_Y(h)} = (\log M_Y(h))' = \mu_Y + h\sigma_Y^2 \text{となり、} \mu_Y = 2\alpha^2, \sigma_Y^2 = 2\alpha, h = \alpha \text{を代入して、}$$

$$P(Y) = 2\alpha^2 + 2\alpha^2 = 4\alpha^2$$

$$\text{したがって、} |P(X) - P(Y)| = \left| \frac{3}{2} \alpha^2 - 4\alpha^2 \right| = \frac{5}{2} \alpha^2$$

(2)

イ 正しい：対数正規分布には積率母関数が存在しないため、指数原理およびエッシャー原理による保険料の算出値は存在しない。(テキスト 7-2,3,10)

ロ 正しい (テキスト 7-20)

ハ 正しい (テキスト 7-6)

V.

(1) (C) (2) (A) [(1) 1点 (2) 4点]

(1)

テキスト 4-9~4-12 のとおり

(2)

各リスク区分のクレームコスト $R_{ij} = \frac{C_{ij}}{E_{ij}}$ および相対クレームコスト指数 $r_{ij} = \frac{R_{ij}}{R_{..}}$ を計算すると、

<クレームコスト R_{ij} >

	耐火	非耐火	計
地域A	0.600	1.200	0.750
地域B	0.820	1.100	0.925
計	0.655	1.163	0.800

<相対クレームコスト指数 r_{ij} >

	耐火	非耐火	計
地域A	0.750	1.500	0.938
地域B	1.025	1.375	1.156
計	0.819	1.454	1.000

各リスク区分のエクスポージャを E_{ij} 、相対クレームコスト指数の推定値を \hat{r}_{ij} としたとき、Minimum

Bias 法における満たすべき条件は、次の連立方程式のようになる。

$$E_{11}(r_{11} - \hat{r}_{11}) + E_{12}(r_{12} - \hat{r}_{12}) = 0$$

$$E_{21}(r_{21} - \hat{r}_{21}) + E_{22}(r_{22} - \hat{r}_{22}) = 0$$

$$E_{11}(r_{11} - \hat{r}_{11}) + E_{21}(r_{21} - \hat{r}_{21}) = 0$$

$$E_{12}(r_{12} - \hat{r}_{12}) + E_{22}(r_{22} - \hat{r}_{22}) = 0$$

この連立方程式において、 C を定数として、

$$E_{11}(r_{11} - \hat{r}_{11}) = E_{22}(r_{22} - \hat{r}_{22}) = C$$

$$E_{21}(r_{21} - \hat{r}_{21}) = E_{12}(r_{12} - \hat{r}_{12}) = -C$$

と表すことができる。

この分類リスクの構造が加法型であることから、各相対クレームコスト指数の推定値は料率係数を用いて、 $\hat{r}_{ij} = x_i + y_j$ ($i=1,2$ $j=1,2$)と表される。

これを、上記の連立方程式に代入して整理すると、

$$x_1 + y_1 = r_{11} - \frac{C}{E_{11}} \quad \cdots (a), \quad x_1 + y_2 = r_{12} + \frac{C}{E_{12}} \quad \cdots (b)$$

$$x_2 + y_1 = r_{21} + \frac{C}{E_{21}} \quad \cdots (c), \quad x_2 + y_2 = r_{22} - \frac{C}{E_{22}} \quad \cdots (d)$$

となる。 $(a)+(d)=(b)+(c)$ より、

$$\left(r_{11} - \frac{C}{E_{11}}\right) + \left(r_{22} - \frac{C}{E_{22}}\right) = \left(r_{12} + \frac{C}{E_{12}}\right) + \left(r_{21} + \frac{C}{E_{21}}\right)$$

$$\left(0.750 - \frac{C}{600}\right) + \left(1.375 - \frac{C}{120}\right) = \left(1.500 + \frac{C}{200}\right) + \left(1.025 + \frac{C}{200}\right)$$

$$0.750 + 1.375 - 1.500 - 1.025 = \left(\frac{1}{600} + \frac{1}{120} + \frac{1}{200} + \frac{1}{200}\right)C$$

これを解いて、 $C = -20$

$$\text{したがって、 } y_2 = -x_1 + r_{12} + \frac{C}{E_{12}} = -0.938 + 1.500 - \frac{20}{200} = 0.462$$

問題 2

I.

