

数学（問題）

[問題1から問題3を通じて必要であれば（付表）に記載された数値を用いなさい。]

問題1. 次の(1)～(12)の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

各5点（計60点）

(1) 次の(ア)～(オ)のそれぞれの場合において、 p と q の関係を考える。

(ア) 確率事象 A, B について、

p : A, B は独立

q : $P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\}$

p は q であるための

(イ) 確率事象 A, B について、 $P\{B\} \neq 0$ とするとき、

p : A, B は独立

q : $P\{A|B\} = P\{A\}$

p は q であるための

(ウ) 確率事象 A, B, C について、

p : A, B は独立 かつ B, C は独立 かつ C, A は独立

q : A, B, C は独立

p は q であるための

(エ) 確率変数 X, Y について、

p : X, Y は独立

q : X^2, Y^2 は独立

p は q であるための

(オ) 確率変数 X, Y について、 X, Y, XY の期待値がそれぞれ存在するとき、

p : X, Y は独立

q : $E[XY] = E[X] \cdot E[Y]$

p は q であるための

(A) 必要十分条件である。

(B) 必要条件であるが、十分条件ではない。

(C) 十分条件であるが、必要条件ではない。

(D) 必要条件でも十分条件でもない。

(2) 確率変数 X, Y の結合確率密度関数が

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy & (0 < y < x < 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

で与えられるとき、 $Z = X + Y$ の確率密度関数は

$$g(z) = \begin{cases} \boxed{\text{①}} & (0 < z \leq 1) \\ \boxed{\text{②}} & (1 < z < 2) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

である。

- (A) z^3 (B) $\frac{1}{3}z^3$ (C) $\frac{2}{3}z^3$
- (D) $\frac{4}{3}z^3$ (E) $\frac{8}{3}z^3$ (F) $-\frac{2}{3}z^3 + 4z - \frac{8}{3}$
- (G) $-\frac{2}{3}z^3 + \frac{13}{3}z - \frac{10}{3}$ (H) $-\frac{2}{3}z^3 + z^2 + \frac{4}{3}z - \frac{4}{3}$ (I) $-\frac{1}{3}z^3 + 2z - \frac{4}{3}$
- (J) $-\frac{1}{3}z^3 + \frac{5}{3}z - \frac{2}{3}$

(3) 確率変数 A および B が互いに独立で、それぞれ $[0, 1]$ 上の一様分布に従うものとする。 $X = \max(A, B)$ 、 $Y = \min(A, B)$ とした時、 X の積率母関数 $M_X(t)$ は $\boxed{\text{①}}$ 、 Y の積率母関数 $M_Y(t)$ は $\boxed{\text{②}}$ である。

- (A) $2\left(\frac{e^t + t + 1}{t^2}\right)$ (B) $2\left(\frac{e^t - t + 1}{t^2}\right)$ (C) $2\left(\frac{e^t + t - 1}{t^2}\right)$ (D) $2\left(\frac{e^t - t - 1}{t^2}\right)$
- (E) $2\left(\frac{te^t + t + 1}{t^2}\right)$ (F) $2\left(\frac{te^t + t - 1}{t^2}\right)$ (G) $2\left(\frac{te^t - t - 1}{t^2}\right)$ (H) $2\left(\frac{te^t + e^t + 1}{t^2}\right)$
- (I) $2\left(\frac{te^t - e^t + 1}{t^2}\right)$ (J) $2\left(\frac{te^t + e^t - 1}{t^2}\right)$

(4) 表の出る確率が p 、裏の出る確率が $1-p$ であるコインを使い、 $n(n \geq 3)$ 回のコイントスを行う。
 $X_i(i = 1, 2, \dots, n-1)$ を下表の値をとる確率変数とする。

コイントスの結果		X_i
i 回目	$i+1$ 回目	
表	表	0
表	裏	0
裏	表	1
裏	裏	0

$X = \sum_{i=1}^{n-1} X_i$ としたとき、 $V[X] = p(1-p) \left\{ \left(\boxed{\text{①}} \right) n + \boxed{\text{②}} \right\}$ である。

- (A) $3p^2 + 3p + 1$ (B) $3p^2 - 3p + 1$ (C) $3p^2 + 3p - 1$ (D) $-3p^2 + 3p + 1$
 (E) $-3p^2 + 3p - 1$ (F) $5p^2 + 5p + 1$ (G) $5p^2 + 5p - 1$ (H) $5p^2 - 5p - 1$
 (I) $-5p^2 + 5p - 1$ (J) $-5p^2 + 5p + 1$

(5) $[a, b]$ (ただし、 $a < b$)上の一様分布に従う母集団から次の標本値を得た。モーメント法により a, b を推定すると、 a に最も近い値は $\boxed{\text{①}}$ であり、 b に最も近い値は $\boxed{\text{②}}$ である。一方、最尤法で推定すると、 a に最も近い値は $\boxed{\text{③}}$ であり、 b に最も近い値は $\boxed{\text{④}}$ である。

-2.6, -1.7, -1, 0, 1, 1.9, 2.4

[①、③の選択肢]

- (A) -3.2 (B) -3.1 (C) -3.0 (D) -2.9 (E) -2.8
 (F) -2.7 (G) -2.6 (H) -2.5 (I) -2.4 (J) -2.3

[②、④の選択肢]

- (A) 2.1 (B) 2.2 (C) 2.3 (D) 2.4 (E) 2.5
 (F) 2.6 (G) 2.7 (H) 2.8 (I) 2.9 (J) 3.0

(6) ある試験の受験者のうち男性40人に結果を確認したところ、16人が合格していた。一方、女性5人に結果を確認したところ、2人が合格していた。このとき、男性の受験者全体の合格率を近似法によって信頼係数90%で区間推定すると、信頼区間の下限に最も近い値は であり、信頼区間の上限に最も近い値は である。一方、女性の受験者全体の合格率を精密法によって信頼係数90%で区間推定すると、信頼区間の下限に最も近い値は であり、信頼区間の上限に最も近い値は である。

[①、③の選択肢]

- | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| (A) 0.05 | (B) 0.07 | (C) 0.08 | (D) 0.10 | (E) 0.12 |
| (F) 0.14 | (G) 0.25 | (H) 0.27 | (I) 0.30 | (J) 0.39 |

[②、④の選択肢]

- | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| (A) 0.40 | (B) 0.50 | (C) 0.53 | (D) 0.55 | (E) 0.75 |
| (F) 0.81 | (G) 0.84 | (H) 0.85 | (I) 0.90 | (J) 0.94 |

(7) ある箱に赤玉と白玉が合計で4個入っており、その内訳は次のいずれかであることがわかっている。

- ・赤玉が3個、白玉が1個である
- ・赤玉が1個、白玉が3個である

いま、帰無仮説を「赤玉が3個、白玉が1個である」とする。この箱から玉を1個取り出し、色を確認したあとに玉を箱に戻し、赤玉が3回出るまで繰り返す試行を行う。1回目の試行と2回目の試行とともに白玉が出た回数が2以上であれば帰無仮説を棄却し、対立仮説を採択する検定を行うとき、第1種の誤りの起こる確率に最も近い値は であり、検出力に最も近い値は である。

[①の選択肢]

- | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| (A) 0.024 | (B) 0.050 | (C) 0.068 | (D) 0.088 |
| (E) 0.106 | (F) 0.156 | (G) 0.223 | (H) 0.262 |

[②の選択肢]

- (A) 0.051 (B) 0.054 (C) 0.099 (D) 0.365
- (E) 0.635 (F) 0.901 (G) 0.946 (H) 0.949

(8) ある洋菓子店が、来店した男性と女性にチーズケーキとショートケーキのどちらが好きかアンケートを行ったところ、下表の結果を得た。このアンケート結果をもとに、男女間でケーキの嗜好に差があるかを確認したい。帰無仮説 H_0 を「性別とケーキの嗜好は互いに独立である」として、有意水準5%で検定を行う。まず、独立性の検定を行うと、検定統計量 χ^2 に最も近い値は であり、帰無仮説 H_0 は される。次に、イエーツの補正を行うと、検定統計量 χ'^2 に最も近い値は となり、帰無仮説 H_0 は される。

	男性	女性	計
チーズケーキが好き	4	12	16
ショートケーキが好き	9	5	14
計	13	17	30

[①、③の選択肢]

- (A) 2.4 (B) 2.9 (C) 3.2 (D) 3.7 (E) 4.2
- (F) 4.7 (G) 5.1 (H) 5.5 (I) 5.9 (J) 6.4

[②、④の選択肢]

- (A) 採択 (B) 棄却

- (9) 都市 A の 1 日の最高気温と最低気温を 7 日間にわたって測定したところ、下表のデータを得た。
このデータから都市 A の最高気温 y について、説明変数を都市 A の最低気温 x とした回帰直線を最小二乗法により求めると、 $y = \text{①} + \text{②}x$ であり、決定係数は ③ である。また、 y をこの回帰直線によって推定するときの誤差分散の推定値は ④ である。

	1 日目	2 日目	3 日目	4 日目	5 日目	6 日目	7 日目
最低気温(°C)	22	24	25	24	24	26	23
最高気温(°C)	26	29	32	33	30	34	33

[①の選択肢]

- (A) -9 (B) -7 (C) -5 (D) -3 (E) -1
(F) 1 (G) 3 (H) 5 (I) 7 (J) 9

[②の選択肢]

- (A) -1 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{2}{3}$
(F) 1 (G) $\frac{6}{5}$ (H) $\frac{5}{4}$ (I) $\frac{4}{3}$ (J) $\frac{3}{2}$

[③の選択肢]

- (A) $\frac{11}{48}$ (B) $\frac{9}{32}$ (C) $\frac{11}{32}$ (D) $\frac{17}{48}$ (E) $\frac{25}{64}$
(F) $\frac{15}{32}$ (G) $\frac{25}{48}$ (H) $\frac{21}{32}$ (I) $\frac{37}{48}$ (J) $\frac{29}{32}$

[④の選択肢]

- (A) $\frac{7}{5}$ (B) $\frac{11}{9}$ (C) $\frac{22}{7}$ (D) $\frac{33}{10}$ (E) $\frac{47}{6}$
(F) $\frac{57}{7}$ (G) $\frac{51}{10}$ (H) $\frac{77}{6}$ (I) $\frac{88}{9}$ (J) $\frac{68}{5}$

(10) 標準ブラウン運動 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ について、6 次の積率 $E(X_t^6) = \boxed{\text{①}}$ である。また、 $s > t$ のとき、 $E(X_s \cdot X_t^5) = \boxed{\text{②}}$ である。ただし、必要ならば、 $p > 0$ に対して以下で定義されるガンマ関数

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$$

において、 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ となることを用いても良い。

(A) 0 (B) t^3 (C) $3t^3$ (D) $4t^3$ (E) $15t^3$

(F) $120t^3$ (G) $s^{\frac{1}{2}} t^{\frac{5}{2}}$ (H) $3s^{\frac{1}{2}} t^{\frac{5}{2}}$ (I) $15s^{\frac{1}{2}} t^{\frac{5}{2}}$ (J) $120s^{\frac{1}{2}} t^{\frac{5}{2}}$

(11) 定常 ARMA(1,1) モデル

$$Y_t = \frac{1}{3}Y_{t-1} - \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad (\varepsilon_t \sim N(0, 2^2))$$

において、 $\{Y_t\}$ の分散 γ_0 の値は $\boxed{\text{①}}$ であり、 $h \geq 1$ の時、 $\{Y_t\}$ に関する時差 h の自己共分散 γ_h の値は $\boxed{\text{②}}$ である。

[①の選択肢]

(A) $\frac{33}{16}$ (B) $\frac{13}{6}$ (C) $\frac{9}{4}$ (D) $\frac{19}{8}$

(E) $\frac{33}{8}$ (F) $\frac{13}{3}$ (G) $\frac{9}{2}$ (H) $\frac{19}{4}$

[②の選択肢]

