

金利リスクおよび信用リスク分析 ー分析手法の高度化に向けた一考察ー ＜投資理論研究会＞

ウイリス・タワーズワトソン 永井 克彦

オリックス生命 権 宅仁

司会 時間となりましたので、セッションF、「金利リスクおよび信用リスク分析」を開始いたします。発表者は、投資理論委員会のウイリス・タワーズワトソンの永井さんと、オリックス生命の権さんでございます。

それでは、よろしくお願いいたします。

永井 では、始めます。



投資理論委員会
2018年11月9日

本日は投資理論委員会の発表にお集まり頂き、ありがとうございました。投資理論委員会は、投資理論に関する諸問題についての審議を目的としている委員会として、本日は信用リスクおよび金利リスクの評価に関するテーマで当委員会が調査した内容について発表させて頂ければと思います。前半は信用リスクに関する発表で、私、永井の方から発表いたします。

1. はじめに

- 「信用リスク」は、そもそもデフォルトや財務状況などの過去データをもとに評価を行う性格の投資理論の分野であり、データ解析と関係が深い

※日本において投資理論を専門とする「日本金融・証券計量・工学会（ジャフィー）」のジャーナルの論文においても、高度なデータ解析の手法を用いて信用リスクを研究している論文が近年多くなっている

- 投資対象の信用リスクを評価する際、格付会社の評価をそのまま用いる対応もあるが、その手法には高度化の余地がある

（ e.g. 格付会社の評価で高い格付ランクの会社でも、格付が急に引き下げられ破綻した事例 ⇒ 財務情報から適当な格付を推定するモデルがあれば、このリスクに対処できる？）

- 信用リスクには、デフォルト確率、デフォルト時の損失といった複数のテーマがある

信用リスクの分析をテーマ別に整理し、信用リスク評価手法の高度化について考察するとともに、各分析テーマにおける課題や、その課題の解決に向けた分析を実施

はじめにですが、信用リスクは、そもそもデフォルトや財務状況などの過去データをもとに評価を行う性格の投資理論の分野ですので、昨今話題となっているデータ解析とも関連が深い分野となっております。例えば、格付について、格付会社の格付をそのまま用いることもできますが、仮に財務状況から格付を推定できるモデルが作成できれば、将来の格下げを予測した債権管理みたいなこともできるかも知れません。

なお、「信用リスク」と一言と言っても、研究テーマは、デフォルト確率やデフォルト時損失のようないくつかのテーマに分かれます。この信用リスクの各テーマに関して高度なデータ解析の手法を用いた最新の論文の内容を、今回はいくつかご紹介させて頂きたいと思いますが、まずは「信用リスク」という言葉の定義や、「デフォルト」等、後で出てくる用語の説明をさせて頂きたいと思います。

2. 信用リスクの分類と計量化手法

- 信用リスクは以下の3種類に分類

- ✓ ①与信先のデフォルトにより債権が回収不能となるリスク
 - ✓ ②与信先の信用状況の変動により債権の価額が変動するリスク
 - ✓ ③市場が要求するスプレッド(無リスク金利への上乗せ)の変動により債権の価額が変動するリスク
- ③は与信先の信用状況に関わらないため、市場リスクに分類することも一般的

- 信用リスクの計量化手法は以下の2種類が存在

- ✓ デフォルトモード方式……対象は①のみ
- ✓ MTM(mark-to-market)モード方式……対象は①と②(と③)

信用リスクの対象とされるリスクは、一般に、このスライドの①から③に分類されます。このうち、①は、与信先がデフォルトすることを対象とするリスクで、このリスクのみを対象として計量化する手法を「デフォルトモード」と言います。②の与信先の信用状況の変動および③の市場の信用スプレッドの変動は、デフォルトはしないものの、信用リスクに関連して損失が発生するリスクであり、①に加えて、②や③のリスクを加味して計量化する手法を「MTMモード」と言います。

2. 信用リスクについて：デフォルト

- デフォルトは債務が履行されない事象であり、破産より広い概念
- 統一された定義は存在しないが、一般的には以下を含む
 - ✓ ①破産(民事再生手続・会社更生手続の開始を含む)
 - ✓ ②支払の不履行(期日までに償還・利払がなされない)
 - ✓ ③リストラクチャリング(債務の減免・支払期限の延長など債権者に不利な条件変更)
- 債務者の種類によっても対象は変化する
 - ✓ 例えば中央政府(信用リスク管理の文脈では通常ソブリンと呼ばれる)では①破産は生じないとされ、代わりに支払拒否等がデフォルト事象に含まれる

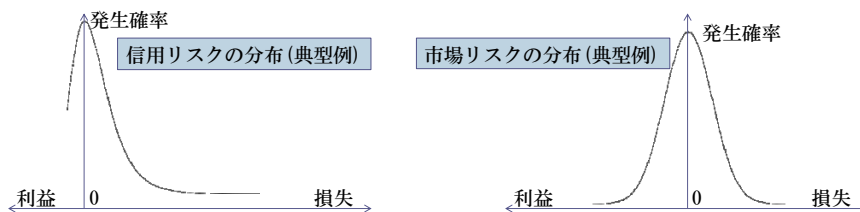
先ほどから使っています「デフォルト」という言葉の説明をいたします。デフォルトは、統一された定義はないものの、少なくとも破産より広い概念です。一般的には、①の破産に加え、②の支払不履行、③

の債務の減免等も含むことが多いかと思えます。なお、中央政府については、破産の代わりに、支払拒否等がデフォルト事象となります。

5

2. 信用リスクについて：分布の形状

- 信用リスク
 - ✓ ほとんどの場合損失が少額である一方、稀に生じるデフォルトの場合は多額の損害が生じるため、左図のとおり右に分布が厚い非対称分布とすることが多い
 - ✓ 分布の形状は数式で与える以外にモンテカルロシミュレーション等により求めることもある
- 市場リスク
 - ✓ 実務では右図のように損失分布を左右対称分布(e.g. 正規分布)と仮定することも多い

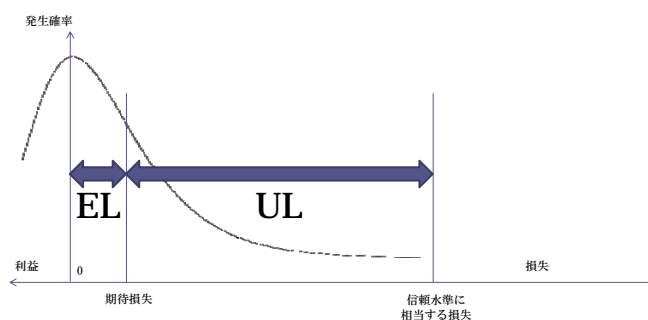


次に、信用リスクの定量的な側面を解説します。損益の確率分布について説明します。信用リスクは、典型的には、左の図のように、損益に関して非対称、かつ、損失側の裾が厚い分布になります。これは、デフォルトが比較的稀（まれ）な現象であることから、ほとんどのケースで損失は発生しないか、少額にとどまる一方、発生した場合は多額の損害を生じることによります。右の図は、市場リスクの典型的な分布で、正規分布など、左右対称の分布を仮定することが、実務では、よく行われています。

6

2. 信用リスクについて：ELとUL

- 信用リスクの分野において、期待損失額をEL(expected loss)、非期待損失をUL(unexpected loss)という。
- 信用リスク量、EL+ULを指す場合とULを指す場合がある。(日常語としてはELを信用リスクという場合もある)
- EL+ULは貸倒引当金+自己資本で対応することとなる。



信用リスクの分野において多用される「EL」と「UL」という言葉について、説明します。ELは、「expected loss」の略語でして、すなわち、損失の期待値です。ULは、その逆で「unexpected loss」、すなわち、ELを超えて発生する損失で、信頼水準に相当する損失から期待損失を差し引いた額となります。リスク管理の観点からは、「EL+UL」に対して、貸倒引当金と自己資本で対応していくこととなります。

2. 信用リスクについて：PD・EAD・LGD

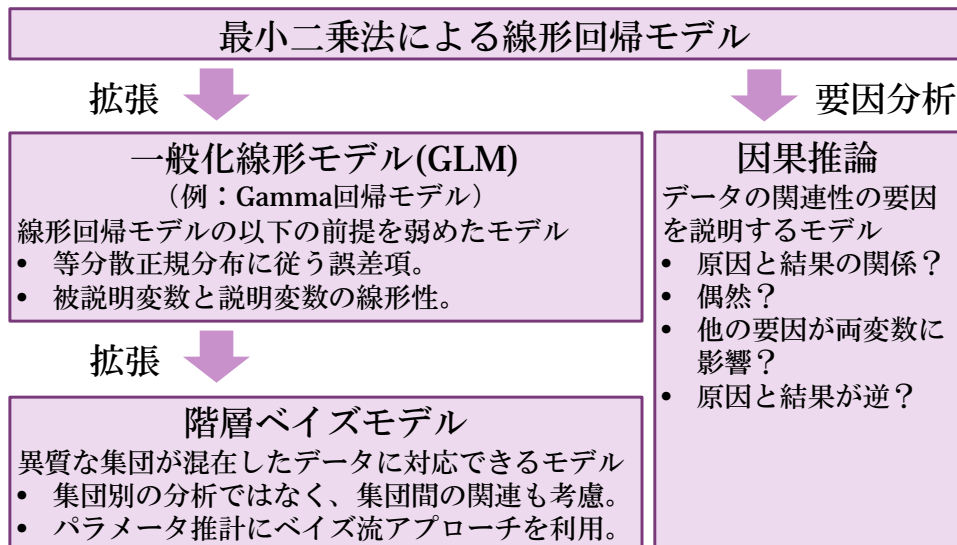
- ELはPD×EAD×LGDという3つのパラメータの積で表現可能

- PD(probability of default)
 - ✓ デフォルトする確率であり、信用格付ごとに異なる（高格付ほど低くなるべき）
- EAD(exposure at default)
 - ✓ デフォルト時の債権額であり、必要があれば計測基準日からの債権額の増減を加味する
- LGD(loss given default)
 - ✓ デフォルト時に未回収となる債権額の割合であり、担保や非デフォルトへの復帰による回収も含む

最後に、信用リスクのパラメータについて説明いたします。先ほど出てきた期待損失（EL）は、PD、EAD、LGDという三つのパラメータの積で表現することができます。PDは、デフォルトする確率のことです。信用格付ごとに異なるものです。EADは、デフォルトした場合における債権額のことです。社債などは計測日時点の債権額とデフォルトした場合の債権額がほぼ同じなのですが、デリバティブや再保険などは債権額が変動する可能性がありますので、必要があれば、その変動を織り込みます。LGDは、デフォルト時の損失割合、すなわち、デフォルトした場合に未回収となる債権額の割合です。

一般的な信用リスクの説明は、以上です。これからは、具体的に、これらをどのように評価するかを解説しますが、その前に、データ解析の手法について概観してみます。

3. データ解析：線形回帰からの発展



データ解析は、皆様もよくご存じの簡単な最小二乗法を利用した線形回帰モデルを発展させる形で発達してきました。線形回帰モデルを少し拡張したものが、一般化線形モデル（GLM）と呼ばれるモデル群です。例えば、Gamma 回帰モデルでは、誤差項は等分散正規分布ではなく、形状パラメータが一定となる Gamma 分布。そして、被説明変数ではなく、被説明変数の対数が説明変数の一次式で表されます。Gamma 回帰モデルは、被説明変数が正の値しか取らない場合に有効なモデルとして知られており、デフォルト時損失率・LGDの確率分布を表現する際に、Gamma 回帰モデルを用いる手法を、後ほど、ご紹介します。このように、線形回帰モデルの仮定を弱めることで、被説明変数と説明変数の関係が様々に表現できるモデル群が、一般化線形モデルです。

次に、一般化線形モデルを更に拡張して、異質な集団が混在したデータを扱えるようにしたモデル群が、階層ベイズモデルと呼ばれています。例えば、後ほど、より詳細に説明する内容ですが、企業の財務情報から特定の方法で得られる数値の大きさを見ることで、企業の格付を推定するモデルである順序プロビットモデルは、一般化線形モデルです。しかし、企業には業種があります。業種によって財務データの特性が異なることを考慮して、「業種が異なれば、分布のパラメータが異なる」ということを仮定すると、順序プロビットモデルに登場するパラメータの上に、更に特定のパラメータ付の分布が加わったような、階層構造のある複雑なモデルが得られます。これが、階層ベイズモデルの一例となります。

そして、それらとは別方向の拡張として、データの関連性の要因を分析する手法である因果推論があります。因果推論にはいろいろなアプローチがありますが、例えば、「データになぜ関連があるのかを定量的および定性的に分析し、どの変数がどの変数に影響を与えているのかを図式化することで因果構造を明らかにしよう」という考え方があります。本日は、デフォルト時損失率（LGD）を決定づける要因を分析するテーマを、後ほど、説明します。

3. データ解析：その他の分析手法

モデル化

データの法則性を分析し、モデルを当てはめる手法

- 妥当なモデルの選択。
- モデルのパラメータの妥当な推計。

欠損値補完

欠損のあるデータを分析に利用する手法

- 欠損のメカニズムを分析。
- 欠損値の推計。

データ解析のその他の分野として、モデル化があります。データが持つすべての情報をそのまま扱うのであれば、非常に高い次元で分析を行う必要があります。このような欠点を補うため、データの大まかな性質を残しつつ、比較的少ないパラメータでデータを表現するアプローチが、モデル化です。定量的および定性的な特性をもとにモデルを設定し、データからモデルのパラメータを推計するものです。本日は、過去の格付推移データを基に、将来どのように格付が推移していくかを確率論的に表現するモデルをつくるというモデル化を、後ほど、説明します。

更に、データ解析には、欠損値補完という分野もあります。データが完全な形でそろってはいませんが、例えば、アンケートにおいて未回答項目があったり、一次試験の合格者のみを対象とした二次試験を実施したことにより一部の受験生の二次試験の点数が得られない等の様々な原因により、データに欠損が生じてしまうことがあります。欠損のあるデータを削除してしまうことも一つの方法ですが、削除によりデータの分量が少なくなってしまうたり、削除によりバイアスがかかってしまったりするといった問題が生じる場合には、最適な方法ではありません。欠損のあるデータについて、欠損をうまく埋めることで使用できるデータにすることが、欠損値補完です。企業の財務情報においても、項目が完全にそろっていないことはないため、得られない項目が、どうしても出てきてしまいます。財務情報の欠損値を補完する手法について、後ほど、ご説明します。

4. ご紹介する信用リスクの分析手法

- 準備として、債務者の財務データの整備

- ✓ ① k-NN法：財務データの欠損値を補完する手法。

- デフォルトや格下げの確率のモデル化

- ✓ ②階層ベイズモデル：財務データの項目をもとに、適当な格付を推定する手法。
- ✓ ③強度モデル：確率論的格付推移モデルを設定し、シミュレーションを行う手法。

- デフォルト時の損失率のモデル化

- ✓ ④LGD分析：LGDとPDの相関の要因を分析してモデル化。
- ✓ ⑤Gamma回帰モデル：LGDの代わりに回収額をモデル化し、回収額の確率分布を推計。

本日ご紹介する信用リスクの分析手法を、こちらのスライドにまとめました。まず、財務情報の整備として、財務データ欠損値補完のテーマを説明します。欠損値補完の様々な手法のうち、k最近傍法（k-NN法、k-nearest neighbor algorithm）を主に扱います。次に、格付データを利用して、企業の財務情報から適当な格付を推定するために階層ベイズモデルを扱うというテーマを説明します。

3番目に、格付推移のデータを利用して、格付の推移を確率論的にモデル化するテーマを説明します。先ほど、信用リスクの概要のところでも説明しましたが、信用リスクには、期待損失・ELと非期待損失・ULの両方が必要です。確率論的にモデル化することで、この両方を扱うことができます。4番めに、デフォルト時損失率（LGD）に注目し、LGDを決定づける要因を分析するテーマを説明します。最後に、デフォルト時損失率（LGD）も確率論的にモデル化するために、一般化線形モデル（GLM）のGamma回帰モデルを扱うテーマを説明します。

5. 信用リスクの分析手法

(① k-NN法 1/5)

- 概要

中小企業の財務諸表データベース(CRD)では、欠損値が間々存在する。k-NN法(k-nearest neighbor algorithm)を用いた財務諸表の欠損値の補完は、他の方法より誤差が小さい。