(1) (H) (2) (G) [(1) 4点 (2) 2点]

(1)

第 t 保険年度末の払戻積立金を ${}_tV$ 、平準式積立保険料を P_s 、第 t 保険年度の予定利息を R_t とすると、次のとおりとなる。

$$\begin{aligned}
 R_t &= (1-q)^t {}_tV - (1-q)^{t-1} {}_{t-1}V - (1-q)^{t-1} (1-d)^{t-1} P_s \\
 &= (1-q)^t W \phi^{n-t} \frac{1-\psi^t}{1-\psi^n} - (1-q)^{t-1} W \phi^{n-t+1} \frac{1-\psi^{t-1}}{1-\psi^n} - (1-q)^{t-1} (1-d)^{t-1} W \phi^n \frac{1-\psi}{1-\psi^n} \\
 &= W \phi^n \frac{1}{1-\psi^n} \left\{ (1-q)^t \frac{1-\psi^t}{v^t (1-q)^t} - (1-q)^{t-1} \frac{1-\psi^{t-1}}{v^{t-1} (1-q)^{t-1}} - \frac{\psi^{t-1} (1-\psi)}{v^{t-1}} \right\} \\
 &= W \phi^n \frac{1}{1-\psi^n} \left\{ v^{-t} (1-\psi^t) - v^{-t+1} (1-\psi^{t-1}) - v^{-t+1} (\psi^{t-1} - \psi^t) \right\} \\
 &= W \phi^n \frac{1}{1-\psi^n} \left\{ v^{-t} (1-\psi^t) - v^{-t+1} (1-\psi^t) \right\} \\
 &= W \phi^n \frac{1}{1-\psi^n} \left\{ v^{-t} (1-\psi^t) (1-v) \right\}
 \end{aligned}$$

(2)

- イ 危険保険料および付加保険料を契約者配当の算出の対象としていない。(テキスト 6-21,22)
- ロ 利回り算出対象期間中の積立保険料の運用実績をもとに、投資経費をはじめとする運用上のコスト等を考慮し決定されるものであり、契約時には決定されない。(テキスト 6-22)
- ハ 正しい (テキスト 6-4)

II.

(1) (E) (2) (H) [(1) 3点 (2) 4点]

(1)

保険金の水準を 2018 年度ベースにインフレ調整を行うと、以下のとおりとなる。

事業 年度	支払保険金					
		2015 事故年度分	2016 事故年度分	2017 事故年度分	2018 事故年度分	2019 事故年度分
2015	1,462	1,462				
2016	1,785	546	1,239			
2017	2,242	293	638	1,311		
2018	2,583	316	480	544	1,243	
2019	2,604	0	133	419	501	1,551

事業 年度	年度末普通支払備金					
		2015 事故年度分	2016 事故年度分	2017 事故年度分	2018 事故年度分	2019 事故年度分
2015	626	626				
2016	887	356	531			
2017	1199	247	390	562		
2018	888	0	53	302	533	
2019	991	0	0	47	279	665

当該データより、累計発生保険金に関する事故年度、経過年度別のロスディベロップメントを作成すると以下のとおりとなる。

事故 年度	経過年数			
	1	2	3	4
2015	2,088	2,364	2,548	2,617
2016	1,770	2,267	2,410	2,490
2017	1,873	2,157	2,321	
2018	1,776	2,023		
2019	2,216			

したがって、I B N R 損害、ロスディベロップメントファクターは以下のとおりとなる。

< I B N R 損害 >

事故年度	1 → 2	2 → 3	3 → 4
2015	276	184	69
2016	497	143	80
2017	284	164	
2018	247		

< ロスディベロップメントファクター >

事故年度	1 → 2	2 → 3	3 → 4
2015	1.132	1.078	1.027
2016	1.281	1.063	1.033
2017	1.152	1.076	
2018	1.139		

以上より、特殊な大口の I B N R 損害は、2016 事故年度の 2017 事業年度時点で認識されたものである。

(2)

適用ロスディベロップメントファクターは題意より、以下のとおりとなる。

< ロスディベロップメントファクター >

事故年度	1 → 2	2 → 3	3 → 4	
2015	1.132	1.078	1.027	
2016	1.281	1.063	1.033	除外する
2017	1.152	1.076		
2018	1.139			
	↓	↓	↓	
適用 L D F	1.141	1.077	1.027	2016 事故年度データを除く 単純平均値

したがって、2019 事故年度の最終累計発生保険金（2018 年度物価ベース）は、

$$2,216 \times 1.141 \times 1.077 \times 1.027 = 2,797$$

よって、I B N R 備金（2018 年度物価ベース）は、

$$2,797 - 2,216 = 581$$

これを2019年度物価ベースのIBNR備金に換算すると、

$$581 \times (1 + 10\%) = 639$$

以上より、2019事故年度の最終累計発生保険金（2019年度物価ベース）は、

$$1,706 + 731 + 639 = 3,076$$

Ⅲ.