(A) $\left(-\frac{5}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{h-1}$ (B) $\left(-\frac{5}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{h-1}$ (C) $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{h-1}$ (D) $\left(-\frac{5}{12}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{h-1}$

(E) $\left(-\frac{5}{16}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{h-1}$ (F) $\left(-\frac{5}{18}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{h-1}$ (G) $\left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{h-1}$ (H) $\left(-\frac{5}{24}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{h-1}$

(12) 確率変数 X は平均 $i(i = 1, 2, 3)$ の幾何分布 $P_i(X_i = k) = p_i(1 - p_i)^k (k = 0, 1, \dots)$ で重み付き平均として表される確率変数

$$P(X = k) = \frac{1}{4}P_1(X_1 = k) + \frac{1}{3}P_2(X_2 = k) + \frac{5}{12}P_3(X_3 = k)$$

とし、 X について、以下の1~3の手順でシミュレーションを行う。

1. (0,1)区間の一様分布に従う確率変数を U とし、一様乱数により U の実現値 u_1 、 u_2 を生成する。
2. 1で得られた実現値 u_1 により合成法を用いて X が従う分布を決定する。なおその際には、 $P_i(X_i = k)$ の重みが小さいものから順に、 u_1 の範囲を定めるものとする。
3. 1で得られた実現値 u_2 により逆関数法を用いて X の実現値を決定する。

いま、一様乱数により U の実現値を生成したところ、 $u_1 = 0.9$ 、 $u_2 = 0.4$ を得た。このとき、 X の実現値は である。

- | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| (A) 0 | (B) 1 | (C) 2 | (D) 3 | (E) 4 |
| (F) 5 | (G) 6 | (H) 7 | (I) 8 | (J) 9 |

問題2. 次の(1)～(3)の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から1つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。また、空欄のうち⑩～⑰については、最も近い値を選択しなさい。

(20点)

(1) Aさんはあるカードを集めている。このカードについては次のことが分かっている。

- ・カードは1枚ずつ袋に入った状態で販売されており、入っているカードの種類は購入するまで分からない。
- ・袋に入っているカードは全部で100種類あり、うち3種類は「プレミアム」と呼ばれている。
- ・どの種類のカードも購入回数に関わらず常に確率0.01で袋に入っている。
- ・カードは常に製造されており、どれだけ購入してもなくなることはない。

Aさんが、この「プレミアム」を1枚も持っていない状態からカードを購入し続けて、3種類の「プレミアム」をすべて集めるまでにかかる購入回数の平均値を、次の2通りの方法で求めたい。なお、3種類の「プレミアム」をすべて集めた以降はカードを購入しないものとする。

I) Aさんが持っていない「プレミアム」の種類が k 種類($k = 1, 2, 3$)である状態からカードを購入し続け、 k 種類のうちいずれか1種類を引き当てるまでにかかった購入回数として確率変数 X_k を定義する。まず、 $k = 3$ の場合を考えると、

$$P(X_3 = n) = \boxed{\text{①}} \times (\boxed{\text{②}})^{\boxed{\text{③}}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と表せることから、 $E[X_3] = \boxed{\text{④}}$ を得る。

$k = 1, 2$ の場合についても同様に考えることで $E[X_1]$ 、 $E[X_2]$ を計算すると、求める購入回数の平均値は $\boxed{\text{⑤}}$ となる。

II) Aさんが持っていない「プレミアム」の種類が k 種類($k = 1, 2, 3$)である状態からカードを購入し続け、3種類の「プレミアム」をすべて集めるまでにかかった購入回数の平均値を E_k と置くと、次の漸化式が成り立つ。

$$E_k = 1 + \boxed{\text{⑥}} \times E_{k-1} + (1 - \boxed{\text{⑥}}) \times E_k \quad (k = 2, 3)$$

以上より、求める購入回数の平均値 $\boxed{\text{⑤}}$ を得る。

(2) (1) のカードについて20枚が1セットになったパックが発売されることになった。このパックに入っているカードについては次のことが分かっている。

- ・パックに入っているカードの種類は購入するまで分からない。
- ・パックに入っている20枚のカードのうち19枚については、いずれの1枚も100種類のカードのうちの1種類がそれぞれ確率0.01で入っている。
- ・残りの1枚については「プレミアム」である確率が10倍になっている。つまり、この1枚が「プレミアム」である確率は0.3であり、3種類のいずれかである確率は互いに等しい。
- ・パックには同一種類のカードが複数枚入っている場合もある。
- ・パックは常に製造されており、どれだけ購入してもなくなることはない。

Aさんが「プレミアム」を1枚も持っていない状態からこのパックのみを購入し続けたとき、3種類の「プレミアム」をすべて集めるまでにかかる購入回数の平均値を求めたい。なお、3種類の「プレミアム」をすべて集めた以降はパックを購入しないものとする。また、必要であれば $0.99^{19} = 0.8262$ 、 $0.98^{19} = 0.6812$ 、 $0.97^{19} = 0.5606$ を用いなさい。

Aさんが持っていない「プレミアム」が*i*種類 ($i = 1, 2, 3$) の状態で、パックを1つ購入したとき、この*i*種類のうち*j*種類 ($0 \leq j \leq i$) の「プレミアム」が入っている確率を $P(i, j)$ とする。また、Aさんが持っていない「プレミアム」が*i*種類 ($i = 1, 2, 3$) の状態からパックのみを購入し続けたとき、3種類の「プレミアム」をすべて集めるまでにかかる購入回数の平均値を E_i^p とする。

まず、 $i = 3$ の場合を考える。このとき、(1) II) と同様に考えることで、次の関係式を得る。

$$E_3^p = 1 + \boxed{\text{⑦}} \times E_3^p + \boxed{\text{⑧}} \times E_2^p + \boxed{\text{⑨}} \times E_1^p \quad \dots\dots (A)$$

次に $P(i, j)$ を求めたい。

(ア) $j = 0$ の場合

この場合、20枚の中に「プレミアム」が1枚も入っていない確率であるから、

$$P(3, 0) = \boxed{\text{⑩}}$$

(イ) $j = 1$ の場合

パックに入っている20枚のカードのうち「プレミアム」である確率が高い1枚のカードの種類が「プレミアム」であるかどうかで場合分けして考えると、求める確率は、

$$P(3, 1) = \boxed{\text{⑪}}$$

(ウ) $j = 2$ の場合

(イ) と同様に考えれば、

$$P(3,2) = \boxed{\text{⑫}}$$

$i = 1, 2$ の場合についても同様に考えることで E_i^p を求めると、

$$E_1^p = \boxed{\text{⑬}}, E_2^p = \boxed{\text{⑭}}$$

以上より、これらを (A) に代入して、

$$E_3^p = \boxed{\text{⑮}}$$

を得る。

(3) カード1枚の値段は100円であり、パック1つの値段は2,700円であるという。Aさんはなるべく少ない金額で「プレミアム」をすべて集めたいと考え、次の方法をとることにした。

【方法】 次の段階Ⅰ、段階Ⅱの順番で実行する。

段階Ⅰ) 「プレミアム」を少なくとも m 種類 ($m = 0, 1, 2, 3$) 入手するまでパックを購入する。

ただし、 $m = 0$ の場合は初めから段階Ⅱを実行するものとする。

段階Ⅱ) 段階Ⅰで入手できなかった残りの「プレミアム」をすべて集めるまでカードを1枚ずつ購入する。3種類の「プレミアム」をすべて集めた以降はカードを購入しない。

なお、段階Ⅰで3種類の「プレミアム」がすべて集まった場合には、段階Ⅱは実行しないものとする。

Aさんは、「プレミアム」を1枚も持っていない状態で m の値を一つ定め、上記の方法をとる。

このとき、支払う金額の平均値が最も小さくなるような m の値を求めたい。

なお、必要であれば $0.99^{19} = 0.8262$ 、 $0.98^{19} = 0.6812$ 、 $0.97^{19} = 0.5606$ を用いなさい。

まず、 $m = 0$ の場合に支払う金額の平均値は、(1) より $\boxed{\text{⑤}}$ × 100円である。

また、 $m = 3$ の場合に支払う金額の平均値は、(2) より $\boxed{\text{⑮}}$ × 2,700円である。

$m = 1$ の場合に支払う金額の平均値を求めると、 $\boxed{\text{⑯}}$ 円であり、 $m = 2$ の場合に支払う金額の平均値を求めると、 $\boxed{\text{⑰}}$ 円である。

以上より、求める m の値は $\boxed{\text{⑱}}$ である。

[①～⑥の選択肢]

- | | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| (A) $n - 2$ | (B) $n - 1$ | (C) n | (D) $n + 1$ |
| (E) $\frac{1}{k}$ | (F) $\frac{100}{k}$ | (G) $\frac{k}{100}$ | (H) k |
| (I) 0.01 | (J) 0.02 | (K) 0.03 | (L) 0.97 |
| (M) 0.98 | (N) 0.99 | (O) $\frac{94}{3}$ | (P) $\frac{97}{3}$ |
| (Q) $\frac{100}{3}$ | (R) 48 | (S) 49 | (T) 50 |
| (U) 98 | (V) 99 | (W) 100 | (X) $\frac{532}{3}$ |
| (Y) $\frac{541}{3}$ | (Z) $\frac{550}{3}$ | | |

[⑦～⑨の選択肢]

- | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| (A) $P(1,0)$ | (B) $P(2,0)$ | (C) $P(3,0)$ | (D) $P(1,1)$ |
| (E) $P(2,1)$ | (F) $P(3,1)$ | (G) $P(2,2)$ | (H) $P(3,2)$ |
| (I) $P(3,3)$ | | | |

[⑩～⑫の選択肢]

- | | | | |
|------------|------------|------------|------------|
| (A) 0.0606 | (B) 0.0947 | (C) 0.1041 | (D) 0.1382 |
| (E) 0.1816 | (F) 0.2250 | (G) 0.2569 | (H) 0.2888 |
| (I) 0.3406 | (J) 0.3924 | (K) 0.4250 | (L) 0.4576 |
| (M) 0.4979 | (N) 0.5381 | (O) 0.5783 | (P) 0.5854 |

[⑬～⑮の選択肢]

- | | | | |
|----------|----------|----------|----------|
| (A) 1.34 | (B) 2.02 | (C) 2.71 | (D) 3.31 |
| (E) 3.90 | (F) 4.22 | (G) 4.61 | (H) 4.92 |
| (I) 5.27 | (J) 5.60 | (K) 6.08 | (L) 6.44 |
| (M) 6.75 | (N) 7.29 | (O) 7.87 | (P) 8.36 |

[⑯～⑳の選択肢]

- | | | | |
|------------|------------|------------|------------|
| (A) 0 | (B) 1 | (C) 2 | (D) 3 |
| (E) 17,654 | (F) 17,690 | (G) 17,727 | (H) 17,763 |
| (I) 17,799 | (J) 17,836 | (K) 17,872 | (L) 17,908 |
| (M) 17,944 | (N) 17,981 | (O) 18,017 | (P) 18,053 |
| (Q) 18,089 | (R) 18,126 | (S) 18,162 | (T) 18,198 |

問題 3. 次の (1) ~ (3) の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から 1 つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。
(20 点)

(1) 一様分布 $U(0,1)$ の母集団からの標本変量 $X_1, X_2, \dots, X_{\alpha+\beta-1}$ (α, β は自然数) を小さいものから順番に並べ替えて、小さい方から α 番目を順序統計量 $X_{(\alpha)}$ とすると、 $X_{(\alpha)}$ はベータ分布 $Be(\alpha, \beta)$ に従う。

以下では、ベータ分布 $Be(\alpha, \beta)$ の確率密度関数を $f_{X_{(\alpha)}}(x)$ とすると、

$$f_{X_{(\alpha)}}(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1} \quad (0 \leq x \leq 1) \quad \dots (A)$$