- 用いる情報による既存の欠損値補完方法の分類

アプローチ	補完値推計方法	補足
グローバル・アプローチ	全データセットの相関情報を用いる	グローバルな共分散方法を有する場合や、局所的な類似構造を有する場合、正確な補完にならない
ローカル・アプローチ	データセットの一部の類似性を利用する	データセットの一部の類似性を利用する
ハイブリッド・アプローチ	グローバル・アプローチとローカル・アプローチの双方の特徴を有する	
ノレッジ・アプローチ	その分野の専門知識・外部情報を利用する	

それでは、これらを順に説明していくことにしましょう。ここからは、まず、欠損値の補完手法の一つであるk-NN法を説明します。今回ご紹介する高橋・山下の論文では、CRDという中小企業の財務諸表データベースを対象にしています。中小企業の財務データの特徴として、大企業と比較すると、欠損値あるいは異常値が、どうしても多くなってしまふことが挙げられます。本論文では、財務データの欠損値の推計においてk-NN法を適用し、他の手法より誤差が少なくなったことを示しています。

なお、このような欠損値に対する推計手法は、スライドに記載の通り分類がなされており、k-NN法は、neighbor とある通り、2番めのローカル・アプローチ、すなわち、データセットのうち類似する一部のデータを用いて補完するアプローチに分類されます。

5. 信用リスクの分析手法

(① k-NN法 2/5)

- 方法論による既存の欠損値補完方法の分類

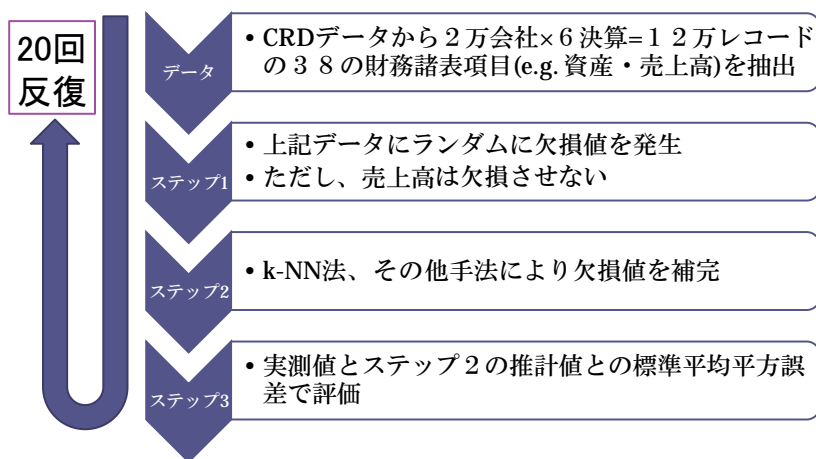
	単一代入法	多重代入法
各欠損セルに補完する値	1つの値	複数の値
特長	<ul style="list-style-type: none"> • 補完後のデータに一般的な分析手法を適用可能 • データ収集者の知識に合致した補完が可能 	<ul style="list-style-type: none"> • データの分布に関する性質を保持可能 • 頑健な推測値が得られる • 欠損に対し様々なモデル推定の感応度分析が容易

また、別の切り口から見た欠損値補完方法の分類として、一つの値で補完する単一代入法と、複数の値で補完する多重代入法があり、k-NN法は単一代入法に該当します。単一代入法は、補完データの分布の情報は保持できませんが、補完後のデータセットの取り扱いが容易になるアプローチです。

5. 信用リスクの分析手法

(① k-NN法 3/5)

- 本論文の手法



次に、高橋・山下の論文における具体的なデータ処理の流れです。まず、データステップとして、欠損値がない2万社の決算データをランダムに選択します。ステップ1で欠損値をランダムに発生させ、ステップ2で補完します。欠損させる前の真の値もありますので、ステップ3で真の値と推計値との誤差を評価します。この一連の流れを20回反復し、k-NN法と他の手法の誤差を比較して、最終的な評価として

5. 信用リスクの分析手法

(① k-NN法 4/5)

• 本論文における具体的なk-NN法の適用

① z_{ij} (レコード*i*(財務諸表)のフィールド*j*(財務諸表項目))を標準化

$$x_{ij} = \frac{(z_{ij} - \bar{z}_j)}{\sigma_j}$$

② レコード*p, q*の両者で欠損していないフィールド*J*によって、レコード間の平均距離を定義

$$L_{pq} = \left\{ \sum_{j'=1}^J (x_{pj'} - x_{qj'})^2 / J_{pq} \right\}^{1/2}$$

③ レコード*i*の欠損フィールド*j*に対して、レコード*i*との距離が近い*K*個のレコードのフィールド*j*の距離の逆数による加重平均を補完値とする。

$$\hat{x}_{ij} = \sum_{k=1}^K x_{kj} (1/L_{ik}) / (\sum_{k=1}^K 1/L_{ik})$$

$$\hat{z}_{ij} = \hat{x}_{ij} \sigma_j + \bar{z}_j$$

このスライドは、k-NN法における具体的な算式を表しています。①の式で財務諸表項目の数値を標準化し、②の式でデータ間の距離を定義し、③の式で、最も近い*k*個データを使用して、補完データを作成します。

5. 信用リスクの分析手法

(① k-NN法 5/5)

• 計算量

✓ 12万レコード間の全ての平均距離(7.2億回)を計算せず、レコードを売上毎にランクわけ(300レコード×400ランク)、ランク内及び上下のランクに存在するレコード間でのみ平均距離(0.54億回)を計算し、計算量を99.3%削減した。

✓ *K*=1~8で計算し、*K*=3で誤差が最小、その他の手法とも比較し有意に小さい結果となった。

• 業種

✓ 業種をセグメント化しセグメント内でのみ距離計算を行った場合、誤差が明らかに拡大した。これは、同一債務者が業種転換した場合、過去の決算データを排除してしまうため等と推測。

✓ 同一セグメントは距離を*G*%短縮する、とした場合は、*G*=88のとき誤差はわずかに小さくなり、*G*≤84のときは誤差が大きくなった。

✓ 業種間で均等に距離を計算する元々の手法でも十分なロバスト性を有していると考察。

k-NN法では、レコード数の2乗のオーダーで距離の計算数が増加するため、計算量が相当大きくなります。この論文では、売上が同レベルのレコードのみを対象として計算することで、計算量を削減しておりますが、その場合でも、他の推計方法より有意に誤差が少なくなっていることが確認できています。

特にK=3、すなわち3個のデータを用いた場合に誤差が最小となったようです。なお、「同一業種のみ
のデータを使用することにより誤差の縮小を目指したところ、業種転換等の影響により、期待に反し、誤差
が明らかに拡大した」との報告も、同論文内でなされています。

5. 信用リスクの分析手法 (②階層ベイズモデル 1 / 5)

● 企業格付を評価するモデルを紹介

⇒企業格付とは、発行体が負う社債をはじめとした金融債務に
ついての総合的な債務履行能力をランク付けしたもので、
債務者、債権者双方に重要な指標

- 保険会社が信用リスクを評価する場合、格付け会社からの情報を用いるだけでなく、独自に企業の債務履行能力を評価することが高度化につながる（融資・社債や株式購入の際など）。
- 格付機関が格付けをする際のプロセスは非公開であるが、順序プロビットモデルというモデルを使用すると、保険会社において、格付企業の財務情報等を用いて独自に格付けをすることができる。
- さらに、最近の研究※では、業種間の異質性を考慮した2種類の階層ベイズモデル（変量効果順序プロビットモデル、ランダム係数順序プロビットモデル）による企業格付評価も行われている。

※小池泰貴（2013）など

さて、今ご紹介したk-NN法は、信用リスク評価の前段階として企業の財務データの欠損を補完して、分析対象データを整備するための手法でした。次に紹介する内容は、階層ベイズモデルの手法を用いて、企業格付モデルを作成する手法です。

企業格付は、ご存じの通り、企業が負う社債などの金融債務について総合的な債務履行能力をランク付けしたもので、格付会社が公表しています。しかし、保険会社などの機関投資家が実際に社債等を購入する場合、格付会社からの情報を用いるだけでなく、社内格付を導入する等して、独自に企業の債務履行能力を評価することが考えられます。また、企業格付は、債務者、債権者双方に重要な指標である一方で、格付会社が行う格付の決定メカニズムは公表されていません。このような状況の中、格付の決定メカニズムやその手法について様々な研究報告がなされています。その一例として、順序プロビットモデルという格付の推定モデルと、それを改善した幾つかのモデルについて、ご紹介いたします。

5. 信用リスクの分析手法 (②階層ベイズモデル 2 / 5)

• 順序プロビットモデルとは

⇒順序付けされた複数のカテゴリのいずれに分析対象が属するかを判定するモデル。

- 企業 i の潜在変数 z_i (=数値が高いほど良い格付となる)を、財務情報などから把握できる企業の特徴のベクトル x_i と、その係数ベクトル β (業種によらず一定)を用いて表し、その値と格付の閾値パラメータ γ を用いて、企業 i の格付 y_i が j である確率を、

$$P(y_i = j) = p(\gamma_{j-1} < z_i \leq \gamma_j)$$

ここで、 $z_i = x_i' \beta + \epsilon_i \quad \epsilon_i \sim N(0,1)$

と表す。

- 格付予測モデルとして使用されることが多いが、平行性の仮定※の観点から必ずしも望ましくないと指摘されている。

※回帰パラメーターが順序性のあるカテゴリに依存せず、常に一定であるような仮定

順序プロビットモデルは、順序付けされた複数のカテゴリのいずれに分析対象が属するかを判定するモデルです。ここで、順序付けされた複数のカテゴリが格付のそれぞれのランクを表します。具体的には、スライドに算式を記載いたしました。企業ごとの潜在変数 z_i を企業の特徴ベクトル x_i と、その係数ベクトル β の線形結合でモデル化し、その潜在変数の値の閾値 γ との大小関係で格付を判定するモデルです。企業の特徴ベクトルは、例えば、自己資本比率やROE 3年平均など、財務情報から把握できるものです。一方、係数ベクトル β と閾値パラメータ γ は未知の定数です。これらの数値は、マルコフ連鎖モンテカルロ法、MCMC法などの手法を用いて、既知の格付情報から決定する必要があります。

順序プロビットモデルは、このようにモデル化自体は単純な考え方に基づいており、格付予測モデルとしての適用も古くから観察されていたようです。しかし、単純故に、課題点も指摘されています。「平行性の仮定」と、このスライドに記載しましたが、要するに、順序プロビットモデルでは、分析対象のすべての企業について同じ係数ベクトル β および同じ閾値パラメータ γ を適用する前提となっています。これに対し、実際の格付では、例えば、電気・ガス業や情報通信業といったように、業種に応じて重視されるべき財務指標が異なる可能性があります。また、財務状況が良い企業と悪い企業でも、それぞれ異なる指標で格付を行うことが考えられます。

5. 信用リスクの分析手法 (②階層ベイズモデル 3 / 5)

- 順序プロビットモデルを改善したものとして、次のもの等が提案されている

■多項プロビットモデル

潜在変数の値が一定以下（例えば、負値）の場合には、別の係数ベクトルを用いる、といったように、ランクに応じて用いる潜在変数を変化させるモデル。（格付の判別基準がランクによって異なる場合等に応用できる。）

■拡張逐次ロジットモデル

まず「格付BB以下」であるかどうかを判定し、そうでない場合は別の回帰係数を用いて「格付B」であるかどうか判定し・・・といったように、カテゴリーごとの条件付確率を利用するモデル。（ひとつひとつ基準をクリアしながら下位カテゴリーから上位カテゴリーに格付が変化するような逐次的なメカニズムがある場合に適したモデルである。）

■変量効果順序プロビットモデル

■ランダム係数順序プロビットモデル

（次頁以降）

※小林正人（2001）、安川武彦（2002）など

そこで、このような点を踏まえて、順序プロビットモデルを改善したものを四つ紹介したいと思います。多項プロビットモデルは、「潜在変数の値が一定以下の場合には、別の係数ベクトルを用いる」といったように、ランクに応じて用いる潜在変数を変化させるモデルです。例えば、ある企業の格付を「AAA」とするか「AA」とするかを判断する場合と、「BBB」とするか「BB」とするかを判断する場合では、格付会社の判断基準が異なることが考えられます。多項プロビットモデルは、このような状況を反映した方法です。

次に、拡張逐次ロジットモデルは、「まず『BB以下』であるかどうかを判定し、そうでない場合は、別の係数を用いて『B以下』であるかどうかを判定し・・・」といったように、ひとつひとつ基準をクリアしながら格付を行うような逐次的なメカニズムを考慮したものです。

5. 信用リスクの分析手法 (②階層ベイズモデル 4 / 5)

• 変量効果順序プロビットモデルとは

⇒順序プロビットモデルを拡張し、切片（定数項）のみを階層化したモデル。

$$P(y_i = j) = p(\gamma_{j-1} < z_i \leq \gamma_j)$$

$$\text{ここで、} z_{ik} = \alpha_k + \tilde{x}'_{ik} \beta^* + \epsilon_{ik}$$

であり、定数項部分 α_k が業種ごとに固有

- 順序プロビットモデルと比較してデータへの当てはまりがよいことが示されており※、業種間の異質性の考慮が重要であることを示すモデルである。

※小池泰貴（2013）など

三つめの変量効果順序プロビットモデルと、次のスライドのランダム係数順序プロビットモデルは、通常の順序プロビットモデルに業種ごとの特性の違いを考慮したものです。

スライドの算式の「k」が、業種を表す添え字です。先ほどのスライドの通常の順序プロビットモデルと比較していただくと、定数項が「 α_k 」という業種依存項になっていることが分かります。すなわち、変量効果順序プロビットモデルは、通常の順序プロビットモデルの潜在変数において、定数項のみ業種ごとに異なる定数 α_k を許容したモデルになります。

5. 信用リスクの分析手法 (②階層ベイズモデル 5 / 5)

• ランダム係数順序プロビットモデルとは

⇒順序プロビットモデルを拡張し、すべての係数を階層化したモデル。

$$P(y_i = j) = P(\gamma_{j-1} < z_i < \gamma_j)$$

$$\text{ここで、} z_{ik} = x'_{ik} \beta_k + \epsilon_{ik}$$

であり、係数ベクトル β_k は、業種ごとに固有

- 変量効果順序プロビットモデルとの比較では、変量効果順序プロビットモデルのほうが優れた結果を表す論文もあるが、これは検証に用いた標本数に依存している可能性もあり、慎重に議論を重ねる必要がある※

※小池泰貴（2013）

また、ランダム係数順序プロビットモデルは、更に係数ベクトルの β についても、業種ごとに異なる係

数ベクトルで設定するものです。業種ごとに重視されるべき指標を更に細かく見ようとするモデルですが、当然、その分、定数一つ当たりの推定に使えるデータが少なくなりますので、ひとつひとつのパラメータについては精度が落ちる可能性があります。

実際の企業格付への当てはまり度合いについて、変量効果順序プロビットモデルとランダム係数順序プロビットモデルを提唱されている論文によれば、いずれも通常の順序プロビットモデルより良い結果だったということです。また、二つの比較では、少なくとも論文中の検証で用いたデータで検証した場合は、変量効果順序プロビットモデルのほうが優れた結果を得ています。企業格付のモデル化につきましては、このように順序プロビットモデルを基礎としつつ、様々な改良が試みられているようです。

5. 信用リスクの分析手法 (③強度モデル 1 / 5)

- 信用ポートフォリオ（信用リスクをもつ債務者から成る大規模なポートフォリオ）内の各債務者の格付は分かっているものとする。
- このとき、過去の格付推移に関するデータベースを利用して、信用ポートフォリオの格付が将来どのように変化するかを強度モデル^{※1}によって動的にモデル化する研究^{※2}が近年行われている。
- そこでは、格付推移^{※3}は、ある格付から別の格付への推移をモデル化するのではなく、格下げと格上げの2方向の信用イベントをモデル化している。

※1 確率過程において、あるイベントが発生する頻度を強度（intensity）と呼ぶ。

※2 金子拓也・中川秀敏（2010）、中川秀敏（2010）、山中卓（2014）等。

※3 デフォルトは格付推移の一部と見なす。

さて、ここからは、格付の将来推移を確率的にモデル化する手法について説明します。前提として、信用ポートフォリオ、すなわち、信用リスクをもつ債務者から成る大規模なポートフォリオにおける各債務者の格付は分かっているものとします。