① (F) ② (B) [① 2 点 ② 4 点]

①

免責金額も費用保険金も設定しない場合の 1 事故あたりの支払保険金：

$$E(X) = 2\lambda$$

免責金額だけを設定した場合の 1 事故あたりの支払保険金：

$$\int_{\lambda}^{\infty} \frac{x}{2\lambda} \exp\left(-\frac{x}{2\lambda}\right) dx$$

$$= \left[-x \exp\left(-\frac{x}{2\lambda}\right) - 2\lambda \exp\left(-\frac{x}{2\lambda}\right) \right]_{\lambda}^{\infty}$$

$$= 3\lambda \exp\left(-\frac{1}{2}\right)$$

よって、比をとると

$$\frac{3\lambda \exp\left(-\frac{1}{2}\right)}{2\lambda} = \frac{3 \exp\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = 0.91$$

②

免責金額も費用保険金も設定しない場合の 1 事故あたりの支払保険金：

$$E(X) = 2\lambda$$

免責金額と費用保険金を設定した場合の 1 事故あたりの支払保険金：

$$\left(1 + \frac{\alpha}{100}\right) \int_{\lambda}^{2\lambda} \frac{x}{2\lambda} \exp\left(-\frac{x}{2\lambda}\right) dx + \int_{2\lambda}^{\infty} \left(\frac{x}{2\lambda} + \frac{2\alpha\lambda}{100} \frac{1}{2\lambda}\right) \exp\left(-\frac{x}{2\lambda}\right) dx$$

$$= \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right) \left[-x \exp\left(-\frac{x}{2\lambda}\right) - 2\lambda \exp\left(-\frac{x}{2\lambda}\right) \right]_{\lambda}^{2\lambda} + \left[-x \exp\left(-\frac{x}{2\lambda}\right) - 2\lambda \exp\left(-\frac{x}{2\lambda}\right) - \frac{\alpha}{100} 2\lambda \exp\left(-\frac{x}{2\lambda}\right) \right]_{2\lambda}^{\infty}$$

$$= \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right) \left(-4\lambda \exp(-1) + 3\lambda \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \right) + \left(4\lambda \exp(-1) + \frac{\alpha}{100} 2\lambda \exp(-1) \right)$$

$$= 3\lambda \exp\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\alpha}{100} \left(-2\lambda \exp(-1) + 3\lambda \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \right)$$

よって、

$$2\lambda = 3\lambda \exp\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\alpha}{100} \left(-2\lambda \exp(-1) + 3\lambda \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \right)$$

$$\alpha = 100 \times \frac{2 - 3\exp\left(-\frac{1}{2}\right)}{-2\exp(-1) + 3\exp\left(-\frac{1}{2}\right)} = 17$$

IV.

(1) ① (I) ② (L) ③ (J) ④ (L) (①~④は完答) (2) (H)

[(1) 3点 (2) 4点]

(1)

ストップロス再保険のネット再保険料は、

$$E(I_k) = \int_k^{\infty} (1 - F_S(x)) dx = \int_{\alpha}^{\infty} (1 - F_S(x)) dx - \int_{\alpha}^k (1 - F_S(x)) dx \text{ と表せる。}$$

ここで、 $\Pr(\alpha < S < \beta) = 0$ より $F_S(\alpha) = F_S(k) = F_S(\beta)$ となることから、

$$\begin{aligned} E(I_k) &= \int_{\alpha}^{\infty} (1 - F_S(x)) dx - \int_{\alpha}^k (1 - F_S(\alpha)) dx \\ &= E(I_{\alpha}) - (k - \alpha)(1 - F_S(\alpha)) \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

を得る。

同様に、 $k = \beta$ とすると

$$E(I_{\beta}) = E(I_{\alpha}) - (\beta - \alpha)(1 - F_S(\alpha)) \quad \dots \textcircled{2}$$

を得る。

したがって、 $\textcircled{1} \div (k - \alpha) - \textcircled{2} \div (\beta - \alpha)$ より、

$$\begin{aligned} \frac{E(I_k)}{k - \alpha} - \frac{E(I_{\beta})}{\beta - \alpha} &= E(I_{\alpha}) \left\{ \frac{1}{k - \alpha} - \frac{1}{\beta - \alpha} \right\} \\ \Rightarrow E(I_k) &= \frac{\beta - k}{\beta - \alpha} E(I_{\alpha}) + \frac{k - \alpha}{\beta - \alpha} E(I_{\beta}) \end{aligned}$$

【別解】

$E(I_k) = \int_k^{\infty} (1 - F_S(x)) dx$ について、 $\alpha \leq x \leq \beta$ において $1 - F_S(x)$ は一定であることから、 $\alpha \leq k \leq \beta$ に

において $E(I_k)$ は k に対して線形に依存する。したがって、 $E(I_k)$ は $E(I_{\alpha})$ と $E(I_{\beta})$ の線形補間で算出

できる。

(2)

前提条件より、 $\int_{80}^{\infty} (1 - F_S(x)) dx = 20$ 、 $\int_{100}^{\infty} (1 - F_S(x)) dx = 15$ となる。

ここで、 $\Pr(80 < S < 100) = 0$ より、 $F_S(100) - F_S(80) = 0$ となることから、1番目の式から2番目の

式を引くと、 $\int_{80}^{100} (1 - F_S(x)) dx = 5$ と表すことができる。この積分範囲では、 $F_S(x) = F_S(80)$ である

ことから、 $\int_{80}^{100} (1 - F_S(x)) dx = \int_{80}^{100} (1 - F_S(80)) dx = 20(1 - F_S(80)) = 5$ となるため、支払保険金総額

S が80以下となる確率は、 $F_S(80) = 0.75$ となる。

問題 3

I.