また、ベータ関数 $B(\alpha, \beta)$ は α, β が自然数のとき、

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} = \frac{(\alpha - 1)! \cdot (\beta - 1)!}{(\alpha + \beta - 1)!}$$

で与えられることを用いてよい。

ここで、一様分布 $U(0,1)$ の母集団からの標本変量 $X_1, X_2, \dots, X_{2m+1}$ (m は自然数) の中央値を \tilde{X} とする。

中央値 \tilde{X} の確率密度関数 $f_{\tilde{X}}(x)$ は、式 (A) において、

$\alpha = \boxed{\text{①}}$ 、 $\beta = \boxed{\text{②}}$ とすることで、

$$f_{\tilde{X}}(x) = \frac{\boxed{\text{④}}}{\boxed{\text{③}}} \times \boxed{\text{⑤}} \times \boxed{\text{⑥}} \quad \dots (B)$$

となる。(⑤と⑥の解答は順不同)

この確率密度関数を用いて、中央値 \tilde{X} の期待値 $E[\tilde{X}]$ と分散 $V[\tilde{X}]$ を算出すると、

$E[\tilde{X}] = \boxed{\text{⑦}}$ 、 $V[\tilde{X}] = \boxed{\text{⑧}}$ となる。

一方、標本変量平均 \bar{X} の分散は $V[\bar{X}] = \boxed{\text{⑨}}$ であるため、 m が自然数のもとでは常に中央値 \tilde{X} の分散の方が標本変量平均 \bar{X} の分散よりも大きくなる。

(2) 次に、正規母集団 $N(\mu, 2^2)$ からの標本変量 $Y_1, Y_2, \dots, Y_{2m+1}$ (m は自然数) の中央値を \tilde{Y} とし、母平均 μ を中央値 \tilde{Y} で推定することを考える。

正規分布 $N(\mu, 2^2)$ の分布関数を $F_Y(y)$ 、確率密度関数を $f_Y(y)$ とする。

式 (B) において、分布関数の逆関数 $y = F_Y^{-1}(x)$ で変数変換を行うことで、

中央値 \tilde{Y} の確率密度関数 $f_{\tilde{Y}}(y)$ は

$$f_{\tilde{Y}}(y) = \frac{\boxed{\text{⑪}}}{\boxed{\text{⑩}}} \times \boxed{\text{⑫}} \times \boxed{\text{⑬}} \times f_Y(y)$$

となる。(12と13の解答は順不同)

さらに、 $\int_{-\infty}^{\mu} f_Y(t) dt = \text{14}$ であることに着目して式変形を行うことで、

$$f_{\tilde{Y}}(y) = \frac{\text{11}}{\text{10}} \times \left\{ \text{15} - \left(\int_{\text{16}}^y f_Y(t) dt \right)^{\text{17}} \right\}^{\text{18}} \times f_Y(y) \cdots (C)$$

となる。

中央値 \tilde{Y} の確率密度関数 $f_{\tilde{Y}}(y)$ は μ を中心とした偶関数であるため、

$$E[\tilde{Y}] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{\tilde{Y}}(y) dy = \text{19} \text{となり、中央値}\tilde{Y}\text{は不偏性を満たすことが分かる。}$$

(3) 次に、(2)と同じ中央値 \tilde{Y} の推定量としての性質を検証するために、 $Z = \sqrt{2m+1}(\tilde{Y} - \mu)$ の漸近的分布を求めることを考える。

$Z = \sqrt{2m+1}(\tilde{Y} - \mu)$ の確率密度関数を $f_Z(z)$ とおくと、

式(C)において $z = \sqrt{2m+1}(y - \mu)$ として変数変換を行い、整理することで、

$$f_Z(z) = \frac{1}{\text{20} \times \text{21}} \times \frac{\text{11}}{\text{10}} \times \left\{ 1 - \text{22} \left(\int_{\text{16}}^{\mu + \frac{z}{\sqrt{2m+1}}} f_Y(t) dt \right)^{\text{17}} \right\}^{\text{18}} \times f_Y\left(\mu + \frac{z}{\sqrt{2m+1}}\right)$$

となる。(20と21の解答は順不同)

ここで、スターリングの公式 $n! \sim \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n}$ ($n \rightarrow \infty$)を用いると、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{20} \times \text{21}} \times \frac{\text{11}}{\text{10}} = \text{23}$$

となり、さらに、

$$\left\{ 1 - \text{22} \left(\int_{\text{16}}^{\mu + \frac{z}{\sqrt{2m+1}}} f_Y(t) dt \right)^{\text{17}} \right\}^{\text{18}} \text{は} \left\{ 1 - \text{22} \times \left(\frac{z \cdot f_Y(\mu)}{\sqrt{2m+1}} \right)^{\text{17}} \right\}^{\text{18}} \text{で}$$

近似できることを用いると、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \text{22} \left(\int_{\text{16}}^{\mu + \frac{z}{\sqrt{2m+1}}} f_Y(t) dt \right)^{\text{17}} \right\}^{\text{18}} = \text{24}$$

となる。

最後に、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_Y \left(\mu + \frac{z}{\sqrt{2m+1}} \right) = \boxed{\text{㉕}}$$

となることから、 $Z = \sqrt{2m+1}(\bar{Y} - \mu)$ の漸近的分布は正規分布 $N(\boxed{\text{㉖}}, \boxed{\text{㉗}})$ であり、中央値 \bar{Y} は漸近正規性を満たすことが分かる。

一方、同じく母平均 μ の推定量として漸近正規性を満たす標本変量平均 \bar{Y} を変形した $\sqrt{2m+1}(\bar{Y} - \mu)$ は正規分布 $N(\boxed{\text{㉘}}, \boxed{\text{㉙}})$ に従う。

中央値 \bar{Y} よりも漸近分散が小さい漸近正規推定量が存在するため、中央値 \bar{Y} は漸近有効性を満たさないことが分かった。

[①～④、⑩、⑪、⑬、⑯、⑰の選択肢]

- | | | | |
|-----------------------------|------------------------|----------------------|------------------------------|
| (A) m | (B) $m - 1$ | (C) $m + 1$ | (D) $2m$ |
| (E) $2m - 1$ | (F) $2m + 1$ | (G) m^2 | (H) $(m - 1)^2$ |
| (I) $(m + 1)^{\frac{1}{2}}$ | (J) $(2m)^2$ | (K) $(2m - 1)^2$ | (L) $(2m + 1)^{\frac{1}{2}}$ |
| (M) 2^m | (N) 2^{m+1} | (O) 2^{2m} | (P) 2^{2m+1} |
| (Q) $m!$ | (R) $(2m)!$ | (S) $(2m - 1)!$ | (T) $(2m + 1)!$ |
| (U) $(2m + 2)!$ | (V) $(m!)^2$ | (W) $\{(m - 1)!\}^2$ | (X) $\{(m + 1)!\}^2$ |
| (Y) $\{(2m + 1)!\}^2$ | (Z) $(m + 1)!(m - 1)!$ | | |

[⑤、⑥の選択肢]

- | | | | |
|---------------------|--------------------|----------------------|----------------------|
| (A) x^m | (B) x^{m-1} | (C) x^{m+1} | (D) x^{2m} |
| (E) x^{2m-1} | (F) x^{2m+1} | (G) $(1 - x)^m$ | (H) $(1 - x)^{m-1}$ |
| (I) $(1 - x)^{m+1}$ | (J) $(1 - x)^{2m}$ | (K) $(1 - x)^{2m-1}$ | (L) $(1 - x)^{2m+1}$ |

[⑦～⑨の選択肢]

- | | | | |
|-------------------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|
| (A) 1 | (B) $\frac{1}{2}$ | (C) $\frac{1}{3}$ | (D) $\frac{1}{4}$ |
| (E) $\frac{1}{12}$ | (F) $\frac{1}{m}$ | (G) $\frac{1}{m+1}$ | (H) $\frac{1}{2m+1}$ |
| (I) $\frac{1}{2m+2}$ | (J) $\frac{1}{2m+3}$ | (K) $\frac{1}{3(2m+1)}$ | (L) $\frac{1}{3(2m+3)}$ |
| (M) $\frac{1}{4(2m+1)}$ | (N) $\frac{1}{4(2m+3)}$ | (O) $\frac{1}{12(2m+1)}$ | (P) $\frac{1}{12(2m+3)}$ |

[⑫、⑬の選択肢]

- | | | | |
|-----------------------------|---------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|
| (A) $\{F_Y^{-1}(y)\}^m$ | (B) $\{F_Y^{-1}(y)\}^{m-1}$ | (C) $\{F_Y^{-1}(y)\}^{2m}$ | (D) $\{F_Y^{-1}(y)\}^{2m-1}$ |
| (E) $\{F_Y(y)\}^m$ | (F) $\{F_Y(y)\}^{m+1}$ | (G) $\{F_Y(y)\}^{2m}$ | (H) $\{F_Y(y)\}^{2m+1}$ |
| (I) $\{1 - F_Y^{-1}(y)\}^m$ | (J) $\{1 - F_Y^{-1}(y)\}^{m-1}$ | (K) $\{1 - F_Y^{-1}(y)\}^{2m}$ | (L) $\{1 - F_Y^{-1}(y)\}^{2m-1}$ |
| (M) $\{1 - F_Y(y)\}^m$ | (N) $\{1 - F_Y(y)\}^{m+1}$ | (O) $\{1 - F_Y(y)\}^{2m}$ | (P) $\{1 - F_Y(y)\}^{2m+1}$ |

[⑭～⑰、⑲、⑳、㉓、㉕～㉙の選択肢]

- | | | | |
|-----------------------------|----------------------------|----------------------------|------------------------------|
| (A) 0 | (B) 1 | (C) 2 | (D) 4 |
| (E) 8 | (F) 16 | (G) $\frac{1}{2}$ | (H) $\frac{1}{4}$ |
| (I) $\frac{1}{8}$ | (J) $\frac{1}{16}$ | (K) μ | (L) 2μ |
| (M) $\frac{\mu}{2}$ | (N) π | (O) 2π | (P) 4π |
| (Q) π^2 | (R) $4\pi^2$ | (S) $16\pi^2$ | (T) $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$ |
| (U) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ | (V) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ | (W) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ | (X) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ |
| (Y) $-y$ | (Z) $-\infty$ | | |

[㉚の選択肢]

- | | | | |
|--|--|--|---|
| (A) $\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$ | (B) $\exp\left(-\frac{z^2}{4}\right)$ | (C) $\exp\left(-\frac{z^2}{8}\right)$ | (D) $\exp\left(-\frac{z^2}{16}\right)$ |
| (E) $\exp\left(-\frac{z^2}{2\pi}\right)$ | (F) $\exp\left(-\frac{z^2}{4\pi}\right)$ | (G) $\exp\left(-\frac{z^2}{8\pi}\right)$ | (H) $\exp\left(-\frac{z^2}{16\pi}\right)$ |
| (I) $\exp\left\{-\frac{(z-\mu)^2}{2}\right\}$ | (J) $\exp\left\{-\frac{(z-\mu)^2}{4}\right\}$ | (K) $\exp\left\{-\frac{(z-\mu)^2}{8}\right\}$ | (L) $\exp\left\{-\frac{(z-\mu)^2}{16}\right\}$ |
| (M) $\exp\left\{-\frac{(z-\mu)^2}{2\pi}\right\}$ | (N) $\exp\left\{-\frac{(z-\mu)^2}{4\pi}\right\}$ | (O) $\exp\left\{-\frac{(z-\mu)^2}{8\pi}\right\}$ | (P) $\exp\left\{-\frac{(z-\mu)^2}{16\pi}\right\}$ |

(附表)