ところで、特定のイベントの発生を表す確率過程モデルにおいて、そのイベントの発生頻度のことを「強度」と呼びます。そして、強度を何らかの説明変数で説明する算式で表現したものを「強度モデル」と呼びます。

この強度モデルを使用して、過去の格付推移に関するデータベースを基に、信用ポートフォリオの格付が将来どのように変化するかを動的にモデル化する研究が、近年、行われています。強度モデルは、特定のイベントの発生状況を表現するものなので、ある格付から別の格付への推移をモデル化することは困難です。そこで、格上げと格下げの2方向の信用イベントを表現する二つの強度モデルを設定した上で、格上げと格下げの履歴を基に、将来の格付を解釈するというアプローチを用いるという工夫が行われます。ここで、デフォルトも格付推移の一部とみなします。今回の発表に当たり、金子・中川の論文、中川論文、山中の論文の三つの論文を参考にしましたが、これらは、いずれも、このアプローチです。

5. 信用リスクの分析手法 (③強度モデル 2 / 5)

- 格下げと格上げを強度モデルによりモデル化すると、以下のようなモデル化が可能になる。

- ✓ 強度の算式に経済環境を含める※1 ことによって、景気循環に応じて格下げと格上げの頻度が変更されるモデルが作成できる。
- ✓ ある債務者カテゴリ※2 の格下げ・格上げ強度の算式に、同じ又は異なる債務者カテゴリの格下げ・格上げ事象発生を含める※3 ことによって、格下げ・格上げ事象が伝播するモデルが作成できる。

- ※1 金子拓也・中川秀敏（2010）では、金利水準の変化を強度の算式に含めている。
また、山中卓（2014）では、株価の変動をタイムラグ付で強度の算式に含めている。
- ※2 業種、企業規模や格付水準により債務者を分類する。
- ※3 中川秀敏（2010）及び山中卓（2014）では、このような項を含めている。

ところで、格上げや格下げを強度モデルによりモデル化するときの強度の算式には、どのようなパラメータを含めたらよいのでしょうか。まず、格付推移の頻度が経済環境に依存することは、一般的な認識だと思います。好景気のときには、格上げが多くなる一方で、格下げが少なくなり、不景気ときには、その逆に、格上げが少なくなる一方で、格下げが多くなります。

ここで、経済環境に依存する説明変数は何が適切かという問題が生じますが、金子・中川の論文では金利の水準の変化を、山中の論文ではタイムラグ付の日経平均株価リターンを含めています。一方で、中川の論文では、このような項は含めていません。中川の論文では、格付推移の伝播を表す項を含めています。すなわち、業種、企業規模や格付水準により債務者を分類した債務者カテゴリを設定した上で、ある債務者カテゴリの格下げ・格上げ強度の算式に、同じ、または、異なる債務者カテゴリの格下げ・格上げ事象発生を含めています。この伝播の項を含めることでも、格付推移が多い時期と少ない時期があることが表現できます。山中の論文では、経済環境に依存する項の他に、この伝播の項も含めた強度の算式を使用しています。

5. 信用リスクの分析手法 (③強度モデル 3/5)

- 強度モデルを用いると、信用イベント発生を動的にシミュレーションすることが可能になる。
- 複数の信用イベントのまとまった発生がしばしば観測されるが、そのことを表現するために伝播の項を強度モデルに組み込むことが信用リスクの適切な評価に有用と考えられる。
- その一方で、伝播の項を強度モデルに組み込むとパラメータが増加するため、安定的なパラメータ探索に支障が生じ得ることにも注意が必要である。
- モデルに組み込む経済変数を増加させたり、債務者カテゴリを細分化したりする高度化が考えられる。しかし、安定的なパラメータ探索の可能性を踏まえ、パラメータの個数が増加し過ぎないための何らかの工夫が求められるかも知れない。

これが、強度モデルを使用した格下げ・格上げの信用イベントのモデル化ですが、ここでまとめてみます。まず、強度モデルを用いると、信用イベント発生を動的にシミュレーションすることが可能になります。そして、強度は、信用イベントの発生頻度を表します。

次に、複数の信用イベントのまとまった発生がしばしば観測されますが、このことを表現するために伝播の項を強度モデルに組み込むことが信用リスクの適切な評価に有用と考えられます。経済環境の項だけの場合、信用イベントの多い時期と少ない時期があることは表現できますが、信用イベントのまとまった発生は完全には表現できません。

そして、その一方で、伝播の項は、ある債務者カテゴリにおける信用イベント発生が、同じ、または、別の債務者カテゴリに与える影響のパラメータ群から成りますので、債務者カテゴリが細かい場合には、パラメータの個数が、かなり多くなってしまいます。そのため、伝播の項を強度モデルに組み込むと、パラメータが激増し、安定的なパラメータ探索に支障が生じ得ることにも注意が必要です。

最後に、高度化については、モデルに組み込む経済変数を増加させたり、債務者カテゴリを細分化したりする高度化が考えられます。しかし、安定的なパラメータ探索の可能性を踏まえ、パラメータの個数が増加しすぎないための何らかの工夫が求められるかも知れないことには注意が必要です。

5. 信用リスクの分析手法 (③強度モデル 4 / 5)

- 山中卓 (2014) では、経済環境と伝播を両方とも含めた以下のような複雑なモデルを使用している。

$$\lambda_t^j = \left\{ \begin{array}{l} \text{債務者カテゴリ } j \text{ の信用イベント発生頻度} \\ \text{経済環境に依存する項} \\ \text{債務者カテゴリ } j \text{ で信用イベントが } \zeta_n^j \text{ 件発生すると、} \\ \text{ } \delta^{jj} \text{ だけジャンプし、その後 } k^j \text{ のスピードで減衰} \\ \text{債務者数} \end{array} \right\} \cdot M_t^j$$

$$\lambda_t^j = \left\{ \exp(\beta_0^j + \beta_1^j \cdot X_t^1) + \sum_{j=1, \dots, J} \delta^{jj} \sum_{n \leq N_t^j} \zeta_n^j \exp(-k^j \cdot (t - T_n^j)) \right\} \cdot M_t^j$$

ここで、

- $j = 1, \dots, J$: 債務者カテゴリ
- T_n^j : 債務者カテゴリ j の n 回目の信用イベント発生日
- ζ_n^j : 債務者カテゴリ j の日付 T_n^j における信用イベント発生数
- N_t^j : 債務者カテゴリ j の日付 t までの信用イベント発生日の日数
- λ_t^j : N_t^j の強度 (債務者カテゴリ j の信用イベント発生頻度)
- M_t^j : 債務者カテゴリ j の日付 t における債務者数
- X_t^1 : タイムラグ付の日経平均株価リターン

さて、二つ前のスライドで、山中の論文における強度モデルでは、強度に経済環境の項と伝播の項の両方を含めていることを説明しましたが、その算式を実際に見てみましょう。まず、左辺は強度。すなわち、信用イベントの発生頻度です。本当は格下げと格上げの二つの算式が必要ですが、どちらも同じ形の算式ですので、この算式は、どちらか一方を指すと理解してください。次に、右辺の一番右に、右辺全体に掛かっている「M」がありますが、これは債務者数を表します。信用イベントの発生頻度がその時点における債務者数に比例していることは、自然な算式でしょう。

右辺の大きな括弧の中に二つの項があり、左側が経済環境の項で、右側が伝播の項です。左側の経済環境の項を見てみます。「X」はタイムラグ付の日経平均株価リターンですが、経済環境の項はXの指数関数となっています。これは、Xが負のリターンになった場合でも、強度が負にならないようにするためです。強度は発生頻度ですので、必ず0以上の値になるように算式を作成する必要があります。

右側の伝播の項を見てみます。二重のΣがあり、内側のΣは、その日付における過去すべての信用イベント発生日について合計しています。過去の信用イベント発生日は「T」で表していますが、「信用イベント発生日からの日数の-k倍」を指数の中に入れてあります。これは、「信用イベントが発生すると、一時的に発生頻度が上昇するものの、その上昇はkのスピードで減衰する」ということを意味します。更に、その指数に「ζ」、すなわち、過去の信用イベント発生日における信用イベント発生数が乗じられており、信用イベント発生数が多いほど、発生頻度の上昇度合いも大きくなるような算式となっています。これに「δ」という伝播の度合いを表すパラメータが乗じられ、すべての債務者カテゴリについて合計している算式となっています。

5. 信用リスクの分析手法 (③強度モデル 5/5)

- 山中卓（2014）によると、この複雑なモデルの場合、ナイーブなパラメータ探索では安定したパラメータ推定値を得るのが困難であったため、複数の工夫を行ったということである。

- ✓ 準備として日経平均株価リターンのタイムラグを推定する。債務者カテゴリを1個としたモデルを扱って、複数のタイムラグのモデルでパラメータ探索を行い、AIC※1が最も小さいタイムラグを選択する。
- ✓ 続けて残りのパラメータ探索を行う。伝播の減衰を表す k^j が非常に大きいことは、伝播の度合いを表す δ^{jj} が小さいことと近い意味を持つため、 k^j の取り得る値に一定の上限を設けてパラメータ探索を行う。
- ✓ ある δ^{jj} の推定誤差※2が非常に大きい場合、分析に使用したデータでは当該 δ^{jj} の推定に不十分と整理し、当該 δ^{jj} の値を0とする。

※1 異なるモデルの尤度をそのまま比較する代わりに、対数尤度の-2倍とモデルのパラメータの個数の2倍の合計としてAICを計算し、AICが小さいモデルを選択するのが良いことが多く知られている。

※2 対数尤度関数のHesse行列の逆行列の対角成分の平方根によって標準誤差を推定している。

山中の論文によると、このモデルは複雑で、パラメータが多く、ナイーブなパラメータ探索では安定したパラメータ推定値を得ることが困難であったということで、複数の工夫を行ったそうです。

まず、パラメータ推定に先立ち、日経平均リターンのタイムラグを推定しました。債務者カテゴリを1個としたモデルを考えた上で、複数のタイムラグのモデルでパラメータ探索を行い、AICが最も小さいタイムラグを選択したということです。それに続けて、残りにパラメータの推定を行う際、伝播減衰を表すパラメータの k が大きいことは、伝播の度合いを表すパラメータの δ が小さいことと同じような意味を持つため、 k の取り得る値に一定の上限を設けてパラメータ探索を行ったということです。更に、ある δ の推定誤差が非常に大きい場合、分析に使用したデータでは当該 δ の推定に不十分と整理し、当該 δ の値を0としたということです。

5. 信用リスクの分析手法 (④LGD分析 1 / 5)

- 債権デフォルト時の損失率（LGD：Loss Given Default）は債権がデフォルトする確率（PD：Probability of Default）とともに信用リスクを構成する要素であり、正確な推定を必要とする。

⇒ 信用リスク管理の観点から非常に重要なデフォルトによる期待損失（EL：Expected Loss）は、一般に $PD \times LGD$ で計算される。

本章では、LGDおよびELの決定論的な推計手法を紹介

ここまで、デフォルトや格下げの確率のモデル化についての研究結果を紹介してきました。続いて、信用リスクを構成するもう一つの重要な要素である債権デフォルト時の損失率（LGD）の推定に関する研究成果を、幾つか紹介したいと思います。

LGD推定のモデルは多数研究されていますが、他国であまり見られない日本独自の信用保証制度、根抵当等の複雑な担保契約、デフォルト後の追加融資や経営支援、長期にわたる回収期間といった特性も踏まえたLGD推計モデルは、いまだ少ないことが現状です。これは、銀行等が保有する個別の回収率データ等は秘匿性が高く、データの共有化がなされていないことが要因の一つです。そのような中、日本における日本企業への融資に関するデータを基に、決定論的にLGDを推計した研究を二つほど紹介したいと思います。

5. 信用リスクの分析手法 (④LGD分析 2 / 5)

- 川田ら^{※1}は、地方銀行3行から提供された企業貸付に関するデータを用い、線形回帰モデルの推定結果を調査した。その結果、担保・保証・貸出エクスポージャをLGD推計の重要なファクターであることを確認した。

使用データ：地方銀行3行が保有する企業貸付に係る次のデータ
貸出エクスポージャ、CRITS標準スコア、各種担保カバー率、
信用保証協会による保証額、毀損額、回収期間

推計モデル：下式の線形回帰による、LGDの2項ロジットモデルを適用

$$\log\left(\frac{LGD}{1+LGD}\right) = \alpha_0 + \sum_i \alpha_i x_i$$

ただし、

x1: CRITS標準スコア

x2: 商手担保カバー率

x3: 預金担保カバー率

x4: 有価証券担保カバー率

x5: 信用保証協会による保証カバー率

x6: 貸出エクスポージャ

※1 川田、山下、回収実績データに基づくLGDの要因分析と
多段階モデルによるLGDおよびEL推計、2013

川田らは、日本の地方銀行3行から提供された企業貸付に関するデータを基に、LGD推定に有効な要素の特定を試みています。具体的には、LGDにロジット変換を施した表記の線形回帰モデルを用い、その説明変数の有意性を調査した結果、LGDの推定にはCRITS標準スコアや貸出エクスポージャの担保カバー率といった要素が重要であることを確認しました。なお、CRITS標準スコアとは、地方銀行協会が提供しているもので、PD推計用に企業の財務情報を合成した変数を指します。ここでは、信用力評価の一つの指標として用いており、スコアが大きいほど信用力が高いことを表します。

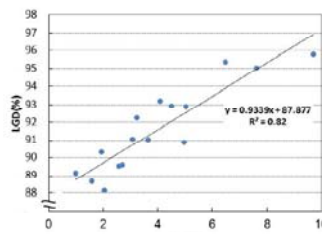
5. 信用リスクの分析手法 (④LGD分析 3 / 5)

- 一方、尾木ら^{※1}は、無担保無保証融資に注目し、個々の企業のPDとLGDに正の相関があることを確認し、EL推計においてはこの相関を考慮しなければ、ELを過小評価する可能性を指摘

使用データ：日本政策金融公庫が保有する約63万社の融資・デフォルトの有無・デフォルト後の債権回収率

変数の定義：PDとして融資後翌一年間にデフォルトする確率、LGDとしてデフォルト後累計3年間の債権未回収率を採用

検証手法：LGDを被説明変数、PDを説明変数とする単回帰モデルを構築し、R²と係数の符号を確認



無担保無保証融資のPDとLGDの関係

※1 尾木、戸城、枇々木、小企業のEL推計における業歴の有効性、2015

また、デフォルト時損失（LGD）とELのもう一つの構成要素であるデフォルト率・PDを単一の共

通ファクターによって推定するモデルを構築した研究事例もあります。尾木らは、日本政策金融公庫が保有する約 63 万社の小企業向けの融資データを対象に、LGD分析の研究を行いました。その結果、無担保無保証融資については、PDとLGDに正の相関があることを確認し、EL推計においては、この相関を考慮しなければ、ELを過小評価する可能性を指摘しています。

5. 信用リスクの分析手法 (④LGD分析 4 / 5)

- また、尾木らはPDとLGDが業歴を共通ファクターとする擬似相関となることを確認し、業歴のみを説明変数としたELのシングルファクターモデルを構築

- ✓ 先行研究^{※1}において、小企業経営者の個人資産がPDやLGDに与える影響は大きく、また、業歴が経営者の個人資産の代理変数となっていることを指摘

$$PD = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$$

$$LGD = \beta_0 + \beta_1 x$$

$$EL = PD \times LGD = \sum_{k=0}^4 \eta_k x^k$$

$$\text{ただし、} x \text{は業歴、} \eta_k = \sum_{t=\max(k-1,0)}^{\min(k,3)} \alpha_t \beta_{k-t}$$

※1 尾木、戸城、枇々木、小規模企業向け信用スコアリングモデルにおける業歴の頑健性と経営者の個人資産との関係性、2014

PDモデルおよびLGDモデルについての先行研究の中には、説明変数に経営者の個人資産の代理変数となっている業歴が使用されているものがあります。このことから、PDとLGDの相関は業歴を共通ファクターとする疑似相関となっている可能性を指摘し、定式化されたPDとLGDから業歴の影響を取り除いた残差に相関がないことを検証することで、その妥当性を確認しました。尾木らは、この要因を、資産規模が小さい小企業においては、経営者の個人資産が経営に与える影響が大きく、業歴が経営者の資産の代理変数になっているからと考察しています。そして、業歴のみを説明変数とするLGD、PDおよび、その積であるELのシングルファクターモデルを構築しています。