(1) ① (B) ② (E) (①、②は完答) (2) ③ (J) ④ (A)

[(1) 3点 (2) ③ 3点 ④ 2点]

(1)

コピュラと同時分布および周辺分布には $F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$ の関係が成り立つ。

また、コピュラの大小関係として、2次元の場合においては反単調コピュラ $C^-(u_1, u_2)$ がコピュラ

$C(u_1, u_2)$ の下限となる。すなわち、任意の $0 \leq u_1 \leq 1$ 、 $0 \leq u_2 \leq 1$ に対して $C^-(u_1, u_2) \leq C(u_1, u_2)$ が成り立つ。

以上から、 X_1 と X_2 の同時分布のコピュラが反単調コピュラ $C^-(u_1, u_2) = \max(u_1 + u_2 - 1, 0)$ のとき、

$Cov(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{F(x_1, x_2) - F_1(x_1)F_2(x_2)\} dx_1 dx_2$ の被積分関数は積分の各点において最小となり、相関係数 ρ は最小となる。

(2)

Z_1, Z_2 を $N(0, 1)$ に従う確率変数として、 $Y_1 \sim e^{Z_1}$ 、 $Y_2 \sim e^{2Z_2}$ が成り立つ。ここで、 Y_1 と Y_2 の相関係数が最小となるのは、 Z_1 と Z_2 が逆符号となるとき、すなわち、 $(Y_1, Y_2) \sim (e^Z, e^{-2Z})$ となるときである。

これは以下のように確認できる。

(Y_1, Y_2) の同時分布関数を $F(y_1, y_2)$ 、 Y_1 および Y_2 の周辺分布関数をそれぞれ $F_1(y_1)$ 、 $F_2(y_2)$ とする。

$$\begin{aligned} C(F_1(y_1), F_2(y_2)) &= F(y_1, y_2) = \Pr(Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2) \\ &= \Pr(e^Z \leq y_1, e^{-2Z} \leq y_2) = \Pr\left(-\frac{1}{2} \log y_2 \leq Z \leq \log y_1\right) \\ &= \max \left\{ \Pr(Z \leq \log y_1) + \Pr\left(Z \geq -\frac{1}{2} \log y_2\right) - 1, 0 \right\} = \max \{F_1(y_1) + F_2(y_2) - 1, 0\} \end{aligned}$$

したがって、 Y_1 と Y_2 のコピュラは反単調コピュラ $C^-(u_1, u_2) = \max(u_1 + u_2 - 1, 0)$ となり、(1) より、

このとき Y_1 と Y_2 の相関係数 ρ は最小値 ρ_{\min} をとる。この値は、

$$\begin{aligned}\rho_{\min} &= \frac{\text{Cov}(e^Z, e^{-2Z})}{\sqrt{V(e^Z)}\sqrt{V(e^{-2Z})}} = \frac{E(e^{-Z}) - E(e^Z)E(e^{-2Z})}{\sqrt{V(e^Z)}\sqrt{V(e^{-2Z})}} = \frac{e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{2}}e^2}{\sqrt{e^2 - e}\sqrt{e^8 - e^4}} \\ &= \frac{e^{-2} - 1}{\sqrt{e-1}\sqrt{e^4-1}} = -0.1\end{aligned}$$

となる。

また、 Y_1 と Y_2 のコピュラは反単調コピュラであることから、 Y_1 と Y_2 のケンドールの τ は -1.0 である。

II.

(1) (A) (2) (K) [(1) 4点 (2) 4点]

(1)

$A = a$ の契約について、

1 契約あたりの年間の発生保険金の期待値は、

$$3 \times \int_0^\beta x \left(\frac{\gamma}{\beta} \right) \left(\frac{x}{\beta} \right)^{\gamma-1} dx = 3 \times \frac{\beta\gamma}{\gamma+1} = 3 \times \frac{a - \sqrt{a}}{\frac{\sqrt{a}}{a - \sqrt{a}} + 1} = 3 \times \sqrt{a}$$

となる。

$A = a$ ($10 \leq a \leq 25$) のときは超過額再保険の出再限度内であるから、 a のうち 10 が保有、 $a - 10$ が

出再され、出再割合は $\frac{a-10}{a}$ となる。この場合の 1 契約あたりの超過額再保険からの再保険金回収額の

期待値は、

$$\int_{10}^{25} \frac{1}{15} \times 3 \times \sqrt{a} \times \frac{a-10}{a} da$$