I. 標準正規分布表

$$P(x > 0.25) = 0.4013$$

上側 ε 点 $u(\varepsilon)$ から確率 ε を求める表

$u(\varepsilon) \rightarrow \varepsilon$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.0*	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1*	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2*	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3*	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4*	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5*	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6*	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7*	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8*	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9*	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0*	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1*	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2*	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3*	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4*	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5*	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6*	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7*	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8*	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9*	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0*	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1*	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2*	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3*	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4*	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5*	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6*	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7*	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8*	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9*	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014

$$P(x > 1.9600) = 0.025$$

確率 ϵ から上側 ϵ 点 $u(\epsilon)$ を求める表

$\epsilon \rightarrow u(\epsilon)$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.00*	∞	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656
0.01*	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0749
0.02*	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.9600	1.9431	1.9268	1.9110	1.8957
0.03*	1.8808	1.8663	1.8522	1.8384	1.8250	1.8119	1.7991	1.7866	1.7744	1.7624
0.04*	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546
0.05*	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5718	1.5632
0.06*	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063	1.4985	1.4909	1.4833
0.07*	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4395	1.4325	1.4255	1.4187	1.4118
0.08*	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3595	1.3532	1.3469
0.09*	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3106	1.3047	1.2988	1.2930	1.2873
0.10*	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319
0.11*	1.2265	1.2212	1.2160	1.2107	1.2055	1.2004	1.1952	1.1901	1.1850	1.1800
0.12*	1.1750	1.1700	1.1650	1.1601	1.1552	1.1503	1.1455	1.1407	1.1359	1.1311
0.13*	1.1264	1.1217	1.1170	1.1123	1.1077	1.1031	1.0985	1.0939	1.0893	1.0848
0.14*	1.0803	1.0758	1.0714	1.0669	1.0625	1.0581	1.0537	1.0494	1.0450	1.0407
0.15*	1.0364	1.0322	1.0279	1.0237	1.0194	1.0152	1.0110	1.0069	1.0027	0.9986
0.16*	0.9945	0.9904	0.9863	0.9822	0.9782	0.9741	0.9701	0.9661	0.9621	0.9581
0.17*	0.9542	0.9502	0.9463	0.9424	0.9385	0.9346	0.9307	0.9269	0.9230	0.9192
0.18*	0.9154	0.9116	0.9078	0.9040	0.9002	0.8965	0.8927	0.8890	0.8853	0.8816
0.19*	0.8779	0.8742	0.8705	0.8669	0.8633	0.8596	0.8560	0.8524	0.8488	0.8452
0.20*	0.8416	0.8381	0.8345	0.8310	0.8274	0.8239	0.8204	0.8169	0.8134	0.8099
0.21*	0.8064	0.8030	0.7995	0.7961	0.7926	0.7892	0.7858	0.7824	0.7790	0.7756
0.22*	0.7722	0.7688	0.7655	0.7621	0.7588	0.7554	0.7521	0.7488	0.7454	0.7421
0.23*	0.7388	0.7356	0.7323	0.7290	0.7257	0.7225	0.7192	0.7160	0.7128	0.7095
0.24*	0.7063	0.7031	0.6999	0.6967	0.6935	0.6903	0.6871	0.6840	0.6808	0.6776
0.25*	0.6745	0.6713	0.6682	0.6651	0.6620	0.6588	0.6557	0.6526	0.6495	0.6464
0.26*	0.6433	0.6403	0.6372	0.6341	0.6311	0.6280	0.6250	0.6219	0.6189	0.6158
0.27*	0.6128	0.6098	0.6068	0.6038	0.6008	0.5978	0.5948	0.5918	0.5888	0.5858
0.28*	0.5828	0.5799	0.5769	0.5740	0.5710	0.5681	0.5651	0.5622	0.5592	0.5563
0.29*	0.5534	0.5505	0.5476	0.5446	0.5417	0.5388	0.5359	0.5330	0.5302	0.5273
0.30*	0.5244	0.5215	0.5187	0.5158	0.5129	0.5101	0.5072	0.5044	0.5015	0.4987
0.31*	0.4959	0.4930	0.4902	0.4874	0.4845	0.4817	0.4789	0.4761	0.4733	0.4705
0.32*	0.4677	0.4649	0.4621	0.4593	0.4565	0.4538	0.4510	0.4482	0.4454	0.4427
0.33*	0.4399	0.4372	0.4344	0.4316	0.4289	0.4261	0.4234	0.4207	0.4179	0.4152
0.34*	0.4125	0.4097	0.4070	0.4043	0.4016	0.3989	0.3961	0.3934	0.3907	0.3880
0.35*	0.3853	0.3826	0.3799	0.3772	0.3745	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611
0.36*	0.3585	0.3558	0.3531	0.3505	0.3478	0.3451	0.3425	0.3398	0.3372	0.3345
0.37*	0.3319	0.3292	0.3266	0.3239	0.3213	0.3186	0.3160	0.3134	0.3107	0.3081
0.38*	0.3055	0.3029	0.3002	0.2976	0.2950	0.2924	0.2898	0.2871	0.2845	0.2819
0.39*	0.2793	0.2767	0.2741	0.2715	0.2689	0.2663	0.2637	0.2611	0.2585	0.2559
0.40*	0.2533	0.2508	0.2482	0.2456	0.2430	0.2404	0.2378	0.2353	0.2327	0.2301
0.41*	0.2275	0.2250	0.2224	0.2198	0.2173	0.2147	0.2121	0.2096	0.2070	0.2045
0.42*	0.2019	0.1993	0.1968	0.1942	0.1917	0.1891	0.1866	0.1840	0.1815	0.1789
0.43*	0.1764	0.1738	0.1713	0.1687	0.1662	0.1637	0.1611	0.1586	0.1560	0.1535
0.44*	0.1510	0.1484	0.1459	0.1434	0.1408	0.1383	0.1358	0.1332	0.1307	0.1282
0.45*	0.1257	0.1231	0.1206	0.1181	0.1156	0.1130	0.1105	0.1080	0.1055	0.1030
0.46*	0.1004	0.0979	0.0954	0.0929	0.0904	0.0878	0.0853	0.0828	0.0803	0.0778
0.47*	0.0753	0.0728	0.0702	0.0677	0.0652	0.0627	0.0602	0.0577	0.0552	0.0527
0.48*	0.0502	0.0476	0.0451	0.0426	0.0401	0.0376	0.0351	0.0326	0.0301	0.0276
0.49*	0.0251	0.0226	0.0201	0.0175	0.0150	0.0125	0.0100	0.0075	0.0050	0.0025

II. 自由度 φ の χ^2 分布の上側 ε 点 : $\chi^2_{\varphi}(\varepsilon)$

$\varphi \setminus \varepsilon$	0.990	0.975	0.950	0.900	0.500	0.100	0.050	0.025	0.010
1	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	0.4549	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349
2	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	1.3863	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103
3	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	2.3660	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449
4	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	3.3567	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767
5	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	4.3515	9.2364	11.0705	12.8325	15.0863
6	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	5.3481	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119
7	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	6.3458	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753
8	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	7.3441	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902
9	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	8.3428	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660
10	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	9.3418	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093
11	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	10.3410	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250
12	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	11.3403	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170
13	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415	12.3398	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882
14	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	13.3393	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412
15	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468	14.3389	22.3071	24.9958	27.4884	30.5779
16	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	15.3385	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999
17	6.4078	7.5642	8.6718	10.0852	16.3382	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087
18	7.0149	8.2307	9.3905	10.8649	17.3379	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053
19	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509	18.3377	27.2036	30.1435	32.8523	36.1909
20	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	19.3374	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662
21	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	20.3372	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322
22	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415	21.3370	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894
23	10.1957	11.6886	13.0905	14.8480	22.3369	32.0069	35.1725	38.0756	41.6384
24	10.8564	12.4012	13.8484	15.6587	23.3367	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798
25	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	24.3366	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141
26	12.1981	13.8439	15.3792	17.2919	25.3365	35.5632	38.8851	41.9232	45.6417
27	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	26.3363	36.7412	40.1133	43.1945	46.9629
28	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392	27.3362	37.9159	41.3371	44.4608	48.2782
29	14.2565	16.0471	17.7084	19.7677	28.3361	39.0875	42.5570	45.7223	49.5879
30	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992	29.3360	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922
31	15.6555	17.5387	19.2806	21.4336	30.3359	41.4217	44.9853	48.2319	52.1914
32	16.3622	18.2908	20.0719	22.2706	31.3359	42.5847	46.1943	49.4804	53.4858
33	17.0735	19.0467	20.8665	23.1102	32.3358	43.7452	47.3999	50.7251	54.7755
34	17.7891	19.8063	21.6643	23.9523	33.3357	44.9032	48.6024	51.9660	56.0609
35	18.5089	20.5694	22.4650	24.7967	34.3356	46.0588	49.8018	53.2033	57.3421
36	19.2327	21.3359	23.2686	25.6433	35.3356	47.2122	50.9985	54.4373	58.6192
37	19.9602	22.1056	24.0749	26.4921	36.3355	48.3634	52.1923	55.6680	59.8925
38	20.6914	22.8785	24.8839	27.3430	37.3355	49.5126	53.3835	56.8955	61.1621
39	21.4262	23.6543	25.6954	28.1958	38.3354	50.6598	54.5722	58.1201	62.4281
40	22.1643	24.4330	26.5093	29.0505	39.3353	51.8051	55.7585	59.3417	63.6907
41	22.9056	25.2145	27.3256	29.9071	40.3353	52.9485	56.9424	60.5606	64.9501
42	23.6501	25.9987	28.1440	30.7654	41.3352	54.0902	58.1240	61.7768	66.2062
43	24.3976	26.7854	28.9647	31.6255	42.3352	55.2302	59.3035	62.9904	67.4593
44	25.1480	27.5746	29.7875	32.4871	43.3352	56.3685	60.4809	64.2015	68.7095
45	25.9013	28.3662	30.6123	33.3504	44.3351	57.5053	61.6562	65.4102	69.9568
46	26.6572	29.1601	31.4390	34.2152	45.3351	58.6405	62.8296	66.6165	71.2014
47	27.4158	29.9562	32.2676	35.0814	46.3350	59.7743	64.0011	67.8206	72.4433
48	28.1770	30.7545	33.0981	35.9491	47.3350	60.9066	65.1708	69.0226	73.6826
49	28.9406	31.5549	33.9303	36.8182	48.3350	62.0375	66.3386	70.2224	74.9195
50	29.7067	32.3574	34.7643	37.6886	49.3349	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539

Ⅲ. 分母の自由度 n 、分子の自由度 m の F 分布の上側 ε 点： $F_n^m(\varepsilon)$

$\varepsilon = 0.100$

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	8.5263	9.0000	9.1618	9.2434	9.2926	9.3255	9.3491	9.3668	9.3805	9.3916
3	5.5383	5.4624	5.3908	5.3426	5.3092	5.2847	5.2662	5.2517	5.2400	5.2304
4	4.5448	4.3246	4.1909	4.1072	4.0506	4.0097	3.9790	3.9549	3.9357	3.9199
5	4.0604	3.7797	3.6195	3.5202	3.4530	3.4045	3.3679	3.3393	3.3163	3.2974
6	3.7759	3.4633	3.2888	3.1808	3.1075	3.0546	3.0145	2.9830	2.9577	2.9369
7	3.5894	3.2574	3.0741	2.9605	2.8833	2.8274	2.7849	2.7516	2.7247	2.7025
8	3.4579	3.1131	2.9238	2.8064	2.7264	2.6683	2.6241	2.5893	2.5612	2.5380
9	3.3603	3.0065	2.8129	2.6927	2.6106	2.5509	2.5053	2.4694	2.4403	2.4163
10	3.2850	2.9245	2.7277	2.6053	2.5216	2.4606	2.4140	2.3772	2.3473	2.3226

$\varepsilon = 0.050$

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	18.5128	19.0000	19.1643	19.2468	19.2964	19.3295	19.3532	19.3710	19.3848	19.3959
3	10.1280	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988	5.9644
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990	4.0600
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767	3.6365
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782