5. 信用リスクの分析手法 (④LGD分析 5 / 5)

- 従来、多くの金融機関は、中小企業向けの融資の大半に担保や保証を付けており、PDとLGDの相関に注意を払う必要性は低かった。しかし、近年、無担保無保証融資のニーズの高まりとともに実績は着実に伸びており、そのような融資における信用リスク管理として本手法は多くの示唆を与えるものと思われる。
- 一方で、尾木らの研究では、PDやLGDの定義を限定して分析を行っている。様々な観測期間でPDおよびLGDを定義すること、また、時系列分析を行うことで、さらにEL推計の精度向上が期待できると考えられる。

このような研究は、日本の独自性を反映したLGD推定モデルの発展に寄与するものと思われます。また、従来、中小企業向けの融資の多くは担保や保証を付けており、PDとLGDの相関に注意を払う必要性は低かったと考えられますが、近年では、無担保無保証のニーズの高まりとともに、その実績は着実に伸びており、そのような融資についてのリスク管理については、二つめの尾木らの手法が多くの示唆を与えるものと思われます。一方で、尾木らは、PDやLGDの定義を限定して分析を行っています。様々な観測期間でPDやLGDを定義すること、また、時系列分析を行うことで、更にEL推計の精度向上が期待できると考えられます。

5. 信用リスクの分析手法 (⑤Gamma回帰モデル 1 / 5)

- デフォルト時の損失（LGD：Loss Given Default）のモデル化は困難である。

- ✓ データ件数の確保が難しく、回収期間も長期にわたる。
- ✓ 回収率の頻度分布が0%と100%に集中するbimodel型の形状^{※1}となっている。
- ✓ 回収には、保証および担保による回収（保全回収）と、保証および担保によらない回収（信用回収）が混合^{※2}している。

※1 国内外で調査研究が行なわれている。国内では、例えば、伊藤有希・山下智志（2007）。

今井健太郎・尾藤剛（2014）では、bimodel型のモデル化の困難を回避するため、回収率の代わりに回収額を推計対象とし、Gamma回帰モデルによる推計が提案されている。

※2 今井健太郎・尾藤剛（2014）では、回収行動の有無に極めて依存する保全回収を除外した信用回収部分を単独でモデル化する手法が検討されている。

さて、今回説明した手法と同じデフォルト損失率（LGD）を扱いますが、ここでは、確率論的にモデル化する手法について説明します。LGDを確率論的にモデル化することは難しく、デフォルト確率・PDの研究よりも、かなり少ないことが現状です。その理由として、そもそもデフォルトが起こったデータしか使用できないため、データ件数があまり確保できないこと。回収期間が長く、最終的な回収額が確定するまでに時間がかかること。回収率は0%と100%の両極端の値に集中しており、bimodel型の分布としてモデル化する必要があるが、bimodel型の分布はパラメータの安定的な推定が難しいこと。そして、回収には、保証や担保による保全回収と、それ以外の信用回収が混在しており、保全回収の方は債権者の回収行動の有無に極めて依存すること等が挙げられます。

本日ご紹介する今井・尾藤の論文では、bimodel型の分布になってしまう回収率ではなく、回収額を扱うとした上で、回収のうちの保全回収を除いた信用回収部分のみをモデル化するというアプローチを使って、難点としていたうちの後ろの2点を解決しています。

5. 信用リスクの分析手法 (⑤Gamma回帰モデル 2 / 5)

- 被説明変数 Y を説明変数 x_1, \dots で説明する場合、

モデル	線形回帰モデル	Gamma回帰モデル
Yの確率分布	Yは正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う。 確率密度関数は、 $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	YはGamma分布 $\text{Gamma}(k, \theta)$ に従う。 確率密度関数は、 $f(y) = \frac{y^{k-1} \cdot \exp(-y/\theta)}{\Gamma(k) \cdot \theta^k} \quad (y > 0)$
Yの平均	平均 μ は、説明変数 x_1, \dots の一次式。	平均 $k\theta$ の対数 $\ln(k\theta)$ は、説明変数 x_1, \dots の一次式。
他のパラメータ	分散 σ^2 は、説明変数の値に依らない一定値。	形状パラメータ k は、説明変数の値に依らない一定値。
イメージ図		

初めに、Gamma回帰モデルとはどのようなモデルかについて、簡単に説明します。被説明変数 Y を説明変数 x で説明する場合を考えます。通常の線形回帰モデルは、 Y の確率分布は正規分布ですが、Gamma回帰モデルでは、 Y の確率分布はGamma分布になります。Gamma分布は0以上の値しか取らないため、Gamma回帰モデルは0以上の値しか取らない被説明変数を扱う場合に有用なモデルです。回収額は0以上の値しか取らないため、この二つのモデルの中では、Gamma回帰モデルの方が適切のように考えられます。

次に、 Y の平均ですが、線形回帰モデルの場合には、正規分布のパラメータの μ そのものが x の一次式です。一方、Gamma回帰モデルの場合には、平均である $k\theta$ そのものではなく、 $k\theta$ の対数が x の一次式となります。ここでの対数は、一般化線形モデルの用語では「リンク関数」と呼ばれており、リンク関数を変更することで、 Y の平均と x の関係を、いろいろと変更することができます。

正規分布もGamma分布もパラメータが二つあるため、 Y の平均と x の関係を表すだけではモデルを特定することができません。そのため、線形回帰モデルでは、 σ は x の値に依らない一定値、Gamma回帰モデルでは、 k は x の値に依らない一定値としています。

参考までに、イメージ図もスライドに表示しています。グラフの各縦線の左側に誤差の確率密度関数のグラフを載せています。線形回帰モデルでは、大小に依らず同じ分散が仮定されていますが、Gamma 回帰モデルでは、値が大きくなるほど分散も大きくなる様子が見取れると思います。一般に、0以上の値しか取らない変数は、値が大きくなるほど分散が大きくなる性質があると想像できますので、そのような性質を表すことができる点で、Gamma 回帰モデルが有用と言えるでしょう。

5. 信用リスクの分析手法 (⑤Gamma回帰モデル 3 / 5)

• 一般のGamma回帰モデルの算式

Y	:	被説明変数
$x_0 (= 1), x_1, x_2, \dots$:	説明変数
$x_0^{(i)} (= 1), x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots$:	i 番目のデータ
$Y^{(i)} \sim \text{Gamma}(k, \theta^{(i)})$:	i 番目のデータに対する Y の値を表す確率変数
$E[Y^{(i)}] = k\theta^{(i)}$:	Gamma分布の期待値の公式より
$\ln(E[Y^{(i)}]) = \ln(k\theta^{(i)}) = \sum_j b_j x_j^{(i)}$:	Gamma回帰モデルの回帰式※1

※1 \ln の内側に E があるため、 $Y^{(i)}$ のデータの対数値について回帰分析を行うモデルとは異なる。
これをもとに最尤法を用いて、パラメータ k, b_j を設定する。

この Gamma 回帰モデルを、算式を使って説明してみます。前スライドと同じく、 Y を被説明変数、 x を説明変数とします。そして、右上に (i) をつけたものを、この変数の i 番目のデータとします。Gamma 分布のパラメータのうち、 k は全データ共通ですが、 θ はデータの値で異なるものなので、 θ の上にも (i) をつけます。

Gamma 回帰モデルの回帰式は、 Y の期待値の対数が x の一次式で表現できるものです。ここで、注意点として、左辺は、 Y の対数の期待値ではなく、 Y の期待値の対数ですので、 Y のデータの対数を取ってから x に回帰するモデルとは異なります。仮に、 Y のデータの対数を取ってから x に回帰するモデルとした場合、 Y の分布として仮定した確率分布そのものではなく、その対数分布を扱っていることに注意する必要があります。その意味では、Gamma 回帰モデルのような一般化線形モデル・GLMは、 Y の従う分布をそのまま扱うことができる点で、より自然なモデルとなります。

5. 信用リスクの分析手法 (⑤Gamma回帰モデル 4 / 5)

• 信用回収額を推計するGamma回帰モデル※1

Y	:	信用回収額
$x_0 (= 1), x_1, x_2, \dots$:	財務情報・貸出情報・属性情報の変数の対数値
ξ	:	デフォルト時の債権残高
$x_0^{(i)} (= 1), x_1^{(i)}, \dots, \xi^{(i)}$:	i 番目のデータ
$Y^{(i)} \sim \text{Gamma}(k, \theta^{(i)})$:	i 番目のデータに対する Y の値を表す確率変数
$\ln(E[Y^{(i)}]) = \ln(k\theta^{(i)}) = \sum_j b_j x_j^{(i)} + \ln(\xi^{(i)})$:	Gamma回帰モデルの 回帰式※2

※1 今井健太郎・尾藤剛（2014）

※2 $\ln(\xi^{(i)})$ はオフセット項であり、左辺の $\ln(E[Y^{(i)}])$ と組み合わせることで、回収率の算式となる。

次に、Gamma回帰モデルを信用回収額のモデル化に使用する場合を考えます。一般のGamma回帰モデルとほぼ同様の算式でよいのですが、1点だけ注意しなければならないことがあります。信用回収額には、デフォルト時の債権残高の大きさに比例する部分がある点です。この問題は、オフセット項という技術を用いて解決することができます。デフォルト時の債権残高のデータを「 $\xi^{(i)}$ 」として、Gamma回帰モデルの回帰式の右辺に $\xi^{(i)}$ の項を足します。この $\xi^{(i)}$ の項のようなものを「オフセット項」と呼びます。この項は、左辺と組み合わせることで回収率を表すものとなります。

ちなみに、 Y を ξ で割った値を直接モデル化する考え方も、一応あります。ただし、その場合は、「 ξ の確率分布をモデル化し、 Y の確率分布と ξ の確率分布を基に、それらの比がどのような確率分布に従うかを計算し・・・」、という形になってしまうため、分析が難しくなることには注意が必要です。

5. 信用リスクの分析手法 (⑤Gamma回帰モデル 5 / 5)

• 今井健太郎・尾藤剛（2014）における分析

- ✓ データ：日本リスク・データバンク株式会社（RDB）の「デフォルト債権回収データベース」
- ✓ 属性情報の変数を3個設定し、それに加えて各種財務情報・貸出情報の変数のうち3個を、対数尤度が最も大きくするように選択。
- ✓ モデルの評価には10交叉検証法を使用。すなわち、データセットを10分割し、そのうちの9個のサブセットでモデル構築を行い、残る1個のサブセットで誤差を計算。
- ✓ 単純な線形回帰モデルと比較して精度と頑健性が高いことが示された。

最後に、今井・尾藤の論文における分析結果について、ざっと説明します。データとしては、日本リスク・データバンク株式会社（RDB）のデータを使用しています。モデルの変数をあまり増やさないように、説明変数は、属性情報の変数を3個。すなわち、債務者の規模、債権者がどのような金融機関であるか、担保があるかどうかの3個に加え、各種財務情報、貸出情報の変数を3個だけ選択して、使用することにしています。その3個の選定は、モデルの対数尤度が最も大きくなるように行われています。モデルの評価には10交叉検証法を使用しています。すなわち、データセットを10分割し、そのうちの9個のサブセットでモデル構築を行い、残る1個のサブセットで誤差を計算することで、精度を検証しています。その結果、単純な線形回帰モデルを使用した場合と比較して、Gamma回帰モデルのほうが、精度と頑健性が高いと結論づけられています。

6. 機械学習による高精度予測の活用 (ニューラルネットワークによる予測)

- 信用リスクへの応用については確認していないものの、ニューラルネットワーク等の機械学習による高精度予測を活用することも考えられる。
- 2018年ICAにおいて、金利予測あるいは支払備金のためのクレーム金額予測にニューラルネットワークを適用し、DNSモデルあるいはチェインラダー法よりも精度が高かったことを示す研究論文が発表されている。
- 今後の信用リスクの研究においても、機械学習による手法が注目される可能性がある。

データ解析の手法としては、以上で説明した統計解析の他に、機械学習という分野があります。機械学習の一分野であるニューラルネットワークは、高精度な予測を目的とした手法です。信用リスクではないですが、今年ICAにおいて、金利あるいは支払備金のためのクレーム金額の予測にニューラルネットワークを利用することと、既存の動的 Nelson-Siegel 法（DNS法）あるいはチェインラダー法よりも精度が高かったことを示す研究論文が発表されています。信用リスクの分野で機械学習を用いた研究は確認していないのですが、将来の信用コストの予測のような分野で、ニューラルネットワークが注目される可能性はあると考えています。

7. まとめ

- 以上のように、投資理論委員会では、信用リスクの分析手法に関して、様々な最新論文の調査を進めてきた。



- 今後の投資理論委員会の取り組みとしては、これらの調査を踏まえた実務への応用の視点や、論文内で述べられている課題等について更に深掘りを進めていきたい。

ここまで、信用リスクをデータ解析の高度な手法を用いて研究している様々な最新論文の内容を、簡単にご紹介させていただきました。今後は、これらの調査を踏まえた実務への応用や、論文内で述べられている課題等について、更に深掘りを進めていきたいと考えております。

信用リスクに関する発表は以上でございます。引き続き、金利リスクに関する発表に移らせていただきます。

権 オリックス生命の権と申します。よろしくお願いいたします。

金利リスク分析 ～DNSモデルによる金利リスク評価について～

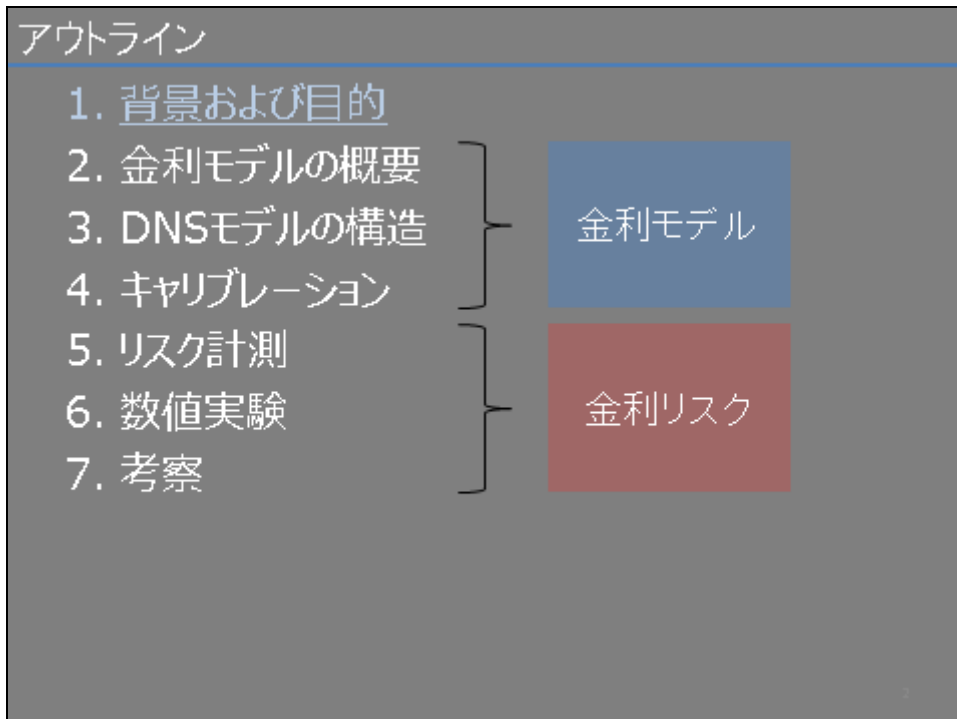
投資理論委員会
2018年11月9日

1

今、永井様から発表していただいた信用リスクから変わりまして、残りの約45分間で、金利リスクの評価についてのテーマで、投資理論委員会が研究したことを発表させていただきます。

恐らく、この会場には、私より金利リスクや、このようなテーマについて詳しい方が、たくさんいらっしゃると思いますので、非常におそれ多いですけれども、分かりやすい説明を心掛けたいと思いますので、よろしくお願いいたします。