となる。

また、 $A = a$ ($25 \leq a \leq 40$) のときは出再限度を超えるので、限度額 15 が出再され、出再割合は $\frac{15}{a}$ と

なる。この場合の 1 契約あたりの超過額再保険からの再保険金回収額の期待値は、

$$\int_{25}^{40} \frac{1}{15} \times 3 \times \sqrt{a} \times \frac{15}{a} da$$

となる。

したがって、超過額再保険からの年間の再保険金回収額の期待値は、

$$\Pr(10 \leq A \leq 25) \times \int_{10}^{25} \frac{1}{15} \times 3 \times \sqrt{a} \times \frac{a-10}{a} da \times k + \Pr(25 \leq A \leq 40) \times \int_{25}^{40} \frac{1}{15} \times 3 \times \sqrt{a} \times \frac{15}{a} da \times k \\ = 6.52k$$

(2)

$A = \alpha$ ($25 \leq \alpha \leq 40$) の場合の超過額再保険出再率は $\frac{15}{\alpha}$ となるため、超過額再保険の適用は元受クレー

$$\Delta \text{額が } 10 \times \left(\frac{1}{1 - \frac{15}{\alpha}} \right) = \frac{10\alpha}{\alpha - 15} \text{ 超となる場合に、超過損害額再保険の回収が発生する。}$$

各クレームについて回収が発生しない確率は、

$$\Pr\left(X \leq \frac{10\alpha}{\alpha-15}\right) = \int_0^{\frac{10\alpha}{\alpha-15}} \left(\frac{\gamma}{\beta}\right) \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\gamma-1} dx = \left[\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\gamma}\right]_0^{\frac{10\alpha}{\alpha-15}} = \left(\frac{10}{\alpha-15}\right)^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha-\sqrt{\alpha}}}$$

となり、これを p とおく。

全てのクレームについて、回収が発生しない確率は、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Pr(N=n) p^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n e^{-3}}{n!} p^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3p)^n e^{-3p}}{n!} = e^{3p-3} = e^{3p-3}$$

したがって、1 年間に超過損害額再保険の回収が発生する確率は、

$$1 - e^{3p-3} = 1 - e^{3\left(\frac{10}{\alpha-15}\right)^{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha-\sqrt{\alpha}}} - 3}$$

Ⅲ.

(1) ① (B) ② (B) (①、②は完答) (2) (A) [(1) 4点 (2) 4点]

(1)

S は a または b の 2 値のみをとり得るため、 $E((S-a)(S-b))=0$ が成り立つ。

$$E((S-a)(S-b))=0=E(S^2)-(a+b)E(S)+ab$$

において、 $E(S^2)=V(S)+E(S)^2=3$ 、 $E(S)=1$ であるから $0=3-(a+b)+ab$ を得る。

そのため $a=\frac{b-3}{b-1}$ が成り立ち、特に $b=4$ である場合、 $a=\frac{1}{3}$ となる。なお、 $b=1$ のときは前提が満たされないため $b \neq 1$ である。

次に、 S が b となる確率を p とおくと、 S が a となる確率は $1-p$ となることから、

$$E(S)=1=(1-p)a+pb=(1-p)\frac{b-3}{b-1}+pb \text{ を得る。}$$

従って、 $p=\frac{2}{b^2-2b+3}$ が成り立ち、特に $b=4$ である場合、 $p=\frac{2}{11}$ となる。

(2)

一般性を失うことなく $a < b$ とおくことができる。 S のとり得る値の範囲が 0 以上 5 以下であることから、 a および b のとり得る値の範囲は、 $0 \leq a = \frac{b-3}{b-1} \leq \frac{1}{2}$ 、 $3 \leq b \leq 5$ となる。

この保険商品にエクセスポイント 2 のストップロス再保険を手配したとき、ネット再保険料は、

$$E(\max(S-2, 0)) = p(b-2) = \frac{2(b-2)}{b^2-2b+3} \text{ と表せる。これを } f(b) \text{ とおく。} 3 \leq b \leq 5 \text{ における } f(b) \text{ の最}$$

大値を求めればよい。

$$f'(b) = \frac{2(b^2-2b+3) - 2(b-2)(2b-2)}{(b^2-2b+3)^2} = \frac{-2b^2+8b-2}{(b^2-2b+3)^2}$$

において、 $-2b^2+8b-2=0$ の解が $b=2 \pm \sqrt{3}$ であることから、 $3 \leq b \leq 5$ における $f(b)$ の最大値は

$$f(2+\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = 0.366 \text{ となる。}$$

IV.