$\varepsilon = 0.025$

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	38.5063	39.0000	39.1655	39.2484	39.2982	39.3315	39.3552	39.3730	39.3869	39.3980
3	17.4434	16.0441	15.4392	15.1010	14.8848	14.7347	14.6244	14.5399	14.4731	14.4189
4	12.2179	10.6491	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439
5	10.0070	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192
6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234	5.4613
7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611
8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951
9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260	3.9639
10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790	3.7168

$\varepsilon = 0.010$

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	98.5025	99.0000	99.1662	99.2494	99.2993	99.3326	99.3564	99.3742	99.3881	99.3992
3	34.1162	30.8165	29.4567	28.7099	28.2371	27.9107	27.6717	27.4892	27.3452	27.2287
4	21.1977	18.0000	16.6944	15.9770	15.5219	15.2069	14.9758	14.7989	14.6591	14.5459
5	16.2582	13.2739	12.0600	11.3919	10.9670	10.6723	10.4555	10.2893	10.1578	10.0510
6	13.7450	10.9248	9.7795	9.1483	8.7459	8.4661	8.2600	8.1017	7.9761	7.8741
7	12.2464	9.5466	8.4513	7.8466	7.4604	7.1914	6.9928	6.8400	6.7188	6.6201
8	11.2586	8.6491	7.5910	7.0061	6.6318	6.3707	6.1776	6.0289	5.9106	5.8143
9	10.5614	8.0215	6.9919	6.4221	6.0569	5.8018	5.6129	5.4671	5.3511	5.2565
10	10.0443	7.5594	6.5523	5.9943	5.6363	5.3858	5.2001	5.0567	4.9424	4.8491

$\varepsilon = 0.005$

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	198.5013	199.0000	199.1664	199.2497	199.2996	199.3330	199.3568	199.3746	199.3885	199.3996
3	55.5520	49.7993	47.4672	46.1946	45.3916	44.8385	44.4341	44.1256	43.8824	43.6858
4	31.3328	26.2843	24.2591	23.1545	22.4564	21.9746	21.6217	21.3520	21.1391	20.9667
5	22.7848	18.3138	16.5298	15.5561	14.9396	14.5133	14.2004	13.9610	13.7716	13.6182
6	18.6350	14.5441	12.9166	12.0275	11.4637	11.0730	10.7859	10.5658	10.3915	10.2500
7	16.2356	12.4040	10.8824	10.0505	9.5221	9.1553	8.8854	8.6781	8.5138	8.3803
8	14.6882	11.0424	9.5965	8.8051	8.3018	7.9520	7.6941	7.4959	7.3386	7.2106
9	13.6136	10.1067	8.7171	7.9559	7.4712	7.1339	6.8849	6.6933	6.5411	6.4172
10	12.8265	9.4270	8.0807	7.3428	6.8724	6.5446	6.3025	6.1159	5.9676	5.8467

IV. 自由度 φ の t 分布の上側 ε 点： $t_{\varphi}(\varepsilon)$

$\varphi \setminus \varepsilon$	0.100	0.050	0.025
1	3.0777	6.3138	12.7062
2	1.8856	2.9200	4.3027
3	1.6377	2.3534	3.1824
4	1.5332	2.1318	2.7764
5	1.4759	2.0150	2.5706
6	1.4398	1.9432	2.4469
7	1.4149	1.8946	2.3646
8	1.3968	1.8595	2.3060
9	1.3830	1.8331	2.2622
10	1.3722	1.8125	2.2281
11	1.3634	1.7959	2.2010
12	1.3562	1.7823	2.1788
13	1.3502	1.7709	2.1604
14	1.3450	1.7613	2.1448
15	1.3406	1.7531	2.1314
16	1.3368	1.7459	2.1199
17	1.3334	1.7396	2.1098
18	1.3304	1.7341	2.1009
19	1.3277	1.7291	2.0930
20	1.3253	1.7247	2.0860
21	1.3232	1.7207	2.0796
22	1.3212	1.7171	2.0739
23	1.3195	1.7139	2.0687
24	1.3178	1.7109	2.0639
25	1.3163	1.7081	2.0595

V. 自然対数表

x	$\log x$
1.1	0.0953
1.2	0.1823
1.3	0.2624
1.4	0.3365
1.5	0.4055
1.6	0.4700
1.7	0.5306
1.8	0.5878
1.9	0.6419
2.0	0.6931
2.5	0.9163
3.0	1.0986
3.5	1.2528
4.0	1.3863
4.5	1.5041
5.0	1.6094
5.5	1.7047
6.0	1.7918
6.5	1.8718
7.0	1.9459
7.5	2.0149
8.0	2.0794
8.5	2.1401
9.0	2.1972
9.5	2.2513
10.0	2.3026

VI. 指数関数表

x	$\exp(x)$
-0.10	0.9048
-0.09	0.9139
-0.08	0.9231
-0.07	0.9324
-0.06	0.9418
-0.05	0.9512
-0.04	0.9608
-0.03	0.9704
-0.02	0.9802
-0.01	0.9900
0.00	1.0000
0.01	1.0101
0.02	1.0202
0.03	1.0305
0.04	1.0408
0.05	1.0513
0.06	1.0618
0.07	1.0725
0.08	1.0833
0.09	1.0942
0.10	1.1052

以上

数学（解答例）

問題 1

(1)

(ア) A, B を確率事象とするとき、

p : A, B は独立

q : $P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\}$

p は、 $P\{A \cap B\} = P\{A\}P\{B\}$ であることを言い換えたもの。

q は、 $P\{A \cap B\} = 0$ であることを言い換えたもの。

たとえば、1 回のコイントスで表が出ることを A とし、5 2 枚のトランプから 1 枚引いてエースが出ることを B としたとき、 $P\{A \cap B\} = P\{A\}P\{B\}$ だが、 $P\{A \cap B\} = 0$ ではない。一方、1 回のコイントスで表が出ることを A とし、裏が出ることを B としたとき、 $P\{A \cap B\} = 0$ だが、 $P\{A \cap B\} = P\{A\}P\{B\}$ ではない。よって、p は q であるための必要条件でも十分条件でもない。

(イ) A, B を確率事象とし、 $P\{B\} \neq 0$ とするとき、

p : A, B は独立

q : $P\{A|B\} = P\{A\}$

独立性の定義から明らかに、p は q であるための必要十分条件である。

(ウ) 確率事象 A, B, C について、

p : A, B は独立 かつ B, C は独立 かつ C, A は独立

q : A, B, C は独立

p が q であるための必要条件であることは独立性の定義から明らかである。

一方、たとえば、 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ で

$$P\{\omega_1\} = P\{\omega_2\} = P\{\omega_3\} = P\{\omega_4\} = \frac{1}{4}$$

とする。

$A = \{\omega_1, \omega_2\}, B = \{\omega_2, \omega_3\}, C = \{\omega_3, \omega_1\}$ とおけば、 $A \cap B = \{\omega_2\}$ より $P\{A \cap B\} = 1/4$ である。また、 $P\{A\} = P\{B\} = 1/2$ であるから、 $P\{A \cap B\} = P\{A\} \cdot P\{B\}$ が成立し、 A, B は独立である。同様に、 B, C は独立、 C, A は独立であることも分かる。一方で、 $A \cap B \cap C = \emptyset$ であるから、 $P\{A \cap B \cap C\} = 0$ となる。したがって、 $P\{A \cap B \cap C\} \neq P\{A\} \cdot P\{B\} \cdot P\{C\}$ となり、 A, B, C は独立でない。

よって、p は q であるための必要条件であるが、十分条件ではない。

(エ) 確率変数 X, Y について、

p : X, Y は独立

q : X^2, Y^2 は独立

X, Y が独立ならば X^2, Y^2 は独立である。

一方、たとえば、サイコロを1回振ったときに、

確率変数 X : 「6の目が出ればマイナス1、2か4の目なら1、それ以外なら0」

確率変数 Y : 「6の目が出ればマイナス1、3の目なら1、それ以外なら0」

とすると、 X, Y は独立でないが、 X^2, Y^2 は独立である。

よって、pはqであるための十分条件であるが、必要条件ではない。

(オ) 確率変数 X, Y について、 X, Y, XY の期待値がそれぞれ存在するとき、

p : X, Y は独立

q : $E[XY] = E[X] \cdot E[Y]$

pならばqであるが、その逆は一般には成り立たない。

例えば、4点(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)となる確率がそれぞれ1/4であるような同時確率変数(X, Y)を考えると、 $E[X] = E[Y] = E[XY] = 0$ であるが、

$$P(X=1, Y=0) = 1/4, \quad P(X=1)P(Y=0) = (1/4)(1/2) = 1/8$$

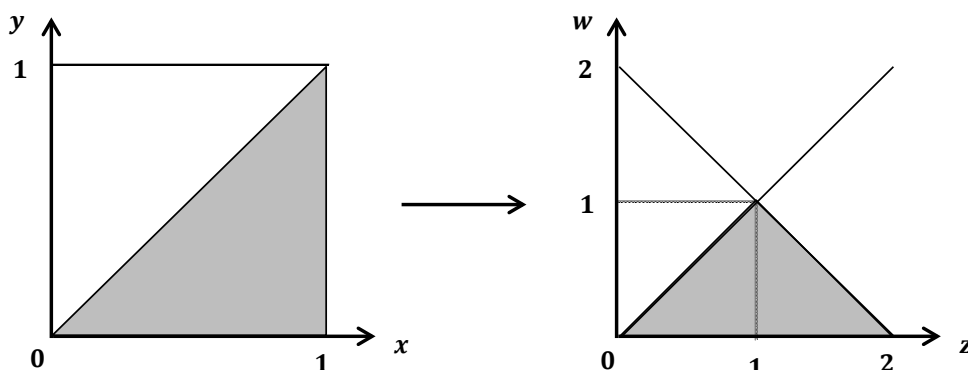
よって、pはqであるための十分条件であるが、必要条件ではない。

よって、解答は ① (D) ② (A) ③ (B) ④ (C) ⑤ (C)

(2)

$$z = x + y, \quad w = x - y \quad \text{とおくと、} \quad x = \frac{z+w}{2}, \quad y = \frac{z-w}{2}$$

$0 < y < x < 1$ より $0 < z - w < z + w < 2$ であるから、



$0 < z \leq 1$ のとき、

$$g(z) = \int_0^z 8 \cdot \frac{z+w}{2} \cdot \frac{z-w}{2} \cdot \frac{1}{2} dw = \frac{2}{3} z^3$$

$1 < z < 2$ のとき、

$$g(z) = \int_0^{2-z} (z+w)(z-w)dw = -\frac{2}{3}z^3 + 4z - \frac{8}{3}$$

よって、解答は ① (C) ② (F)

(3)

X 、 Y の分布関数をそれぞれ $F(x)$ 、 $G(y)$ とし、確率密度関数を $f(x)$ 、 $g(y)$ とすると、

$0 \leq x \leq 1$ において、

$$F(x) = P(\max(A, B) < x) = P(A < x)P(B < x) = x^2$$

$$f(x) = 2x$$

$0 \leq y \leq 1$ において、

$$G(y) = P(\min(A, B) < y) = 1 - P(\min(A, B) > y) = 1 - P(A > y)P(B > y) = 1 - (1 - y)^2$$

$$g(y) = 2(1 - y)$$

従って X 、 Y の積率母関数 $M_X(t)$ および $M_Y(t)$ は、

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_0^1 2xe^{tx} dx \\ &= \left[2x \frac{1}{t} e^{tx} \right]_0^1 - \int_0^1 2 \frac{1}{t} e^{tx} dx \\ &= 2 \frac{1}{t} e^t - \left[2 \frac{1}{t^2} e^{tx} \right]_0^1 \\ &= 2 \left(\frac{te^t - e^t + 1}{t^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= \int_0^1 2(1 - y)e^{ty} dy \\ &= \int_0^1 2e^{ty} dy - \int_0^1 2ye^{ty} dy \\ &= \left[2 \frac{1}{t} e^{ty} \right]_0^1 - 2 \left(\frac{te^t - e^t + 1}{t^2} \right) \\ &= 2 \left(\frac{e^t - t - 1}{t^2} \right) \end{aligned}$$