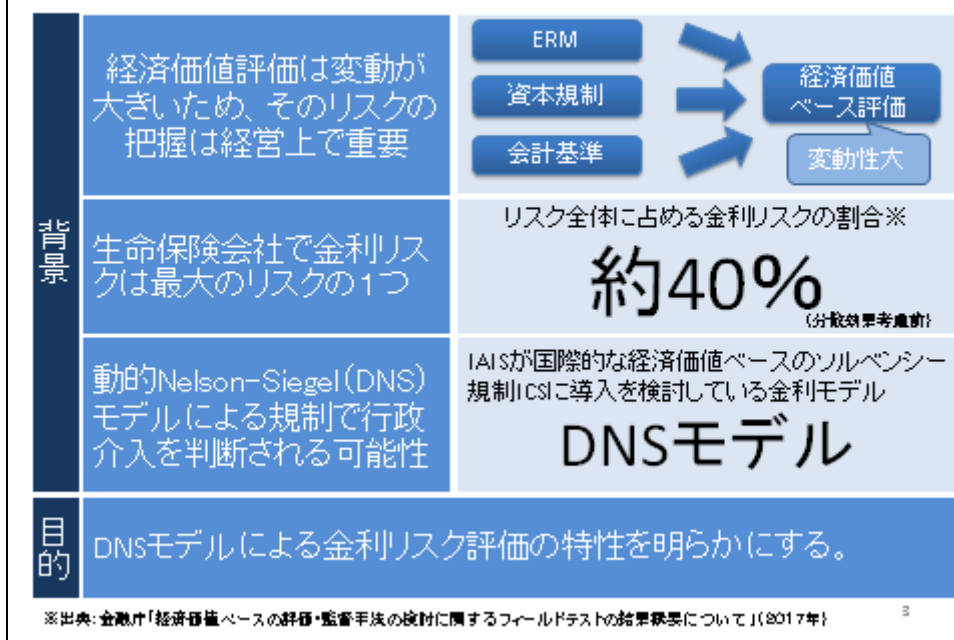
すみません。一つ、申し訳ないのですが、恐らく、ア会のアップローダーに載っている配布資料の数式の一部が少しバグっております。多分、このスライドで言いますと、14ページ以降なのですが、このスライドは直っていますので、適宜ご指摘しながら進めたいと思います。それでは、よろしくお願いいたします。



まず、本研究の背景および目的ということで進めていきます。一応、アウトライン、目次ということで、本研究の全体像を大まかに、ご説明いたします。

まず第1章「背景および目的」ということで、このような金利リスクの研究をすることになったきっかけを、ご紹介します。次の第2章から第4章までは、金利モデルについてのお話です。まず第2章では、「金利モデルの概要」ということで、世の中には今回の研究対象としたDNSモデル以外にも様々なモデルがございますので、その説明を簡単にさせていただきます。次に、第3章の「DNSモデルの構造」ということで、今回の研究対象であるDNSモデル、Dynamic Nelson-Siegel について、金利のイールドカーブをどのように表現するかを、詳細にご説明いたします。次の第4章は「キャリブレーション」ということで、財務省から金利の時系列のデータを取得できますので、それを用いてキャリブレーション、パラメータの推定を行っております。次の第5章から第7章が、金利リスクについてのお話です。第5章の「リスク計測」では、いわゆる経済価値ベースの下で金利リスクをどのように考えるか、どのように計算するかを、さらりとお話いたします。次の第6章では、「数値実験」ということで、金利リスクに関するシミュレーションを行います。最後の第7章では、前の章の数値実験で得られた結果について「考察」を行います。

1.背景および目的



それでは、早速、第1章に移っていきます。3ページめの1章「背景および目的」ですけれども、上が「背景」で、下が「目的」となっております。まず、背景で、一番上の段落ですけれども、経済価値評価、経済価値ベースによる保険負債の評価やリスクの評価などは、一般的に、現行会計のものと比較して変動が大きいと言われております。そのため、そのリスクの把握は、経営を行っていくに当たって、非常に重要なものとなります。右の図ですけれども、ERM・リスクの評価や、資本規制、ソルベンシーの規制あるいは、会計基準などが、すべて将来、変動制の大きい経済価値ベースの評価に収れんしていくのではないかとされております。

その下の2段めですけれども、生命保険会社で金利リスクは最大のリスクの一つということで、金融庁が2016年に、全社向けに経済価値ベースのフィールドテストをやらせました。もう結果が出て公表されたのですけれども、生命保険会社全体において、全体のリスクを100としたら、金利リスクの割合が約40%という非常に大きな値となりました。そのようなことで、生命保険会社においては、金利リスクは非常に大きい、最大のリスクの一つということを書いています。

その下の三つめの段ですが、例えば、現在日本で使われているソルベンシー・マージン比率は、大体200%を下回ると、一般的に行政介入が行われます。例えば、これが、今後、経済価値ベースのソルベンシー規制・ICSに変わったとして、金利リスクをどのように計算するか、評価するかということで、IASという国際的な組織が、今、検討しているモデルがDNSモデルという金利モデルです。

つまり、今後のソルベンシー規制、資本規制に対応していくためには、一番下の「目的」ですけれども、DNSモデルによる金利リスク評価の特性を明らかにすることで、DNSモデルがリスク評価に与える特性などを知ることが非常に重要だと考えられるということで、われわれは、このテーマを研究いたしました。

アウトライン

1. 背景および目的
2. 金利モデルの概要
3. DNSモデルの構造
4. キャリブレーション
5. リスク計測
6. 数値実験
7. 考察

金利モデル

金利リスク

次に、第2章「金利モデルの概要」ということで、先ほども申しあげました通り、世の中には今回研究対象としたDNSモデル以外にも様々なモデルがございますので、その説明を簡単にさせていただこうと思います。

2.金利モデルの概要: 観測世界による分類

金利モデルは、確率分布が観測される世界によって、実確率モデルとリスク中立確率モデルに大別される。

金利モデル

実確率モデル

- 現実世界における確率分布をモデル化する手法である。
- 所定の金利シナリオが実際に発生する確率を求めることができるため、金利変動リスクの評価等に利用される。

リスク中立確率モデル

- 現実世界とは異なるリスク中立世界における確率分布をモデル化する手法である。
- 現実世界における金利の変動確率を求めることはできないが、金融商品の理論価格が当該確率分布のもとでの期待値となるため、デリバティブ価格等の評価に利用される。

5

まずは、観測世界による分類で、金利モデルは、確率分布が観測される世界によって、実確率モデルとリスク中立確率モデルという二つに大別されます。まず、左の実確率モデルは、現実世界における確率分布をモデル化する手法です。ある所定の金利シナリオが実際に発生する確率を求めることができるため、金利変動リスク、金利リスクの評価などに利用されます。一方で、右側のリスク中立確率モデルは、現実

世界とは異なる、先ほどとは異なるリスク中立世界を想像して、その世界における確率分布をモデリングする手法です。この右側のリスク中立確率モデルについては、現実世界における金利の変動確率を求めることはできないのですが、ただ、金融商品の理論価格が、この各確率分布のもとでの期待値となるため、デリバティブのプライシングなどに利用されます。

2.金利モデルの概要: モデル化の対象による分類		
金利モデルは、モデル化の対象によって、ショート・レートモデル、フォワード・レートモデル、イールド・カーブモデルに大別される。		
金利モデル		
ショート・レート モデル	フォワード・レート モデル	イールド・カーブ モデル
ショート・レート(瞬間 利子率)をモデル化	フォワード・レートをモ デル化	イールド・カーブ全体 を直接モデル化
(例) • Vasicek モデル • Cox-Ingersoll- Ross モデル • Hull-White モデル	(例) • Heath-Jarrow- Morton モデル • Brace-Gatarek- Musielala モデル	(例) • Nelson-Siegel モ デル • 主成分分析 モデ ル

次のページですが、今度は、また違う分類で、モデル化の対象による分類です。金利モデルは、モデル化の対象、何をモデリングするのかによって、ショート・レートモデルとフォワード・レートモデルとイールド・カーブモデルに大別されます。下に三つの区分けがありますが、まず、ショート・レートモデルについては、その名前が示す通り、ショート・レート、瞬間利子率をモデル化するものです。例としては、この後、少し出てくるのですが、Vasicek モデルやCIRモデル、その下のHull-White モデルなどがあります。その右のフォワード・レートモデルも、名前が示す通り、フォワード・レートをモデル化するという方法で、こちらの例としては、ここに書いてあるようなモデルがご紹介します。その右がイールド・カーブモデルで、こちらはイールドカーブ全体を直接モデル化するというものです。この発表でよく出てくるのですが、例としては、Nelson-Siegel モデルと主成分分析モデルなどがご紹介します。

アウトライン

1. 背景および目的
2. 金利モデルの概要
3. DNSモデルの構造
4. キャリブレーション
5. リスク計測
6. 数値実験
7. 考察

金利モデル

金利リスク

それでは、3章で、われわれの研究対象であるDNSモデルを掘り下げて、ご説明していきます。

3.DNSモデルの構造

DNSモデル (Dynamic Nelson-Siegel モデル) は、静的なモデルと動的なモデルから構成される

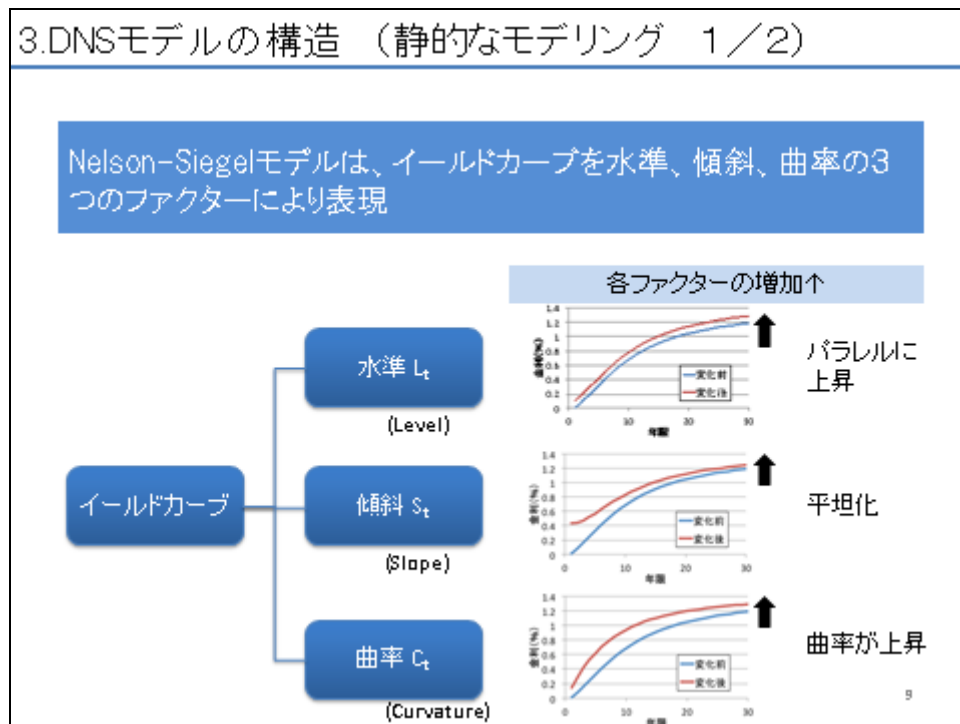
DNS モデル	静的な モデル	Nelson-Siegelモデル <ul style="list-style-type: none">• 1時点のイールドカーブのモデリング• イールドカーブを水準・傾斜・曲率に分解
	動的な モデル	時系列モデル <ul style="list-style-type: none">• イールドカーブの時間的変動のモデリング• 「平均回帰性」を表現

DNSモデルは、「Dynamic Nelson-Siegel」モデルの略でして、Dynamic、動的な Nelson-Siegel という意味です。こちらを分解していきますと、静的なモデル、スタティック (Static) なモデルと、動的なモデル、ダイナミック (Dynamic) なモデルに分けることができます。

その下ですが、まず、静的なモデルとしては、先ほど申し上げました Nelson-Siegel モデルです。これは、ある特定の一時点のイールドカーブのモデリングを行うものです。イールドカーブを水準・傾斜・曲率という三つのファクターに分解することが、最大の特徴です。その下の動的なモデルは、時系列モデル。

後でご紹介する、結局、Vasicek モデルなのですが、こちらの特徴としては、イールドカーブの時間的な変動をモデリングすることが挙げられます。このキーワードも、また、始終出てくるのですが、「平均回帰性」を表現できるという特徴がございます。

この後、2 ページ分で、上の静的なモデル、Nelson-Siegel についてご紹介しまして、その後、次の4 ページ分で、下の動的なモデルをくっつけたら、どうなるのかということで、ご紹介していきます。



まずは静的なモデルということで、Nelson-Siegel モデルの話です。先ほども申し上げましたように、イールドカーブを水準 (Level) と傾斜 (Slope)、曲率 (Curvature) の三つのファクターにより表現することが特徴です。モデルの数式については、次のページでご紹介するのですが、まずは、このページの右側のグラフで、三つのファクターが、それぞれ独立に変化し、各ファクターの数値が増加したときに、イールドカーブがどのように変化するかを示しました。まず、一番上の水準 (L) ですが、数値が増加すると、イールドカーブ全体が平行に上昇することが分かります。その下の傾斜については、数値を上げると、イールドカーブがフラットに平坦化する。その下の曲率 (C) については、このファクターの数値が増加すると、曲がりが強くなるといった特徴があります。

3.DNSモデルの構造（静的なモデリング 2/2）

Nelson-Siegelモデル

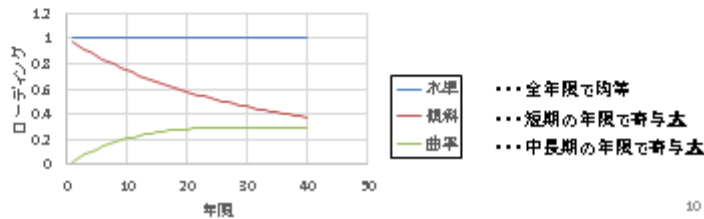
時点tにおける年限 τ のイールド

$$y_t(\tau) = L_t \times 1 + S_t \times \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \right) + C_t \times \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} \right)$$

水準
傾斜
曲率

- イールドカーブを「Σ 係数 × ローディング」の形で水準、傾斜、曲率に分解
- 係数 (L_t , S_t , C_t) はそれぞれ水準、傾斜、曲率の程度を表す。
- 3ファクターは通常、相関を有する(主成分分析では独立)

ローディングの形状

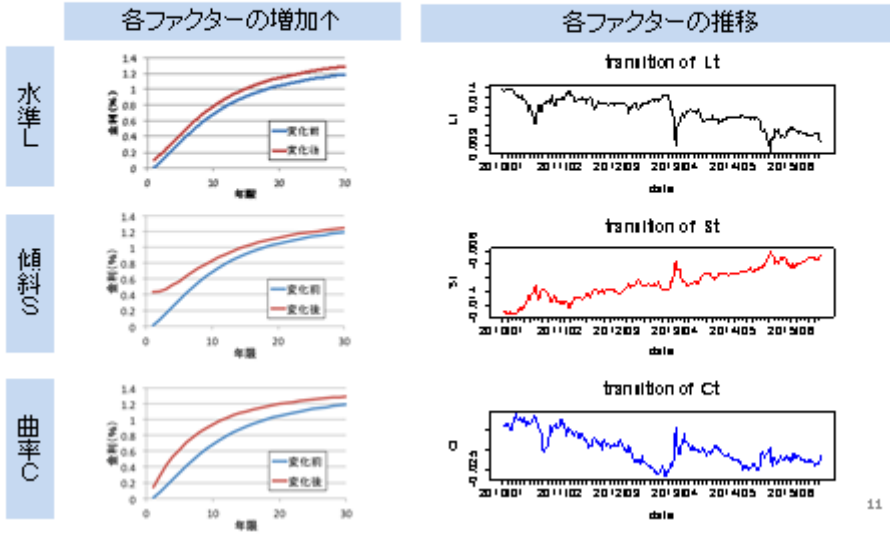


次のページですが、下が Nelson-Siegel モデルの数式です。こちらは、ある一時点 t におけるイールドカーブの特定の年限 τ のイールドを表しております。色が三つついていますが、この三つの項を足し上げておまして、例えば、一番左の水準の項ですと、水準の係数 L と、先ほど申し上げましたファクター L と掛け算で 1、ローディングと呼ぶのですけれども、ローディングの掛け算となっております。先ほどの前のページですと、三つのファクターを独立に動かしたのですけれども、実際は、三つのファクターは相関を有することが一般的なもののようです。