(1) ① (B) ② (E) ③ (I) ④ (B)

(2) ⑤ (I) ⑥ (J)

[(1) ① 1点 ② 1点 ③ 1点 ④ 1点 (2) ⑤ 2点 ⑥ 3点]

(1)

テキスト 3-34~3-36 のとおり。

(2)

Bühlmann モデルを用いた場合

契約者のクレーム件数の確率分布のパラメータを Θ とすると、 $\Pr(\Theta = \lambda_1) = p = 0.3$ 、

$\Pr(\Theta = \lambda_2) = 1 - p = 0.7$ となる。

また、

$$E[E[X | \Theta]] = E[\Theta] = p\lambda_1 + (1-p)\lambda_2 = 4.1$$

$$E[V[X | \Theta]] = E[\Theta] = 4.1$$

$$V[E[X | \Theta]] = V[\Theta] = p(1-p)(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = 1.89$$

となる。

(1) より、 $na_i = \frac{V[\mu(\Theta)]}{V[\bar{X}]} = Z$ とおくと、 $Z = \frac{n}{n + \frac{E[V(X | \Theta)]}{V[E(X | \Theta)]}}$ と書きなおすことができ、

$$n=2 \text{ より、 } Z = \frac{2}{2 + \frac{4.1}{1.89}} = 0.4797 \dots \text{ となる。}$$

したがって、過去 2 年に $x_1 = 4, x_2 = 2$ のクレームを起こした契約者の翌年のクレーム件数推定値は、

$$Z\bar{x} + (1-Z)E[E[X | \Theta]] = 3.57 \text{ となる。}$$

ベイズ方法論を用いた場合

契約者のクレーム件数の確率分布のパラメータを Θ とし、 Θ の事後分布の確率関数を $f(x)$ とすると、

$$f(\lambda_1) = \frac{\Pr[\Theta = \lambda_1] \times \Pr[X_1 = x_1 \text{ かつ } X_2 = x_2 | \Theta = \lambda_1]}{\sum_{i=1}^2 \Pr[\Theta = \lambda_i] \times \Pr[X_1 = x_1 \text{ かつ } X_2 = x_2 | \Theta = \lambda_i]} = \frac{pe^{-2\lambda_1} \lambda_1^{x_1+x_2}}{pe^{-2\lambda_1} \lambda_1^{x_1+x_2} + (1-p)e^{-2\lambda_2} \lambda_2^{x_1+x_2}}$$

$$f(\lambda_2) = \frac{(1-p)e^{-2\lambda_2} \lambda_2^{x_1+x_2}}{pe^{-2\lambda_1} \lambda_1^{x_1+x_2} + (1-p)e^{-2\lambda_2} \lambda_2^{x_1+x_2}}$$

となる。

推定値は、 Θ の事後分布の期待値 $\lambda_1 f(\lambda_1) + \lambda_2 f(\lambda_2)$ であり、各パラメータの値を代入すると、

$$\lambda_1 f(\lambda_1) + \lambda_2 f(\lambda_2) = 3.76 \text{ となる。}$$

V.

(1) (E) (2) (F) (3) (D)

[(1) 2点 (2) 3点 (3) 4点]

(1)

時刻 $t=9$ において、事故発生件数が n 件である確率は $P(N_9 = n) = \frac{3^n}{n!}e^{-3}$ と表され、これは平均3のポアソン分布である。1事故当たりの平均クレーム額が4であることから、クレーム総額の平均は $3 \times 4 = 12$ となる。

(2)

2件目以降の事故における平均クレーム額は $4e^{-0.5}$ となる。

これと、時刻 $t=9$ において、事故発生件数が n 件である確率 $P(N_9 = n) = \frac{3^n}{n!}e^{-3}$ から、クレーム総額の計算式は以下のとおり表される。

$$\begin{aligned} & e^{-3} \times 0 + 3e^{-3} \times 4 + \frac{3^2}{2!}e^{-3} \times (4 + 4e^{-0.5}) + \dots + \frac{3^k}{k!}e^{-3} \times (4 + (k-1) \times 4e^{-0.5}) + \dots \\ = & e^{-3} \times 0 + 3e^{-3} \times 4e^{-0.5} + \frac{3^2}{2!}e^{-3} \times 2 \times 4e^{-0.5} + \dots + \frac{3^k}{k!}e^{-3} \times k \times 4e^{-0.5} + \dots \\ & + e^{-3} \times (4 - 4e^{-0.5}) + 3e^{-3} \times (4 - 4e^{-0.5}) + \frac{3^2}{2!}e^{-3} \times (4 - 4e^{-0.5}) + \dots + \frac{3^k}{k!}e^{-3} \times (4 - 4e^{-0.5}) + \dots \\ & - e^{-3} \times (4 - 4e^{-0.5}) \end{aligned}$$