となる。

よって、解答は ① : (I) ② : (D)

(4)

$$E[X_i] = p(1 - p)、$$

$$E[X_i^2] = p(1 - p)より、$$

$$V[X_i] = p(1 - p)(1 - p + p^2)となる。$$

$$\begin{aligned} E[X_i X_{i+1}] &= 0 \cdot 0 \cdot P(X_i = 0, X_{i+1} = 0) + 0 \cdot 1 \cdot P(X_i = 0, X_{i+1} = 1) \\ &\quad + 1 \cdot 0 \cdot P(X_i = 1, X_{i+1} = 0) + 1 \cdot 1 \cdot P(X_i = 1, X_{i+1} = 1) \\ &= 0 \cdot 0 \cdot \{1 - 2p(1 - p)\} + 0 \cdot 1 \cdot p(1 - p) + 1 \cdot 0 \cdot (1 - p)p + 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \quad \text{より、} \end{aligned}$$

$Cov(X_i, X_{i+1}) = E[X_i X_{i+1}] - E[X_i]E[X_{i+1}] = -p^2(1-p)^2$ となる。

また、独立性より $Cov(X_j, X_k) = 0$ ($|j-k| \geq 2$) となるため、

$$V[X] = V[X_1] + \dots + V[X_{n-1}] + 2Cov(X_1, X_2) + \dots + 2Cov(X_{n-2}, X_{n-1}) \\ = p(1-p)\{(3p^2 - 3p + 1)n - 5p^2 + 5p - 1\}$$

よって、解答は ① : (B) ② (I)

(5)

まず始めにモーメント法による推計を行う。母集団は一様分布 $U(a, b)$ に従うので母平均 $\mu = \frac{a+b}{2}$ 、

母分散 $\sigma^2 = \frac{(a-b)^2}{12}$ となる。これより $a = \mu - \sqrt{3}\sigma$ 、 $b = \mu + \sqrt{3}\sigma$ が得られる。標本値を小さい順に

標本値を小さい順に x_1, x_2, \dots, x_7 と置くと、母平均 μ の推定値 $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ および母平均 σ^2 の推定値

$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ を用いて、 $a = \hat{\mu} - \sqrt{3}\hat{\sigma}$ 、 $b = \hat{\mu} + \sqrt{3}\hat{\sigma}$ と推定される。与えられた標本値から

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 0, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 3.002 \text{ となるので、}$$

$$a = 0 - \sqrt{3} \times \sqrt{3.002} = -3.001$$

$$b = 0 + \sqrt{3} \times \sqrt{3.002} = 3.001$$

と推定される。

次に、最尤法による推定を行う。一様分布の分布関数は $f(x) = \frac{1}{b-a}$ ($a \leq x \leq b$) であるので、

尤度関数は $L(a, b) = \left(\frac{1}{b-a}\right)^7$ となる。 a, b を $(a \leq x_1)$ 、 $(x_7 \leq b)$ なる範囲で動かして、 $L(a, b)$ を最大

にすると、 $a = x_1 = -2.6$ 、 $b = x_7 = 2.4$ と推定される。

よって、解答は ① (C) ② (J) ③ (G) ④ (D)

(6)

まずは、男性の試験の合格率を近似法で区間推定する。

標本数 $n = 40$ 、標本百分率は、 $\hat{p} = \frac{16}{40} = 0.4$ より、標準正規分布の上側 5% 点 $\varepsilon(0.05)$ を用いることで、

合格率の下限 \hat{p}_L 、上限 \hat{p}_U はそれぞれ、

$$\hat{p}_L = \hat{p} - \varepsilon(0.05) \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0.4 - 1.6449 \times \sqrt{\frac{0.4 \times (1-0.4)}{40}} = 0.27$$

$$\hat{p}_U = \hat{p} + \varepsilon(0.05) \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0.4 + 1.6449 \times \sqrt{\frac{0.4 \times (1-0.4)}{40}} = 0.53$$

次に、女性の試験の合格率を精密法で区間推定する。

F 分布の上側5%点 $F_{n_2}^{n_1}(0.05)$ 、 $F_{n_4}^{n_3}(0.05)$ を用いるが、標本数 $n' = 5$ 、出現数 $k' = 2$ より F 分布の自由度は、

$$n_1 = 2(n' - k' + 1) = 8, \quad n_2 = 2k' = 4$$

$$n_3 = 2(k' + 1) = 6, \quad n_4 = 2(n' - k') = 6$$

よって、合格率の下限 \hat{p}_L' 、上限 \hat{p}_U' はそれぞれ、

$$\hat{p}_L' = \frac{n_2}{n_1 F_{n_2}^{n_1}(0.05) + n_2} = \frac{4}{8 \times 6.0410 + 4} = 0.08$$

$$\hat{p}_U' = \frac{n_3 F_{n_4}^{n_3}(0.05)}{n_3 F_{n_4}^{n_3}(0.05) + n_4} = \frac{6 \times 4.2839}{6 \times 4.2839 + 6} = 0.81$$

よって、解答は ① (H) ② (C) ③ (C) ④ (F)

(7)

2回の試行で得られた、白玉の個数をそれぞれ、 X_1, X_2 と置くと、これらの確率変数は負の二項分布 $NB(k, p)$ に従う。帰無仮説が正しいものとする、 $k = 3$ 、 $p = \frac{3}{4}$ である。

第1種の誤りの起こる確率を α とすると、

$$\begin{aligned} \alpha &= P(X_1 \geq 2 \cap X_2 \geq 2) \\ &= P(X_1 \geq 2) \cdot P(X_2 \geq 2) \\ &= \{P(X_1 \geq 2)\}^2 \\ &= \{1 - P(X_1 = 0) - P(X_1 = 1)\}^2 \\ &= (1 - 0.75^3 - {}_3C_1 \times 0.25 \times 0.75^3)^2 \\ &= 0.068 \end{aligned}$$

よって、第1種の誤りの起こる確率は6.8%である。

次に、対立仮説が正しいものとする、 $k = 3$ 、 $p = \frac{1}{4}$ である。

第2種の誤りの起こる確率を β とすると、

$$\begin{aligned}\beta &= P(X_1 \leq 1 \cup X_2 \leq 1) \\ &= 1 - P(X_1 \geq 2 \cap X_2 \geq 2) \\ &= 1 - P(X_1 \geq 2) \cdot P(X_2 \geq 2) \\ &= 1 - \{P(X_1 \geq 2)\}^2 \\ &= 1 - \{1 - P(X_1 = 0) - P(X_1 = 1)\}^2 \\ &= 1 - (1 - 0.25^3 - {}_3C_1 \times 0.75 \times 0.25^3)^2 \\ &= 0.099\end{aligned}$$

検出力は $1 - \beta$ であるから、90.1%となる。

よって、解答は ① (C) ② (F)

(8)

分割表の各要素を以下の通り置くと

	男性	女性	計
チーズケーキが好き	$f_{11} = 4$	$f_{12} = 12$	$f_{1\cdot} = 16$
ショートケーキが好き	$f_{21} = 9$	$f_{22} = 5$	$f_{2\cdot} = 14$
計	$f_{\cdot 1} = 13$	$f_{\cdot 2} = 17$	$n = 30$

独立性の検定における検定統計量は

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\left(f_{ij} - \frac{f_{i\cdot} f_{\cdot j}}{n}\right)^2}{\frac{f_{i\cdot} f_{\cdot j}}{n}} = \frac{(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})^2 \cdot n}{f_{1\cdot} f_{2\cdot} f_{\cdot 1} f_{\cdot 2}} = \frac{(4 \times 5 - 12 \times 9)^2 \times 30}{16 \times 14 \times 13 \times 17} = 4.7$$

自由度は $(2 - 1) \times (2 - 1) = 1$ であるため、 $\chi_1^2(0.05) = 3.84 < \chi^2 = 4.7$ となり、帰無仮説は棄却される。

次にイエーツの補正を行うと

$$\chi'^2 = \frac{\left(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} + \frac{n}{2}\right)^2 \cdot n}{f_{1\cdot} f_{2\cdot} f_{\cdot 1} f_{\cdot 2}} = \frac{(4 \times 5 - 12 \times 9 + 15)^2 \times 30}{16 \times 14 \times 13 \times 17} = 3.2 < \chi_1^2(0.05) = 3.84$$

となり、帰無仮説は採択される。

よって、解答は ① (F) ② (B) ③ (C) ④ (A)

(9)

まず、 $y = \alpha + \beta x$ として、 α と β を最小二乗法により推定すると、

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

$$\alpha = \bar{y} - \hat{\beta} \cdot \bar{x} = 31 - 1.5 \times 24 = -5$$

次に決定係数を求めると、

$$R^2 = \frac{(\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}))^2}{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2} = \frac{15^2}{10 \times 48} = \frac{15}{32}$$

最後に誤差分散の推定値を求めると、

$$\sigma^2 = \frac{1}{7-2} \sum_{i=1}^7 \{y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i)\}^2 = \frac{7}{5} S_y^2 (1 - R^2) = \frac{51}{10}$$

よって、解答は ① (C) ② (J) ③ (F) ④ (G)

(10)

$$\begin{aligned} E(X_t^6) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} x^6 e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} x^6 e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} (2ty)^3 e^{-y} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2y}} dy \\ &= \frac{8t^3}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} y^{5/2} e^{-y} dy = \frac{8t^3}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{8t^3}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 15t^3 \end{aligned}$$

である。また、 $s > t$ のとき、

$$E(X_s \cdot X_t^5) = E((X_s - X_t + X_t) \cdot X_t^5) = E((X_s - X_t) \cdot X_t^5) + E(X_t^6)$$

である。 $(X_s - X_t)$ と X_t は独立であり、 $E(X_s - X_t) = 0$ なので、

$$E((X_s - X_t) \cdot X_t^5) = E(X_s - X_t)E(X_t^5) = 0$$

したがって、 $E(X_s \cdot X_t^5) = E(X_t^6) = 15t^3$ である。

よって、解答は ① (E) ② (E)

(11)

与えられた式を変形し、両辺の分散を計算すると、

$$V\left[Y_t - \frac{1}{3}Y_{t-1}\right] = V\left[-\frac{1}{2}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t\right]$$

$$V[Y_t] - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \text{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) + \frac{1}{3^2} V[Y_{t-1}] = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 V[\varepsilon_{t-1}] + V[\varepsilon_t]$$

$$\gamma_0 - \frac{2}{3}\gamma_1 + \frac{1}{9}\gamma_0 = \frac{1}{4} \cdot 2^2 + 2^2$$

$$\gamma_0 = \frac{3}{5}\gamma_1 + \frac{9}{2} \quad \cdots (1)$$

また、自己共分散 γ_1 の定義より、

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \text{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) = \text{Cov}\left(\frac{1}{3}Y_{t-1} - \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, Y_{t-1}\right) \\ &= \frac{1}{3}\gamma_0 - \frac{1}{2}V[\varepsilon_{t-1}] = \frac{1}{3}\gamma_0 - 2 \quad \cdots (2)\end{aligned}$$

式(1)、(2)より、

$$\gamma_0 = \frac{33}{8}, \quad \gamma_1 = -\frac{5}{8}$$

また、 $h \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned}\gamma_h &= \text{Cov}(Y_t, Y_{t-h}) = \text{Cov}\left(\frac{1}{3}Y_{t-1} - \frac{1}{2}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, Y_{t-h}\right) \\ &= \frac{1}{3}\text{Cov}(Y_{t-1}, Y_{t-h}) = \frac{1}{3}\gamma_{h-1}\end{aligned}$$