下のグラフですが、こちらはローディングについてのグラフとして、横軸は年限 τ 、イールドカーブの年限です。例えば、水準というファクターのローディングについては、この青ですけれども、ずっと恒常的に 1 の値を取ります。ですので、先ほど申し上げたように、この水準のローディングに対応するファクター L を増加させると、イールドカーブ全体が同じように持ち上がるということで、右に「・・・」で書いてありますように、全年限で均等に寄与します。傾斜や曲率なども同様で、傾斜は短期の年限で寄与が大きい。曲率については、中長期の年限で寄与が大きいということが言えます。

3.DNSモデルの構造 (動的なモデリング 1/4)

各時点の水準、傾斜、曲率はあるレベルの周囲をランダムに推移



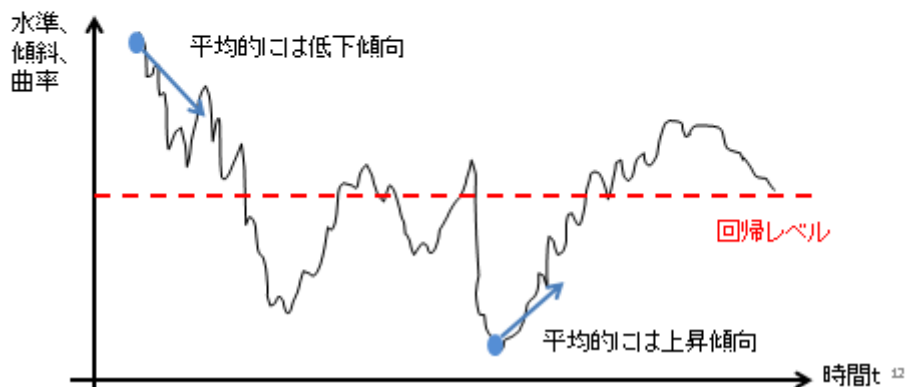
次のページですが、ここからは動的な話に入ります。動的なモデリングということで、先ほどまでは静的なモデルで t を固定していたのですが、この時間軸 t を動かしたら、どのようになるのかという話です。左側は、先ほどご紹介した三つのファクターです。右側のグラフについては、その前のページのモデルである Nelson-Siegel を用いまして、各時点 t についてファクターの推定を行った結果です。ですので、横軸は時間軸。ここから何を読み取るかは難しく、主観的になってしまいますが、当時DNSモデルを考えた人は、この時間軸 t について平均回帰性が存在すると考えまして、それをモデリングすることにしました。

3.DNSモデルの構造 (動的なモデリング 2/4)

DNSモデルには平均回帰性が組み込まれている。

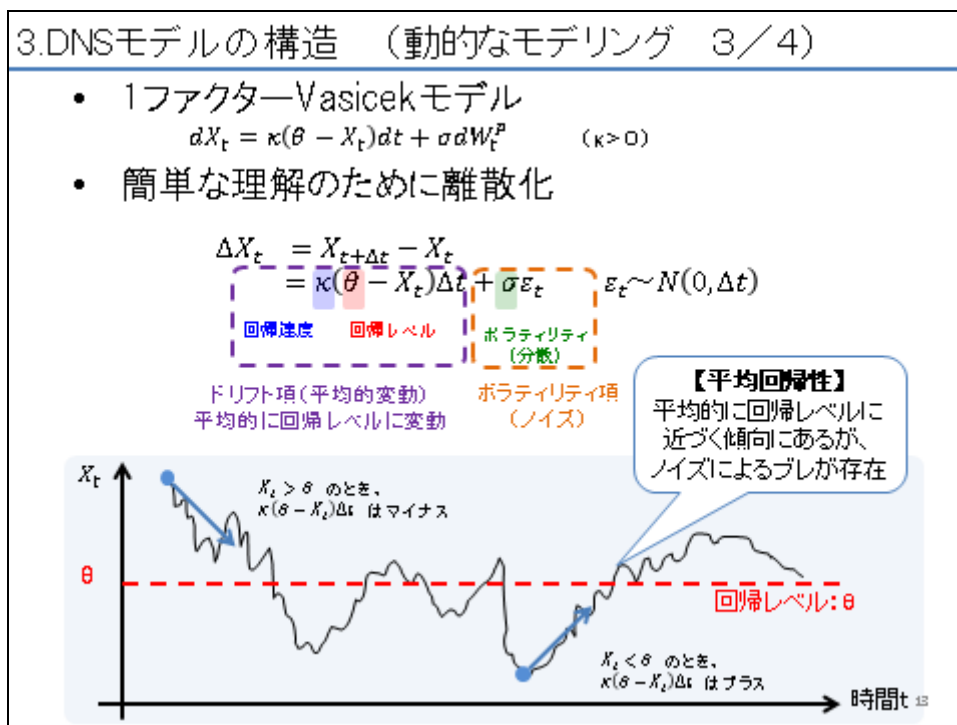
平均回帰性

- 水準、傾斜、曲率はランダムな動きがあるものの、平均的には回帰レベルに向かう傾向を持つ
- 金利の変化 = 回帰レベルへの回帰 + ノイズ



「DNSモデルには平均回帰性が組み込まれている」ということで、下のグラフを見ていただきますと、前のページでご説明したグラフは、大体このような形をしていました。平均回帰性とは、水準、傾斜、曲率はランダムな動きがあるものの、平均的には回帰レベルに向かう傾向を持つという特徴です。そうなりますと、金利の変化は、回帰水準、回帰レベルへの回帰とノイズの足し算として表現できるということになります。

下のグラフですけれども、これは、特定のイールドカーブの年限 τ 、例えば、30年で切った図だと考えてください。横軸の時間 t に対して、変わらない不変の回帰レベルが赤い線点ですけれども、これが存在して、その回帰レベルに対して、今の水準が大きければ、将来、平均的には低下傾向。逆に、今、低い状態だと、将来、平均的には上昇傾向ということを表しております。



引き続き動的なモデリングの話ですが、実は、平均回帰性は、金利モデル、時系列モデル、様々に使われておりまして、先ほどまでお話したDNSモデルを一旦忘れていただいて、1ファクターのシンプルなVasicekモデルを考えていきます。いろいろと数式が書いてありますが、基本的には、前のページでお話したことと同じでして、回帰レベル θ を基準にして、今の水準がそれより大きいと、将来、マイナス方向に、逆に、今の水準がそれより小さければプラス方向にということになります。

ただし、ノイズ項、ボラティリティの項がございまして、これがあることによって、吹き出しの説明ですけれども、「平均的に」や「傾向」などという表現となっております。また、数式に「 κ 」というパラメータがありまして、これが回帰速度を制御しておりまして、これが大きいと速く回帰する。これが小さいと遅く回帰する、ということを表しております。

3.DNSモデルの構造 (動的なモデリング 4/4)

- DNSモデルでは、 (L_t, S_t, C_t) が3ファクターVasicekモデルに従うと仮定:

$$\begin{pmatrix} dL_t \\ dS_t \\ dC_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_{11}^P & & \\ & \kappa_{22}^P & \\ & & \kappa_{33}^P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1^P \\ \theta_2^P \\ \theta_3^P \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L_t \\ S_t \\ C_t \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_t^{L,P} \\ dW_t^{S,P} \\ dW_t^{C,P} \end{pmatrix}$$

回帰速度 回帰レベル

ドリフト項
平均的に回帰水準に変動

ボラティリティ行列 (分散・相関を表現) ブラウン運動の増分 (互いに独立)

ボラティリティ項 (ノイズ)

14

このページが、恐らく配布資料では、穴埋めのように一部が空欄になってしまっているのですが、ご覧の通りです。行列の「 κ 」「 θ 」「 $-$ 」「 Σ 」が恐らく空欄になってしまっていると思います。スライドでは直っています。

DNSモデルですが、これは、水準L、あと、SとCが3ファクターのVasicekモデルに従うと仮定しました。つまり、Vasicekモデルのファクターを静的なモデル、Nelson-Siegelの三つのファクターにしたものと言うことができます。算式の右側の項のボラティリティ行列が加わったことによって、少し難しいものとなっています。

アウトライン

1. 背景および目的
2. 金利モデルの概要
3. DNSモデルの構造
4. キャリブレーション
5. リスク計測
6. 数値実験
7. 考察

金利モデル

金利リスク

15

以上が金利モデルの説明で、次は「キャリブレーション」ということで、財務省から取得できる時系列の金利データを用いてパラメータの推定を行ったので、その結果をご紹介します。

4.キャリブレーション

ICS version 1.0(※)と同様のデータ

(※)経済価値ベースのソルベンシー規制CSの暫定的な基準

- キャリブレーション期間:2010年1月～2015年12月
- データソース:財務省HP
- 年限:1,2,3,4,5,10,20,30年
- 観察頻度:週次
- 外れ値等のデータの除外は行わない

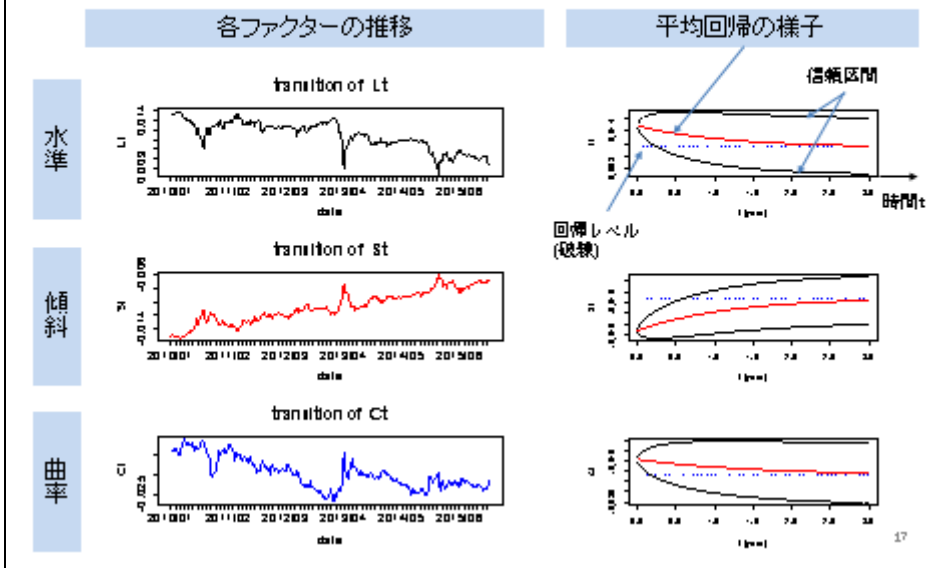
16

結果は、次のページ以降でご説明するのですが、まずは、使ったデータです。使ったデータの期間は2010年1月から2015年12月の6年間の週次データ。金利の年限については、1年から2年、3年と飛んで、30年となります。

実際、結果の数値については付録に示しているので、後日、37ページをご覧いただきたいと思います。今は、もう数値は飛ばして、性質についてお話をしていきます。その付録の37ページについても、配布資料をお持ちの方は、恐らく、何かおかしい表示になっていますので、申し訳ございません。

4. キャリブレーション

キャリブレーション結果: DNSモデル (数値は付録参照)



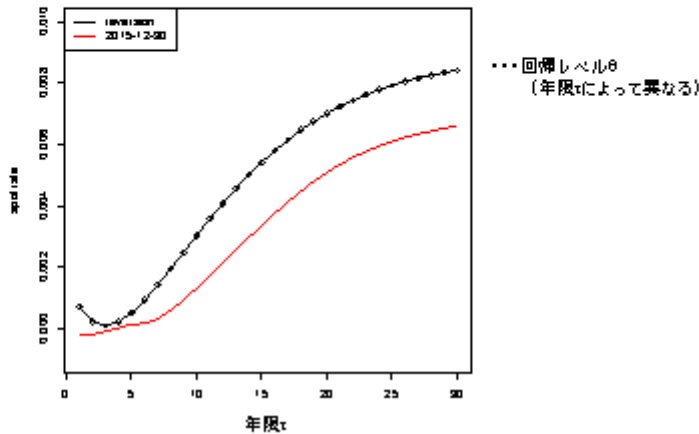
お話を戻しまして、17 ページのキャリブレーション結果です。まず、左のグラフは先ほどお見せした静的な Nelson-Siegel について、各時点 t で推計を行ったものです。一方、右側が、今回の DNS モデルのキャリブレーション結果と言えます。

右のグラフですけれども、横軸は時間 t として、ある特定の年限 τ 、30 年などを切り取ったものです。例えば、一番上のグラフを見ますと、まず破線、直線の点線があって、これが回帰レベルを示しています。それ以外に、実線で左から右に 3 本、線が伸びているのですが、赤い真ん中の直線は平均回帰の様子を示しています。その上と下に 2 本伸びていますが、これは信頼区間ということで、ノイズというものがある先ほどあったと思うのですが、ノイズ次第では、これがだいたい出ることを示しています。

4. キャリブレーション

平均的な回帰水準

- 回帰水準に対して2015年12月30日のイールドカーブは低水準かつフラット



今度のグラフは、先ほどは横軸が時間軸 t だったのですが、今度は年限 t を横軸に置きまして、時間 t を固定したものです。2本線がございまして、まず「●」のついている線が、今回のキャリブレーション結果として、年限ごとの平均的な回帰水準を示しております。一方で、赤い線は、用いた金利データの最終時点である2015年12月末の実際のイールドカーブを表しています。これから分かることとして、平均的な回帰水準に比べて、この2015年12月末のイールドカーブは水準が低い。あとは、よりフラットなものとなっております。先ほどご説明した水準のファクターが減少したり、あるいは、傾斜のファクターが増加したりすることと対応しております。

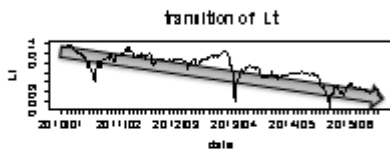
4. キャリブレーション

「平均回帰性」の存在を仮定することによる影響 ⇒ 第6章以降で分析

各ファクターの推移

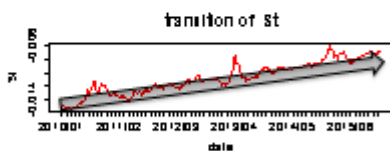
平均回帰性についての評価

水準



... 図表の観測期間では、低金利政策の影響と考えられるトレンドが出ており、平均回帰性があるとは必ずしも言えない

傾斜



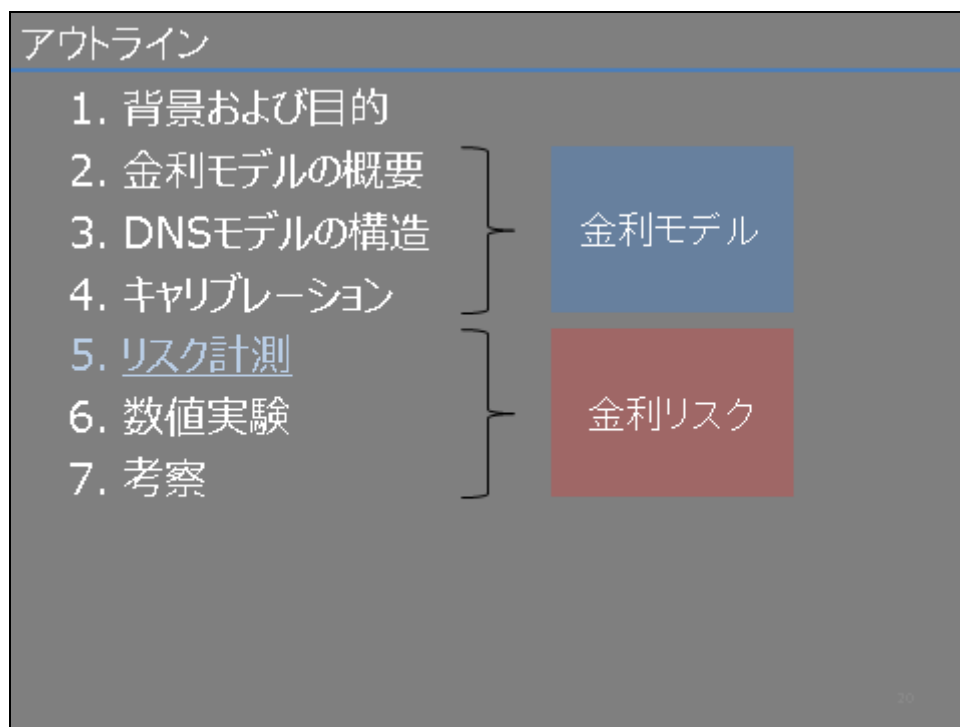
... 同上

曲率



... 平均回帰性があると言えなくもない

ただ、今回用いた時系列データですと、金利に平均回帰性がある、ないなどと言い切ることは非常に難しい問題だと思っています。例えば、左上の水準ファクターの推移を見ますと、平均回帰と言うよりは、主観ですけれども、どんどん下がっているように見える。右側に書いてあるような「図表の観測期間では、低金利政策の影響と考えられるようなトレンドが出ており、平均回帰性があるとは必ずしも言えないのではないか」という意見もあると思います。一番下の曲率ファクターについては、「何となく平均回帰性があると言えなくもない」、あるいは、「あると言えそうだ」という意見もあるかと思っています。ですので、この平均回帰性の存在を仮定することは非常に大事なことで、この影響については、第6章以降で分析を行っていきます。