右辺の一行目は平均3のポアソン分布の期待値に $4e^{-0.5}$ を乗じたもの、右辺の二行目はポアソン分布の確率関数の総和に $4 - 4e^{-0.5}$ を乗じたものである。これを踏まえて右辺を整理すると、

$$\begin{aligned} & 3 \times 4e^{-0.5} + 4 - 4e^{-0.5} - e^{-3}(4 - 4e^{-0.5}) \\ = & 4 + 8e^{-0.5} - 4e^{-3} + 4e^{-3.5} \\ = & 8.8 \end{aligned}$$

(3)

2 件目以降の事故において、クレーム額が免責金額以下となる確率は $1 - e^{-0.5}$ となる。
時刻 t において、保険金が支払われるクレームが 1 件である確率は、

$$\begin{aligned} & \frac{t}{3} \exp\left(-\frac{t}{3}\right) + \frac{(t/3)^2}{2!} \exp\left(-\frac{t}{3}\right) \times (1 - e^{-0.5}) + \dots + \frac{(t/3)^k}{k!} \exp\left(-\frac{t}{3}\right) \times (1 - e^{-0.5})^{k-1} + \dots \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\left(\frac{t}{3}(1 - e^{-0.5})\right)^k}{k!} \exp\left(-\frac{t}{3}(1 - e^{-0.5})\right) \right) - \exp\left(-\frac{t}{3}(1 - e^{-0.5})\right) \right\} \times \frac{\exp\left(-\frac{t}{3}\right)}{\exp\left(-\frac{t}{3}(1 - e^{-0.5})\right) \times (1 - e^{-0.5})} \\ &= \frac{1}{1 - e^{-0.5}} \left(\exp\left(-\frac{t}{3} e^{-0.5}\right) - \exp\left(-\frac{t}{3}\right) \right) \end{aligned}$$

これを用いると、

$\Pr(T_2 \leq t) = P$ (期間 $[0, t]$ におけるクレーム発生件数が 2 件以上)

$$= 1 - \exp\left(-\frac{t}{3}\right) - \frac{1}{1 - e^{-0.5}} \left(\exp\left(-\frac{t}{3} e^{-0.5}\right) - \exp\left(-\frac{t}{3}\right) \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d \Pr(T_2 \leq t)}{dt} &= \frac{1}{3} \exp\left(-\frac{t}{3}\right) + \frac{e^{-0.5}}{3} \times \frac{1}{1 - e^{-0.5}} \exp\left(-\frac{t}{3} e^{-0.5}\right) - \frac{1}{3} \times \frac{1}{1 - e^{-0.5}} \exp\left(-\frac{t}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{e^{-0.5}}{1 - e^{-0.5}} \left(\exp\left(-\frac{t}{3} e^{-0.5}\right) - \exp\left(-\frac{t}{3}\right) \right) \end{aligned}$$

t を乗じて積分することで平均時刻を求めることができ、

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} dt \frac{t}{3} \times \frac{e^{-0.5}}{1 - e^{-0.5}} \left(\exp\left(-\frac{t}{3} e^{-0.5}\right) - \exp\left(-\frac{t}{3}\right) \right) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{e^{-0.5}}{1 - e^{-0.5}} \left(\frac{3}{e^{-0.5}} \int_0^{\infty} dt \frac{e^{-0.5} t}{3} \exp\left(-\frac{t}{3} e^{-0.5}\right) - 3 \int_0^{\infty} dt \frac{t}{3} \exp\left(-\frac{t}{3}\right) \right) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{e^{0.5} - 1} \times (9e - 9) = 3 + 3e^{0.5} = 7.9 \end{aligned}$$

※補足

1 件目の事故発生まではポアソン過程と同じであることから、1 件目発生までの平均時刻が 3 であることはすぐ求められる。加えて、本問題はオペレーショナル・タイムが t の一次関数で表されるため、次の事故までの平均時刻は、直前の事故の発生時刻に依存しない。このことを踏まえると、1 件目発生から 2 件目発生までの確率過程は、エクセス免責の導入により事故発生率が $e^{-0.5}$ 倍となり、オペレーショ

ナル・タイムが $e^{-0.5}$ 倍となったポアソン過程とみなすことができるため、1件目発生から2件目発生までの平均時刻は $3e^{0.5}$ となる。このことから直接上記の解の最終式を導くこともできる。

問題 4

(1) ① (C) ② (B)

(2) ③ (K) ④ (A) ⑤ (A) ⑥ (L) (③~⑥は完答) ⑦ (F) ⑧ (C)

(3) (J)

[(1) ① 2点 ② 2点 (2) ③~⑥ 2点 ⑦ 1点 ⑧ 1点 (3) 3点]

(1)

尤度関数 $L(\mu, \sigma)$ は

$$L(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^5 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 x_i}} \exp\left(-\frac{(\log x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

となるので、対数尤度関数 $\log L(\mu, \sigma)$ は

$$\log L(\mu, \sigma) = -\frac{5}{2} \log 2\pi - 5 \log \sigma - \sum_{i=1}^5 \log x_i - \sum_{i=1}^5 \frac{(\log x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}$$