γ_h は初項： $\gamma_1 = -\frac{5}{8}$ 、公比： $\frac{1}{3}$ の等比数列であるため、

$$\gamma_h = \left(-\frac{5}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{h-1} \quad (h \geq 1)$$

よって、解答は ①:(E) ②:(A)

(12)

確率 $P(X = k)$ は、重みづけの確率として

$$P(X = k) = \frac{1}{4}P_1(X_1 = k) + \frac{1}{3}P_2(X_2 = k) + \frac{5}{12}P_3(X_3 = k)$$

と表わされることから、 X_i ($i = 1, 2, 3$)をそれぞれ独立に平均 i の幾何分布に従う確率変数とし、 X_i と独立に

$$P(I = 1) = \frac{1}{4}$$

$$P(I = 2) = \frac{1}{3}$$

$$P(I = 3) = \frac{5}{12}$$

となる確率変数 I を定義すると、 $X \sim X_I$ である。

よって題意から、 $(0, 1)$ 区間の一様分布に従う確率変数 U の一様乱数による実現値を u_1, u_2 とし、 $G_i(x) = P_i(X_i \leq x)$ とすると、

$$0 \leq u_1 \leq \frac{1}{4} \text{ ならば } X = G_1^{-1}(u_2)$$

$$\frac{1}{4} < u_1 \leq \frac{7}{12} \text{ ならば } X = G_2^{-1}(u_2)$$

$$\frac{7}{12} < u_1 \leq 1 \text{ ならば } X = G_3^{-1}(u_2)$$

$u_1 = 0.9$ であるから、 $X = G_3^{-1}(u_2)$ として X の実現値が定まる。

ここで X_3 は平均3の幾何分布に従い、この幾何分布の平均は $\frac{1-p_3}{p_3}$ であるから、 $p_3 = \frac{1}{4}$ である。

X_3 を生成するには、 $p_3^j = P(X_3 = j)$ および U に対し確率変数 Y を

$$Y = \begin{cases} 0, & U \leq p_3^0 \\ 1, & p_3^0 < U \leq p_3^0 + p_3^1 \\ \vdots & \vdots \\ j-1, & \sum_{i=0}^{j-1} p_3^i < U \leq \sum_{i=0}^j p_3^i \\ j, & \sum_{i=0}^j p_3^i < U \leq \sum_{i=0}^j p_3^i \end{cases}$$

とすると、 $P(Y = j) = P(\sum_{i=0}^{j-1} p_3^i < U \leq \sum_{i=0}^j p_3^i) = p_3^j$ である。

ここで、 $u_2 = 0.4$ であり、

$$p_3^0 = P(X_3 = 0) = p(1-p)^0 = \frac{1}{4}$$

$$p_3^0 + p_3^1 = P(X_3 = 0) + P(X_3 = 1) = p(1-p)^0 + p(1-p)^1 = \frac{7}{16}$$

従って、 $p_3^0 < u_2 \leq p_3^0 + p_3^1$ であることから、 X_3 の実現値は1となる。

よって、解答は (B)

問題2

(1)

I) Aさんが持っていない「プレミアム」の種類が k 種類($k = 1, 2, 3$)である状態からカードを購入し続け、 k 種類のうちいずれか1種類を引き当てるまでにかかった購入回数として確率変数 X_k を定義する。まず、 $k = 3$ の場合を考えると、

$$P(X_3 = n) = 0.03 \times 0.97^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と表せることから、

$$E[X_3] = \sum_{n=1}^{\infty} n \times 0.03 \times 0.97^{n-1} = \frac{0.03}{(1-0.97)^2} = \frac{100}{3}$$

を得る。

同様に $k = 1, 2$ の場合についても同様に考えることで $E[X_1]$ 、 $E[X_2]$ を計算すると、求める購入回数の平均値は

$$E[X_3] + E[X_2] + E[X_1] = \frac{550}{3}$$

となる。

II) Aさんが持っていない「プレミアム」の種類が k 種類($k = 1, 2, 3$)である状態からカードを購入し続け、3種類の「プレミアム」をすべて集めるまでにかかった購入回数の平均値を E_k と置く。持っていない「プレミアム」の種類が k 種類である状態でカードを1枚購入したとき、それが持っていない「プレミアム」である場合は持っていない「プレミアム」の種類が1つ減り、そうでない

場合は持っていない「プレミアム」の種類は変わらないことから、次の漸化式が成り立つ。

$$E_k = 1 + \frac{k}{100} \times E_{k-1} + \left(1 - \frac{k}{100}\right) \times E_k \quad (k = 2, 3)$$

よって

$$E_3 = E_2 + \frac{100}{3} = E_1 + \frac{100}{2} + \frac{100}{3} = 100 + \frac{100}{2} + \frac{100}{3} = \frac{550}{3}$$

以上より、求める購入回数の平均値 $\frac{550}{3}$ を得る。

よって、解答は ① (K) ② (L) ③ (B) ④ (Q) ⑤ (Z) ⑥ (G)

(2)

Aさんが持っていない「プレミアム」が*i*種類 ($i = 1, 2, 3$) の状態で、パックを1つ購入したとき、この*i*種類のうち*j*種類 ($0 \leq j \leq i$) の「プレミアム」が入っている確率を $P(i, j)$ とする。また、Aさんが持っていない「プレミアム」が*i*種類 ($i = 1, 2, 3$) の状態からパックのみを購入し続けたとき、3種類の「プレミアム」をすべて集めるまでにかかる購入回数の平均値を E_i^p とする。

まず、 $i = 3$ の場合を考える。このとき、(1) II) と同様に考えることで、次の関係式を得る。

$$E_3^p = 1 + P(3, 0) \times E_3^p + P(3, 1) \times E_2^p + P(3, 2) \times E_1^p \quad \dots\dots (A)$$

次に $P(i, j)$ を求めたい。

(ア) $j = 0$ の場合

この場合、20枚の中に1枚も「プレミアム」が入っていない確率であるから、

$$P(3, 0) = 0.7 \times 0.97^{19} = 0.39242$$

(イ) $j = 1$ の場合

パックに入っている20枚のカードのうち「プレミアム」である確率が高い1枚のカードの種類を Y 、それ以外の19枚のカードの種類を Z_k ($k = 1, 2, \dots, 19$)とすると、この場合「 Y がプレミアムであり、 Z_k のいずれも Y 以外のプレミアムではない」または「 Y がプレミアムではなく、 $\{Z_k | k = 1, 2, \dots, 19\}$ にプレミアムが1種類のみ含まれる」となる確率であるから、

$$\begin{aligned} P(3, 1) &= 0.3 \times 0.98^{19} + 0.7 \times (3 \times (0.98^{19} - 0.97^{19})) \\ &= 2.4 \times 0.98^{19} - 2.1 \times 0.97^{19} \\ &= 0.45762 \end{aligned}$$

(ウ) $j = 2$ の場合

(イ) と同様に考えれば、

$$\begin{aligned} P(3,2) &= 0.3 \times (2 \times (0.99^{19} - 0.98^{19})) + 0.7 \times (3 \times (0.99^{19} - 2 \times 0.98^{19} + 0.97^{19})) \\ &= 2.7 \times 0.99^{19} - 4.8 \times 0.98^{19} + 2.1 \times 0.97^{19} \\ &= 0.13824 \end{aligned}$$

$i = 1, 2$ の場合についても同様に考えることで E_i^p を求めると、

$$E_1^p = \frac{1}{1 - P(1,0)} = \frac{1}{1 - 0.9 \times 0.99^{19}} = 3.899 \dots \cong 3.90$$

$$E_2^p = \frac{1 + P(2,1) \times E_1^p}{1 - P(2,0)} = \frac{1 + (1.8 \times 0.99^{19} - 1.6 \times 0.98^{19}) \times E_1^p}{1 - 0.8 \times 0.98^{19}} = 5.602 \dots \cong 5.60$$

以上より、これらを (A) に代入して、

$$E_3^p = 6.752 \dots \cong 6.75$$

を得る。

よって、解答は ⑦ (C) ⑧ (F) ⑨ (H) ⑩ (J) ⑪ (L) ⑫ (D)
⑬ (E) ⑭ (J) ⑮ (M)

(3)

まず、 $m = 0$ の場合に支払う金額の平均値は (1) より、

$$550/3 \times 100 = 18,333.3 \dots \cong 18,333 \text{円}$$

また、 $m = 3$ の場合に支払う金額の平均値は (2) より、

$$E_3^p \times 2,700 = 6.7526 \dots \times 2,700 = 18,232.0 \dots \cong 18,232 \text{円}$$

次に、 $m = 1$ の場合に支払う金額の平均値を求める。まず、段階 I から段階 II に移行するまでに支払う金額の平均値は、

$$2,700 \times \sum_{n=1}^{\infty} n(1 - P(3,0))P(3,0)^{n-1} = \frac{2,700}{1 - 0.7 \times 0.97^{19}} = 4,443.8 \dots$$

となる。段階 I から段階 II に移行した時点で、持っている「プレミアム」の種類が1種類である確率は、

$$\frac{P(3,1)}{1 - P(3,0)}$$

同様に段階 I で入手した「プレミアム」の種類が2種類であった確率は、

$$\frac{P(3,2)}{1 - P(3,0)}$$

であるから、 $m = 1$ の場合に支払う金額の平均値は、

$$4,443.8 \dots + 100 \times \left(\frac{P(3,1)}{1 - P(3,0)} E_2 + \frac{P(3,2)}{1 - P(3,0)} E_1 \right) = 18,016.8 \dots$$

より18,017円となる。

最後に、 $m = 2$ の場合に支払う金額の平均値を求める。まず、段階Ⅰから段階Ⅱに移行するまでに支払う金額の平均値は、

$$\frac{1}{1 - P(3,0)} \times \left(1 + \frac{P(3,1)}{1 - P(2,0)} \right) \times 2,700 = 8,912.9 \dots$$

となる。ここで、段階Ⅰから段階Ⅱに移行した時点で、持っている「プレミアム」の種類が2種類である確率は、

$$\frac{1}{1 - P(3,0)} \times \left(P(3,2) + \frac{P(3,1) \times P(2,1)}{1 - P(2,0)} \right)$$

であるから、 $m = 2$ の場合に支払う金額の平均値は

$$8,912.9 \dots + 100 \times \left\{ \frac{1}{1 - P(3,0)} \times \left(P(3,2) + \frac{P(3,1) \times P(2,1)}{1 - P(2,0)} \right) \right\} \times E_1 = 17,763.3 \dots$$

より17,763円となる。

以上より、求める m の値は2である。

よって、解答は ⑩ (O) ⑰ (H) ⑱ (C)

問題3

(1)

中央値 \tilde{X} は、一様分布 $U(0,1)$ の母集団からの標本変量 $X_1, X_2, \dots, X_{2m+1}$ (m は自然数) を小さいものから順番に並べ替えた場合、小さい方から $m+1$ 番目であるため、順序統計量 $X_{(m+1)}$ と等しい。

よって、中央値 \tilde{X} の確率密度関数 $f_{\tilde{X}}(x)$ は、式(A)において、

$\alpha = m+1$ 、 $\beta = m+1$ とすることで、

$$f_{\tilde{X}}(x) = \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} x^m \cdot (1-x)^m \text{となる。}$$

式(A)より、 $\int_0^1 x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1} dx = \frac{(\alpha-1)! \cdot (\beta-1)!}{(\alpha+\beta-1)!}$ であるから、

中央値 \tilde{X} の期待値 $E[\tilde{X}]$ は

$$\begin{aligned} E[\tilde{X}] &= \int_0^1 x \cdot f_{\tilde{X}}(x) dx = \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} \int_0^1 x^{m+1} \cdot (1-x)^m dx \\ &= \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} \cdot \frac{(m+1)! \cdot m!}{(2m+2)!} = \frac{m+1}{2m+2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となり、同様に中央値 \tilde{X} の分散 $V[\tilde{X}]$ は

$$\begin{aligned} V[\tilde{X}] &= E[\tilde{X}^2] - (E[\tilde{X}])^2 = \int_0^1 x^2 \cdot f_{\tilde{X}}(x) dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} \int_0^1 x^{m+2} \cdot (1-x)^m dx - \frac{1}{4} \\ &= \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} \cdot \frac{(m+2)! \cdot m!}{(2m+3)!} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4(2m+3)} \end{aligned}$$