となる。したがって、尤度方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \log L(\mu, \sigma) = \sum_{i=1}^5 \frac{(\log x_i - \mu)}{\sigma^2} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \sigma} \log L(\mu, \sigma) = -\frac{5}{\sigma} + \sum_{i=1}^5 \frac{(\log x_i - \mu)^2}{\sigma^3} = 0$$

となり、これを解くと、

$$\mu = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \log x_i = 5.2 \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 (\log x_i - \mu)^2} = 1.1$$

(2)

$$\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \log L(\mu, \sigma) = -\frac{n}{\sigma^2} \quad \frac{\partial^2}{\partial \mu \partial \sigma} \log L(\mu, \sigma) = -2 \sum_{i=1}^n \frac{(\log x_i - \mu)}{\sigma^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \log L(\mu, \sigma) = \frac{n}{\sigma^2} - 3 \sum_{i=1}^n \frac{(\log x_i - \mu)^2}{\sigma^4}$$

となり、 $\log X - \mu$ は正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従うので、

$$E\left(\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \log L(\mu, \sigma)\right) = -\frac{n}{\sigma^2}$$

$$E\left(\frac{\partial^2}{\partial \mu \partial \sigma} \log L(\mu, \sigma)\right) = 0$$

$$E\left(\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \log L(\mu, \sigma)\right) = -\frac{2n}{\sigma^2}$$

したがって、 $I(\mu, \sigma) = \begin{pmatrix} \frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{\sigma^2} \end{pmatrix}$ となる。

また、

$$I^{-1}(\mu, \sigma) = \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2} \cdot \frac{2n}{\sigma^2}} \begin{pmatrix} \frac{2n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{\sigma^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{2n} \end{pmatrix}$$

となる。 μ, σ の真の値は未知であるため、(1)で選んだ最尤推定値(小数点以下第1位までの数値)を用いるとき、 μ, σ の90%信頼区間の上限は次のとおり求められる。

$$\mu \text{ の } 90\% \text{ 信頼区間の上限 } 5.2 + u(0.050) \sqrt{\frac{1.1^2}{5}} = 5.2 + 1.645 \sqrt{\frac{1.1^2}{5}} = 6.0$$

$$\sigma \text{ の } 90\% \text{ 信頼区間の上限 } 1.1 + u(0.050) \sqrt{\frac{1.1^2}{10}} = 1.1 + 1.645 \sqrt{\frac{1.1^2}{10}} = 1.7$$

(3)

標準正規分布の分布関数を Φ 、確率密度関数を ϕ とする。

クレーム額 X が $\exp(5.75)$ を超える確率 $g(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ は、

$$g(\mu, \sigma) = \Pr(X > \exp(5.75)) = \Pr\left(\frac{\log X - \mu}{\sigma} > \frac{5.75 - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{5.75 - \mu}{\sigma}\right)$$

となる。ここで、 $A = \frac{5.75 - \mu}{\sigma}$ とおくと、

$$\frac{\partial}{\partial \mu} g(\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{5.75 - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} \phi(A)$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} g(\mu, \sigma) = \frac{5.75 - \mu}{\sigma^2} \phi\left(\frac{5.75 - \mu}{\sigma}\right) = \frac{A}{\sigma} \phi(A)$$

が成り立つことから、 $g(\mu, \sigma)$ の最尤推定量の漸近分散は、

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \frac{\partial g(\mu, \sigma)}{\partial \mu} & \frac{\partial g(\mu, \sigma)}{\partial \sigma} \end{pmatrix} I^{-1}(\mu, \sigma) \begin{pmatrix} \frac{\partial g(\mu, \sigma)}{\partial \mu} \\ \frac{\partial g(\mu, \sigma)}{\partial \sigma} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma} \phi(A) & \frac{A}{\sigma} \phi(A) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma} \phi(A) \\ \frac{A}{\sigma} \phi(A) \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{n} + \frac{A^2}{2n} \right) \phi(A)^2 \end{aligned}$$

μ, σ の真の値は未知であるため、(1) で選んだ最尤推定値（小数点以下第 1 位までの数値）を用いるとき、

$$1 - \Phi\left(\frac{5.75 - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{5.75 - 5.2}{1.1}\right) = 1 - \Phi(0.5) = 0.309$$

$$\left(\frac{1}{n} + \frac{A^2}{2n}\right) \phi(A)^2 = \left(\frac{1}{5} + \frac{0.5^2}{10}\right) \phi(0.5)^2 = \frac{9}{40} \times \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{4}\right)$$

より、求める 90%信頼区間の上限値は、

$$0.309 + u(0.050) \sqrt{\frac{9}{40} \times \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{4}\right)} = 0.309 + 1.645 \sqrt{\frac{9}{40} \times \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{4}\right)} = 0.584$$

となる。