となる。

また、標本変量平均 \bar{X} の分散 $V[\bar{X}]$ は

$$\begin{aligned} V[\bar{X}] &= V\left[\frac{1}{2m+1} \sum_{i=1}^{2m+1} X_i\right] = \left(\frac{1}{2m+1}\right)^2 V\left[\sum_{i=1}^{2m+1} X_i\right] \\ &= \left(\frac{1}{2m+1}\right)^2 \left\{ (2m+1) \int_0^1 1 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx \right\} = \frac{1}{12(2m+1)} \end{aligned}$$

となり、2つの分散の差を取ると、

$$V[\tilde{X}] - V[\bar{X}] = \frac{1}{4(2m+3)} - \frac{1}{12(2m+1)} = \frac{4m}{12(2m+3)(2m+1)} > 0 \text{ であるから、}$$

m が自然数のもとでは常に中央値の分散の方が標本変量平均の分散よりも大きくなる。

よって、解答は ① (C) ② (C) ③ (V) ④ (T) ⑤ (A) ⑥ (G)
⑦ (B) ⑧ (N) ⑨ (O) (⑤と⑥は順不同)

(2)

式 (B) において $y = F_Y^{-1}(x)$ として変数変換を行う。

$$x = F_Y(y), \quad \left| \frac{dx}{dy} \right| = f_Y(y) \text{ であるから、}$$

$$f_{\tilde{Y}}(y) = \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} \cdot \{F_Y(y)\}^m \cdot \{1 - F_Y(y)\}^m \cdot f_Y(y) \text{ となる。}$$

正規分布 $N(\mu, 2^2)$ は μ を中心に対称な分布であるから、

$$\int_{-\infty}^{\mu} f_Y(t) dt = \int_{\mu}^{\infty} f_Y(t) dt = \frac{1}{2} \text{ である。}$$

これを用いて、 $f_{\tilde{Y}}(y)$ を変形すると、

$$\begin{aligned}
 f_{\tilde{Y}}(y) &= \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} \cdot F_Y(y)^m \cdot (1-F_Y(y))^m \cdot f_Y(y) \\
 &= \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\mu} f_Y(t) dt + \int_{\mu}^y f_Y(t) dt \right)^m \cdot \left(\int_{\mu}^{\infty} f_Y(t) dt - \int_{\mu}^y f_Y(t) dt \right)^m \cdot f_Y(y) \\
 &= \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{2} + \int_{\mu}^y f_Y(t) dt \right) \left(\frac{1}{2} - \int_{\mu}^y f_Y(t) dt \right) \right\}^m \cdot f_Y(y) \\
 &= \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} \cdot \left\{ \frac{1}{4} - \left(\int_{\mu}^y f_Y(t) dt \right)^2 \right\}^m \cdot f_Y(y) \quad \text{となる。}
 \end{aligned}$$

中央値 \tilde{Y} の確率密度関数 $f_{\tilde{Y}}(y)$ は μ を中心とした偶関数であるため、

$$\begin{aligned}
 E[\tilde{Y}] &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_{\tilde{Y}}(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mu) f_{\tilde{Y}}(y) dy + \int_{-\infty}^{\infty} \mu f_{\tilde{Y}}(y) dy \\
 &= \int_{\mu}^{\infty} (y - \mu) f_{\tilde{Y}}(y) dy + \int_{-\infty}^{\mu} (y - \mu) f_{\tilde{Y}}(y) dy + \mu \int_{-\infty}^{\infty} f_{\tilde{Y}}(y) dy \\
 &= \int_{\mu}^{\infty} (y - \mu) f_{\tilde{Y}}(y) dy - \int_{\mu}^{\infty} (y - \mu) f_{\tilde{Y}}(y) dy + \mu \int_{-\infty}^{\infty} f_{\tilde{Y}}(y) dy \\
 &= 0 + \mu \cdot 1 = \mu
 \end{aligned}$$

となるから、中央値 \tilde{Y} は不偏性を満たすことが分かる。

よって、解答は ⑩ (V) ⑪ (T) ⑫ (E) ⑬ (M) ⑭ (G) ⑮ (H)
⑯ (K) ⑰ (C) ⑱ (A) ⑲ (K) (⑫と⑬は順不同)

(3)

式(C)において $z = \sqrt{2m+1}(y - \mu)$ として変数変換を行う。

$$y = \mu + \frac{z}{\sqrt{2m+1}}, \quad \left| \frac{dy}{dz} \right| = \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \quad \text{であるから、}$$

$$\begin{aligned}
 f_Z(z) &= \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \cdot \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} \cdot \left\{ \frac{1}{4} - \left(\int_{\mu}^{\mu + \frac{z}{\sqrt{2m+1}}} f_Y(t) dt \right)^2 \right\}^m \cdot f_Y \left(\mu + \frac{z}{\sqrt{2m+1}} \right) \\
 &= \frac{1}{2^{2m} \cdot (2m+1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} \cdot \left\{ 1 - 4 \left(\int_{\mu}^{\mu + \frac{z}{\sqrt{2m+1}}} f_Y(t) dt \right)^2 \right\}^m \cdot f_Y \left(\mu + \frac{z}{\sqrt{2m+1}} \right)
 \end{aligned}$$

ここで、スターリングの公式 $n! \sim \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n}$ ($n \rightarrow \infty$)を用いて、

$$\frac{1}{2^{2m} \cdot (2m+1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} \sim \frac{\sqrt{2\pi} \cdot (2m+1)^{(2m+1)+\frac{1}{2}} \cdot e^{-(2m+1)}}{2^{2m} \cdot (2m+1)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sqrt{2\pi} \cdot m^{m+\frac{1}{2}} \cdot e^{-m} \right)^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(2m+1)^{(2m+1)} \cdot e^{-1}}{\sqrt{2\pi} \cdot 2^{2m} \cdot m^{2m+1}} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{2m}\right)^{(2m+1)} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (m \rightarrow \infty) \text{ となる。}
 \end{aligned}$$

さらに、

$$\left\{ 1 - 4 \left(\int_{\mu}^{\mu + \frac{z}{\sqrt{2m+1}}} f_Y(t) dt \right)^2 \right\}^m \text{ は } \left\{ 1 - 4 \frac{(z \cdot f_Y(\mu))^2}{2m+1} \right\}^m \text{ で近似できることを用いると、}$$

$f_Y(\mu) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$ であるから、

$$\left\{ 1 - 4 \frac{(z \cdot f_Y(\mu))^2}{2m+1} \right\}^m = \left\{ 1 - 4 \frac{\left(z \cdot \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\right)^2}{2m+1} \right\}^m = \left(1 - \frac{z^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{2m+1} \right)^m$$

$n = 2m + 1$ とおくと、

$$\begin{aligned}
 \left(1 - \frac{z^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{2m+1} \right)^m &= \left(1 - \frac{z^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{n} \right)^{\frac{n-1}{2}} = \left\{ \left(1 - \frac{z^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{n} \right)^{n-1} \right\}^{\frac{1}{2}} \\
 &\rightarrow \left\{ \exp\left(-\frac{z^2}{2\pi}\right) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (n \rightarrow \infty) \\
 &= \exp\left(-\frac{z^2}{4\pi}\right) \text{ となる。}
 \end{aligned}$$

最後に、

$$\begin{aligned}
 f_Y\left(\mu + \frac{z}{\sqrt{2m+1}}\right) &\rightarrow f_Y(\mu) \quad (m \rightarrow \infty) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}
 \end{aligned}$$

となることから、 $f_Z(z)$ は漸近的に $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{4\pi}\right)$ である。

つまり、 $Z = \sqrt{2m+1}(\bar{Y} - \mu)$ の漸近的分布は正規分布 $N(0, 2\pi)$ であり、中央値 \bar{Y} は漸近正規性を満たすことが分かる。

一方、同じく母平均 μ の推定量として漸近正規性を満たす標本変量平均 \bar{Y} を変形した $\sqrt{2m+1}(\bar{Y} - \mu)$ は再生性により正規分布に従う。

$$E[\sqrt{2m+1}(\bar{Y} - \mu)] = \sqrt{2m+1}(E[\bar{Y}] - \mu) = \sqrt{2m+1}(\mu - \mu) = 0$$

$$V[\sqrt{2m+1}(\bar{Y} - \mu)] = (2m+1) \cdot (V[\bar{Y}] + V[\mu]) = (2m+1) \cdot \left(\frac{2^2}{2m+1} + 0 \right) = 4$$

であるから、 $\sqrt{2m+1}(\bar{Y}-\mu)$ は正規分布 $N(0,4)$ に従う。

つまり、中央値 \bar{Y} よりも漸近分散が小さい漸近正規推定量が存在するため、中央値 \bar{Y} は漸近有効性を満たさないことが分かった。

よって、解答は ⑳ (O) ㉑ (L) ㉒ (D) ㉓ (W) ㉔ (F) ㉕ (T) _____

㉖ (A) ㉗ (O) ㉘ (A) ㉙ (D) (㉑と㉒は順不同) _____

問題 1

(1)	①	(D)	1 点	(7)	①	(C)	2 点	
	②	(A)	1 点		②	(F)	3 点	
	③	(B)	1 点		(8)	①	(F)	完答で 3 点
	④	(C)	1 点			②	(B)	
	⑤	(C)	1 点			③	(C)	完答で 2 点
(2)	①	(C)	完答で 5 点	(9)	④	(A)	完答で 1 点	
	②	(F)						
(3)	①	(I)	2 点		①	(C)		完答で 1 点
	②	(D)	3 点		②	(J)		
(4)	①	(B)	完答で 5 点	③	(F)	2 点		
	②	(I)		④	(G)	2 点		
(5)	①	(C)	完答で 3 点	(10)	①	(E)	3 点	
	②	(J)		②	(E)	2 点		
	③	(G)	完答で 2 点	(11)	①	(E)	3 点	
	④	(D)		②	(A)	2 点		
(6)	①	(H)	完答で 3 点	(12)	(B)	5 点		
	②	(C)						
	③	(C)	完答で 2 点					
	④	(F)						

問題2

(1)	①	(K)	完答で1点		⑩	(J)	2点
	②	(L)			⑪	(L)	2点
	③	(B)			⑫	(D)	2点
	④	(Q)	1点		⑬	(E)	1点
	⑤	(Z)	2点		⑭	(J)	1点
	⑥	(G)	2点		⑮	(M)	1点
(2)	⑦	(C)	完答で2点	(3)	⑯	(O)	1点
	⑧	(F)			⑰	(H)	1点
	⑨	(H)			⑱	(C)	1点

問題3

(1)	①	(C)	完答で1点		⑮	(H)	完答で2点	
	②	(C)			⑯	(K)		
	③	(V)	完答で2点 ⑤⑥は順不同		⑰	(C)		
	④	(T)			⑱	(A)		
	⑤	(A)			⑲	(K)	2点	
	⑥	(G)	1点		(3)	⑳	(O)	完答で1点 ⑳㉑は順不同
	⑦	(B)				㉑	(L)	
	⑧	(N)				2点	㉒	
	⑨	(O)				1点	㉓	(W)
(2)	⑩	(V)	完答で2点 ⑫⑬は順不同	㉔		(F)	1点	
	⑪	(T)		㉕		(T)	1点	
	⑫	(E)	1点	㉖		(A)	完答で1点	
	⑬	(M)		㉗		(O)		
	⑭	(G)		㉘		(A)	完答で1点	
			㉙	(D)				

以上