それでは、以上で金利モデルのご説明をしましたので、これからは、そのモデルを使ってリスクをどのように評価するのか、という話に入っていきたいと思います。

5.リスク計測

- 金利リスク
 - …円金利資産と円金利負債の経済価値の差額(サープラス)のVaR

サープラス $S_t = A_t - L_t$

資産の経済価値 $A_t = \sum_{n=1}^N CF_n^A \times e^{-ns_n}$

スポット・レートで割引
(連続複利)

負債の経済価値 $L_t = \sum_{n=1}^N CF_n^L \times e^{-ns_n}$

- CF_n^A : 時点n発生 of 円金利資産CF
- CF_n^L : 時点n発生 of 円金利負債CF
- s_n : 時点nのスポット・レート

VaRは次頁で説明=>

21

恐らく、このページも、配布資料は少し表示がおかしくなっているのですが。まず、サープラスは「A-L」です。あとは、「Σ」の記号や掛け算の記号が、恐らく穴埋めのような感じになっていると思いますので、埋めていただけると。

金利リスクの定義については、一つではなく様々あると思いますが、今回は、上に書いてあるような「円金利資産と円金利負債の経済価値の差額(サープラス)のVaR(バリュー・アット・リスク)」と定義しております。バリュー・アット・リスクについては、次のページでご説明するとして、まずサープラス、差額までを考えていきます。

サープラスは「S」です。Sは「A-L」で、資産と負債の差額。資産と負債については、それぞれ、その下で、「A=」「L=」と書いてありまして、各時へのCF(キャッシュフロー)を割引いたものを足していく。割引については、一番の右の「eの-何乗」ということで、連続金利を考えております。

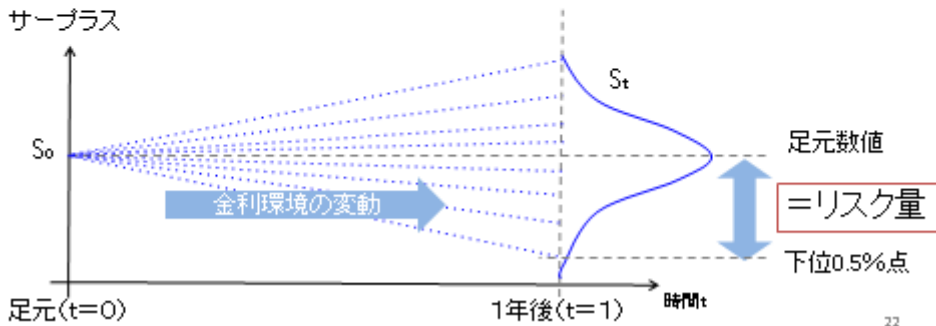
5. リスク計測

- 市場金利の変動による価値の変動(不確実性)
- リスク量の定義

$$VaR_{\alpha}(S_0 - S_t) = \min \{x | F(x) \geq \alpha\}$$

$= S_0 - VaR_{\alpha}(S_t)$
(本研究では、 S_0 は不確実性なし)

- $F(x)$ はサープラス変動($S_0 - S_t$)の累積分布関数
- α は信頼水準(ICSでは99.5%:200年に1回)



ICS version1.0では、金利リスク量は平均回帰、水準(上昇・低下)、傾斜(スティープ化・フラット化)の5つのショックシナリオとの差分をそれぞれリスクと捉え、統合、上記の手法とは異なるが、VaRによる計測を簡便化していると解釈できる。

この金利リスクですが、市場金利の変動によってサープラスの価値がどれくらい変動するか、どの程度不確実性があるか、ということで説明ができます。

その下のリスク量の定義ですけれども、こちらも、恐らく配布資料では、少しおかしいことになっているので、前のスライドを見ていただければと思います。左辺の括弧内ですが、「 $S_0 - S_t$ 」ということで、「 S_0 」は、足元($t=0$)のサープラス。一方で、「 S_t 」は、将来 t 時点のサープラス。 S_0 については、今回、不確実性がないとしています。 S_t については、不確実性がある。この S_0 と S_t の差について、信頼水準などを考えて計算したものがバリュー・アット・リスクです。

今回の発表では、「 t 」は「1」ということで、1年後を、ずっと考えていきます。ICSという国際的な基準では、一般的に信頼水準99.5%ということ、200回に1回です。今回の $t=1$ 、1年ということと合わせますと、大体200年に1回起こるようなレアな金利のストレスを考えていることになります。それで、そのようなストレスによって足元から減ってしまうサープラス分がストレスだ、金利リスクだ、と考えます。

アウトライン

1. 背景および目的
2. 金利モデルの概要
3. DNSモデルの構造
4. キャリブレーション
5. リスク計測
6. 数値実験
7. 考察

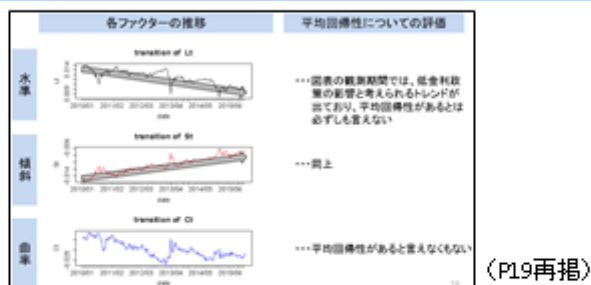
金利モデル

金利リスク

それでは、第6章の「数値実験」で、金利リスクに関するシミュレーションを、ご紹介いたします。

6.数値実験:実験対象

DNSモデルの平均回帰性の影響分析



- モデルに組み込まれている平均回帰性は、金利リスク評価に大きな影響を与える可能性がある。
 - ⇒ 平均回帰レベルを固定した上で、リスク評価時点($t=0$)の金利水準を変化させてシミュレーションを行い、平均回帰性が金利リスク量へ与える影響を分析

24

真ん中に19ページを再び載せているのですが、DNSモデルの平均回帰性の影響分析を、これから行っていきます。先ほど19ページでは、金利の平均回帰性に関する主観的な評価ということで、お話ししました。モデルに組み込まれている平均回帰性は金利リスクの評価に大きな影響を与える可能性があるという話も、ちらっといたしました。そこで、平均回帰レベルを固定した上で、リスク評価時点($t=0$)の金利水準を様々に変化させてシミュレーションを行うことによって、平均回帰性が金利リスク量へ与える影響を分析していきます。これによって、冒頭の第1章の背景や目的でご説明しました、DNSモデルが金利リス

ク評価に与える影響のうち平均回帰性に起因するものを明らかにしていきます。

6.数値実験：資産・負債CF

会社ポートフォリオ

負債(L)

- 一時払終身保険
- 加入年齢:30歳
- 性別:男性
- 保険金:合計10,000億円
- 死亡率:標準生命表×90%
- 解約率:6%
- 予定利率:0.5%
- 事業費:保険金比例0.1%

(P21再掲:)

資産の経済価値 $A_t = \sum_{n=1}^N CF_n^A \times e^{-m_n}$

負債の経済価値 $L_t = \sum_{n=1}^N CF_n^L \times e^{-m_n}$

資産(A)

- 30年以下の年限では、負債CFの50%を日本国債で複製
- 30年超の年限のCFはゼロ
- 現金:約4,800億円

- 資産・負債CFは確定CF(不確実性はないと仮定)
- 金利が低いほど、サープラスは小さい

25

数値実験の前提条件ですけれども、単純な実験として、このような会社の負債と、その下の資産のポートフォリオを考えます。負債については、一時払終身で、前提条件も単純なものです。一方で、資産については、30年以下の年限については、負債キャッシュフローの大体半分を複製できる。残りは複製できません。残りのお金については、もう、現金ですずっと保有し続けるという前提を置いています。

その下に2点、●があるのですが、注意点を2点記載しております。まず一つめは、「資産と負債のキャッシュフローは確定キャッシュフロー（不確実性はないと仮定）」ということで、今回、キャッシュフローについては、金利とは相関がないという仮定を置いています。つまり、今回の実験で考慮する金利リスクは、キャッシュフローは影響を受けない。あくまで、数式の右側の「eの何乗」ということで、将来の割引率が不確実なことによる影響ということで、金利リスクを考えております。金利と、資産と負債のキャッシュフローは、例えば「金利と解約率」などよく言われ、実際は相関があるという意見が恐らく強いと思うのですが、今回は、平均回帰性が金利リスクに与える影響を純粋に見たいということで、そこは考慮外としております。

その下の2点めの●ですが、「金利が低いほど、サープラスは小さい」ということで、これは、この後の議論で何回も出てくるのですが、一般的に、資産よりも負債のキャッシュフローの方が、より超長期であり、今回はボリュームも大きいので、金利が低下したときにサープラスは減るということです。つまり、金利が低下した場合、割引率の割引効果が小さくなって、資産も増加して、負債も増加する。ただ、負債の方が増加額が大きいため、サープラス全体で見るとマイナスに働くということです。

6.数値実験:金利水準によるリスクの感応度

計測前提

- 初期($t=0$)のイールドカーブ
 - 2010-2015年の観測値
 - LLP以下の年限: Nelson-Siegel法により算出
 - LLP以降の年限: Smith-Wilson法によりLTFRに補外
- 1年後($t=1$)のイールドカーブ
 - LLP以下の年限
 - DNSモデルにより、(L,S,C)をシミュレーション
 - Nelson-Siegel法により、イールドカーブを算出
 - LLP以降の年限: Smith-Wilson法により補外。LTFRにLLP以下と同程度のストレスを付加
- シミュレーション回数: 1万回(初期値ごと)
- リスク量の信頼水準: 99.5%

26

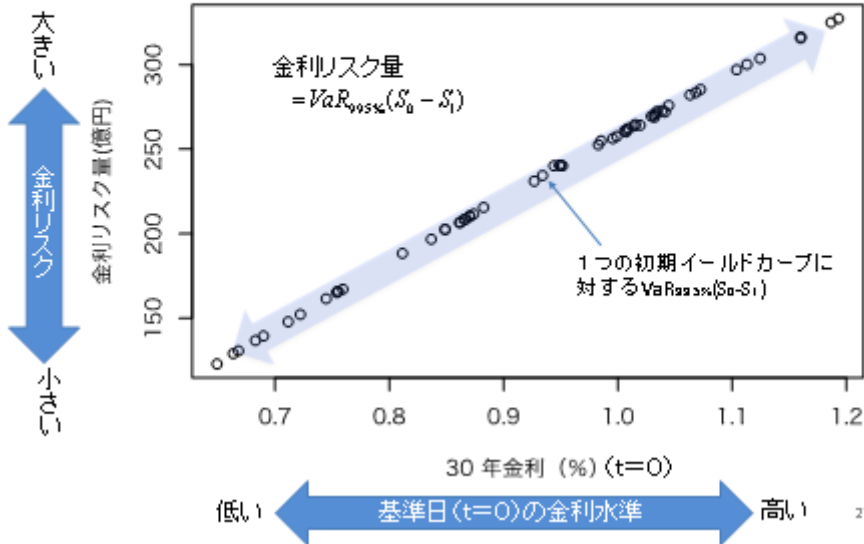
続いて、金利の前提条件です。初期($t=0$)のイールドカーブとして、2010年から2015年の観測値を、いろいろと用いていきました。「LLP」は、金利の年限のうちデータを取得できる最長の年限で、今回は30年です。30年以下については、Nelson-Siegelによって算出して、一方で、超長期は「LTFR」ということで、終局金利、フォワード・レートの3.5%に接続する。その中間の年限については、Smith-Wilson法で補外しております。

その下の1年後($t=1$)のイールドカーブについては、初期値を基に、DNSモデルを使ってシミュレーションで計算します。すなわち、第4章のキャリブレーションで求めたパラメータを使って、1年後のLやSやCというファクターを計算して、それをNelson-Siegelに当てはめて、イールドカーブを計算します。あとは、年限30年以降については、同じくらいのストレスを与えて補外を行います。

それぞれの初期値について、シミュレーションを1万回行いました。バリュー・アット・リスク99.5%、200分の1を考えますので、リスクとしては、1万回のうち50個めの悪いシナリオ、悪い結果を採用しております。

6.数値実験:結果

基準日(t=0)の金利水準が高いほど、金利リスク量大きい
 という結果が得られた。 => 第7章で分析



こちらが結果です。横軸は30年金利(t=0)で、足元(t=0)の金利の代表値として30年金利を持ってきています。何年金利でもよいのですが、とりあえず30年金利を持ってきたという感じです。縦軸は金利リスク量で、第5章でご説明した $S_0 \cdot t=0$ の足元のサープラスと1年後のサープラス $\cdot S_1$ の差額のバリュエ・アット・リスク、99.5%です。グラフを解釈しますと、上にも書かれているのですが、基準日(t=0)の金利水準が高いほど、つまり、横軸を左から右に行くほど、金利リスクである縦軸の値が大きいという結果となりました。一番左が大体0.6%、0.7%、右側が1.2%で、その金利リスクの値としては150から300と大体2倍程度違うということで、そこそこの傾きであることが分かります。

これを見てもよく分からないという感じですが、この後に続く次の章で、この仕組みについてご紹介して、考察を行っていきたいと思います。

アウトライン

1. 背景および目的
2. 金利モデルの概要
3. DNSモデルの構造
4. キャリブレーション
5. リスク計測
6. 数値実験
7. 考察

金利モデル

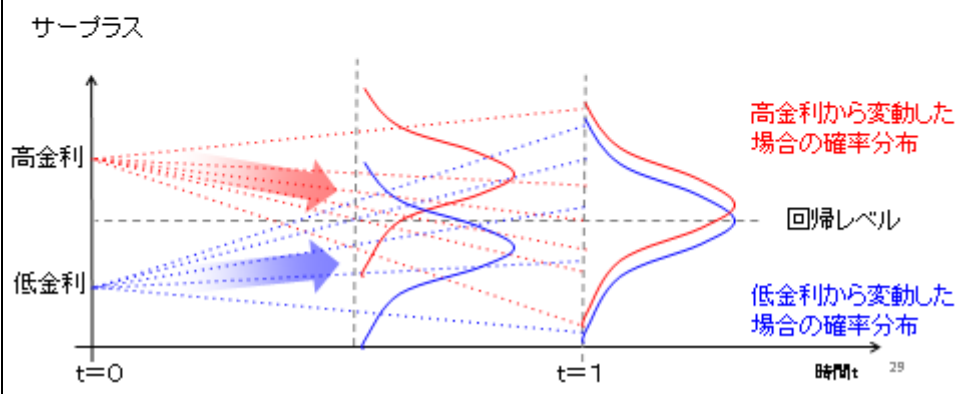
金利リスク

では、最後の第7章「考察」です。先ほど数値実験をしましたが、その得られた結果について考察を行います。

7. 考察

平均回帰性がある場合:

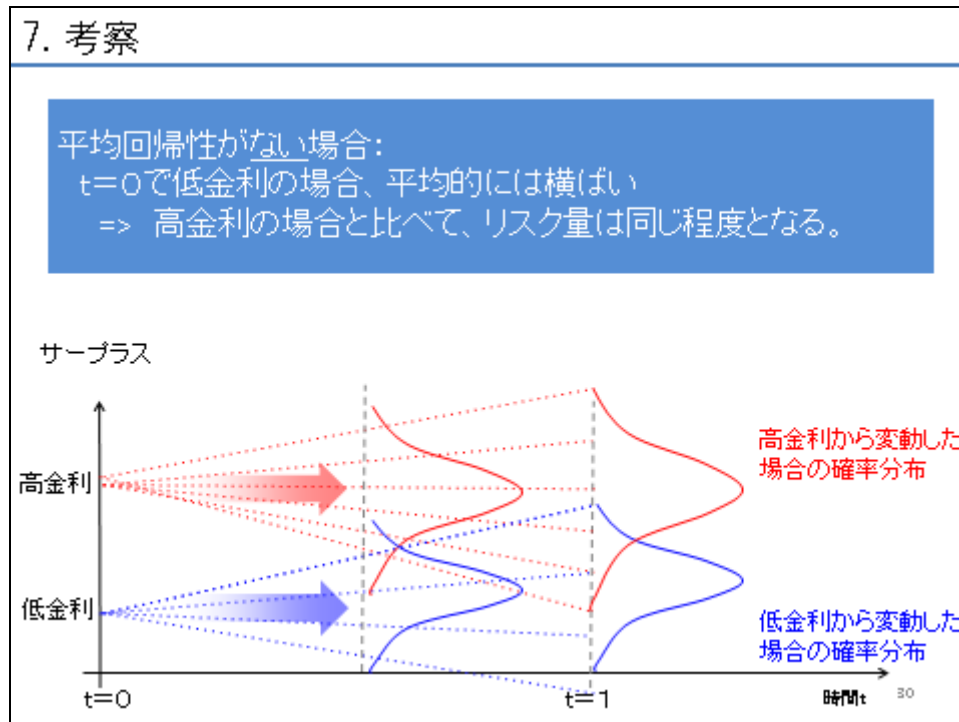
$t=0$ で低金利の場合、平均的には回帰レベルまで上昇
=> 高金利の場合と比べて、リスク量は小さくなる。



直接的な考察に入る前に、このページと次の30ページめで、平均回帰性がある場合とない場合とで将来のサープラスがどのようなようになるかを、まず、お話しいたします。

まず、このページは、平均回帰性がある場合です。下のグラフを見ますと、横軸は時間軸 t で、縦軸はサープラスです。左の $t=0$ で、高金利と低金利がありますが、先ほどお話しした通り、金利が低い方がサープラスは低いということ、このような位置関係となっております。例えば、 $t=0$ で低金利の下の

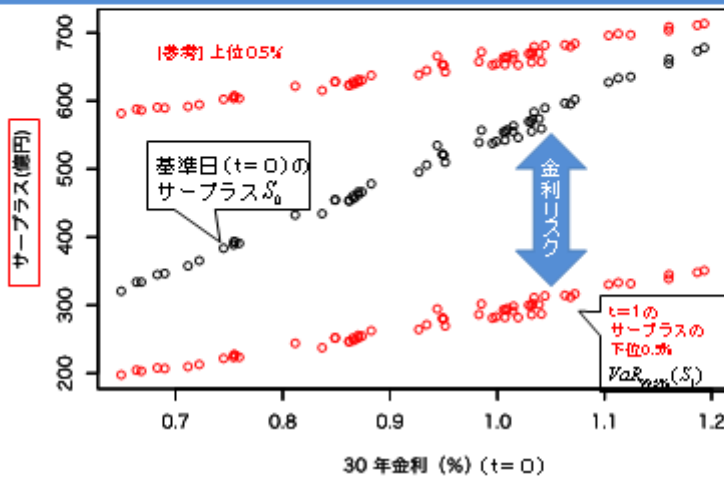
方で始まった場合、将来に向かって、右に行くに従って、サープラスの確率分布が、じわじわと回帰レベルに向かって上がっていきま。リスク量は、「 $S_0 - S_1$ 」なので、この平均回帰性の影響によって、減る方向に働きます。今度は逆に、 $t = 0$ 、高金利から始まった場合、時間が進むと、回帰レベルに近づいていくのでサープラスは平均的には下がっていくということで、リスク量は増える方向に働きます。これが、平均回帰性がある場合です。



次に、平均回帰性がない場合です。ほとんど先ほどと同じ図なのですが、違うものとしては、平均回帰性水準の点線が、先ほどあったものが、今回はありません。同じように、左側の $t = 0$ を低金利から始めていった場合、先ほどとは違って、将来に向かってサープラスの確率分布は上がっていかず、ほぼ横ばいです。逆に、 $t = 0$ で高金利の場合も同じです。リスク量は、「 $S_0 - S_1$ 」で、 $t = 0$ がどの水準から始まったとしても、リスク量は、それほど変わらないのではないか、ということが予測できます。

7. 考察

- ① 初期($t=0$)の金利環境は同時点のサープラスに影響
- ② 時間の経過に伴い($t=1$)、平均回帰性により金利・サープラスは定常的な分布に近づき、初期の金利環境の影響は小さくなる。(傾きが小さくなる)
=> 初期($t=0$)の金利水準が高いほど、下落幅が大きくなる。



31 ページめですけれども、このグラフが少し複雑なので、まずグラフのご説明をいたします。先ほど第6章の27 ページでご説明したグラフと横軸は一緒で、足元 ($t=0$) の金利の代表選手として30年金利を採用して、持ってきています。それが横軸で、縦軸は、今、第7章でご説明したサープラス。先ほどの第6章ではリスク量だったのですが、リスク量は、サープラスの引き算。今回は、その引き算をする前のサープラスを縦軸に持ってきています。

左から右に伸びていく「○」が3種類あるのですが、まず真ん中が S_0 で、足元、基準日のサープラスです。上の赤い「○」が、参考として上位0.5%の S_1 で、1年後のサープラスのうち、1万回シミュレーションをして50番めに良いシナリオの結果をプロットしています。一番下のグラフの「○」は今度、逆に、下位0.5%ということで、こちらも1年後のサープラスで悪い50番めの結果をプロットしています。

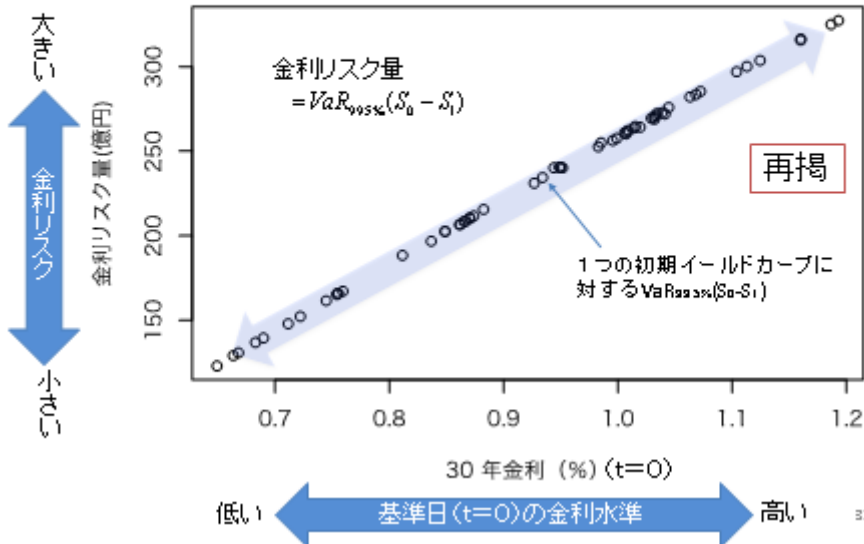
それから、グラフの少し右側に矢印が伸びていて、「金利リスク」と書いてあるのですが、先ほど第6章でお見せした27 ページめのグラフ。実は、この次のスライドにも載せているのですが、この金利リスク量は、31 ページめに戻りますけれども、この真ん中の丸い S_0 の「○」と下の S_1 の「○」の差額だったことが分かります。

上に書かれている説明書きですが、「①初期 ($t=0$) の金利環境は同時点のサープラスに影響」ということで、これは、真ん中の S_0 の「○」の傾きが、まあまあ傾いていることに対応しています。そして、上の「②」ですけれども、「時間の経過に伴い」、つまり1年後、「平均回帰性により金利あるいはサープラスは定常的な分布に近づき、初期の金利環境の影響は小さくなる。(傾きが小さくなる)」ということで、これは、グラフの、例えば一番下の「○」は S_1 の下位0.5%ですけれども、 S_0 に比べて、傾きがだいぶ小さくなっていることに対応します。

それで、一番上の矢印が飛んでいます、「初期 ($t=0$) の金利水準が高いほど、下落幅が大きくなる」ということで、つまり、平均回帰性があることによって、この S_0 の真ん中の「○」と S_1 の下の「○」の傾きの差が大きくなって、 S_0 と S_1 の差額であるリスク量も右に行くほど大きくなることがうかがえます。

7. 考察(「6.数値実験:結果」の再掲)

基準日(t=0)の金利水準が高いほど、金利リスク量大きい
という結果が得られた。



そのようなことで、27 ページめの第 6 章のものを再び載せていますが、基準日 (t = 0) の金利水準が高いほど、金利リスク量が大きい、という結果が得られたことが分かります。

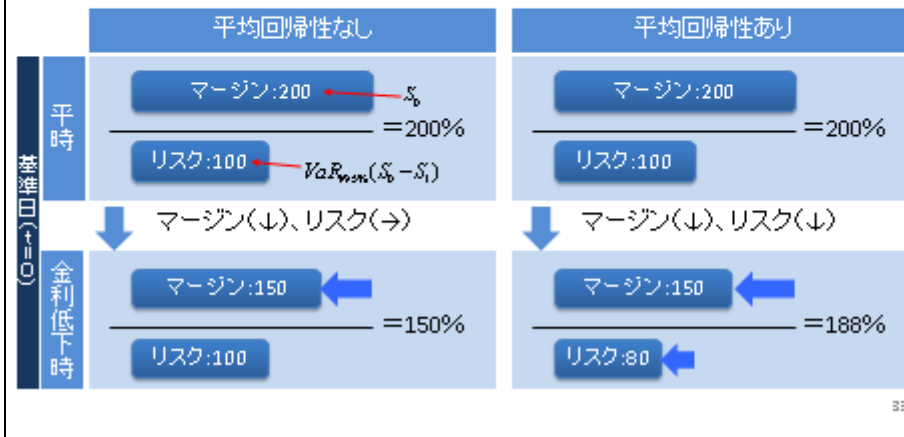
若干時間があるので、もう一つご説明することとして、お手持ちの資料がある方は 13 ページめを見ていただきたいのですが、13 ページめに、Vasicek モデルの「 κ 」というパラメータがございまして、回帰速度という話を先ほどいたしました。回帰速度は、速く回帰するか、遅く回帰するか、というパラメータです。こちらについて、本研究ではあまり触れていないのですが、もし、 κ (回帰速度) を大きくしたらどうなるかと言いますと、例えば、 κ をとても大きな値にしますと、t = 0 の金利水準がどこから始まっても、時間が少し動くだけで、一瞬で回帰レベルまで回帰することが想定されます。そうすると、 κ が大きい場合の t = 1 のサープラスを考えた場合、1 年後のサープラスは、足元の金利水準には全く影響されないはずで

そのようなことで、もし κ がとても大きな値の場合は、この 31 ページめですが、t = 1 のサープラスのグラフは傾きが完全になくなる。傾きが 0 になって、水平になることが想像できます。逆に、 κ を、今、大きくした場合ですが、 κ を 0 に非常に近づけますと、回帰水準に全然到達しない。ほぼ回帰レベルまで回帰しないので、この S_1 の傾きが、どんどん大きくなる。ということで、13 ページめの κ 、14 ページめでもよいのですが、 κ 、回帰速度というパラメータは、この 31 ページめのグラフで言いますと、下の S_1 のグラフの傾きをコントロールしているということが言えます。

7. 考察

- 金利の平均回帰性がある場合：
 - ✓ 金利低下時にマージンとリスクが共に減少するため、ics比率は安定
 - ✓ ics比率低下に伴う資産の投げ売りによる、市場環境のさらなる悪化の抑制(プロシクリカリティの抑制)が期待できる

(※)簡単のため、マージン=サープラスとした。



それで、すみません。33 ページめに飛びまして。もう一つ分析を行ったのですが、これまでは金利リスク量で、リスクのお話をしましたが、サープラス、マージンも含めた比率についても考察を行いましたので、簡単にご説明いたします。左と右のケースについて、それぞれ、これは、サープラス、マージンを分子に持ってきて、リスクを分母に持ってきて、比率を計算しています。これは「ICS比率」と呼ばれるもので、「ESR」などと言ったりもします。左と右で、平均回帰性がない場合と、ある場合を考えています。あとは、上と下で、上は平時、通常の場合、下は金利低下時ということで、金利が平時と比べて低い場合を考えています。

まず、分子のマージンの動きを上から下に見てみますと、左も右も、つまり平均回帰性がある場合もない場合も、下の場合、金利低下時の場合は、マージンが 200 から 150 に減少しています。

これに対して、分母のリスク量ですが、こちらは、まず、左の平均回帰性がないケースでは、今までの第7章の議論によって、平時と金利低下時で足元の金利水準が違ったとしても、平均回帰性がない場合はリスクにはほぼ影響しないということをお話ししましたので、リスクは 100 のままだと言うことができます。一方で、右の平均回帰性がある場合ですが、こちらは、 $t = 0$ の足元で金利が低下している場合は、リスク量も減ることになります。

左と右で、それぞれ比率を計算しますと、左の平均回帰性がない場合では、200%から150%にまで減っています。一方で、右側の平均回帰性がある場合については、同じ200%からスタートして188%までしか減らないということで、先ほどの平均回帰性がない左の場合よりも比率が安定する、下がり幅が少ないことが分かります。

そのようなことで、上に書かれていることですが、金利の平均回帰性がある場合は、まず一つめとして、金利低下時にマージンとリスクが共に減少するため、ICS比率が安定します。それに加えた間接的な効果としましては、もしICS比率が低下して、例えば、資産を投げ売りせざるを得ず、それによって市場環境がもっと悪化してしまう。このような悪循環を「プロシクリカリティ」といいますが、この抑制が期待できます。

7. 考察

本研究の結論

- DNSモデルにおける平均回帰性の前提が、金利リスク量やICS比率に比較的大きな影響を与えうることが示唆された。

(!)モデルリスクの存在

- モデルの平均回帰性が市場の実態よりも強すぎると、実質的な健全性が悪化した際に、余力があるように評価されてしまう。

34

そのようなことで、本研究の結論ですけれども、DNSモデルにおける平均回帰性の前提が、金利リスク量あるいはICS比率に比較的大きな影響を与えうることが示唆されました。ただし、平均回帰性には注意すべき点もございまして、下に少し書いてあるのですが、モデルの平均回帰性が市場の実態より強すぎると、実質的な健全性が悪化したときに、余力があるように評価されてしまう。もし、平均回帰性が実態よりも大きすぎる場合、つまり、比率を安定させる度合いが過度に大きい場合ですが、本当は、その会社は健全ではないにもかかわらず、ICS比率だけを見ると健全に見えてしまう。つまり、余力があるように見えてしまう、という点には注意が必要だと思います。

そのようなことで、以上のこの発表で伝えたいメッセージですけれども、「DNSモデルについて、平均回帰性が金利リスクやICS比率に与える影響には気をつけましょう」ということです。

以上となります。ご清聴ありがとうございました。

司会 ありがとうございました。かなりお時間が終了に近づいているのですが、ご質問等があれば、お受けいたします。

質問者 ありがとうございました。Nelson-Siegelの性質について、いろいろな角度から勉強させていただきました。また、Nelson-SiegelとVasicekの関係も、よく分かりました。

それで、今回、回帰性という問題と、もう一つ、終局金利をお使いになっているのですけれども、回帰性と終局金利の関係は、どのように考えたらよいか一つと、今回の実験で、終局金利を3.5%に設定せず、そのような人工的なものを置かなかったようなときに、どのような結果になるだろうかと思ったのですけれども、その辺は何か検証されましたか？

権 まずは、ご質問いただき、ありがとうございます。

平均回帰性と終局金利の関係というお話だったと思うのですが、考察は、実は、しておりませんで……。

この3.5%のことだと思えるのですけれども、平均回帰性ですね？

質問者 最後の参考資料によりますと、回帰するところは1.1%。

権 1.1%。この回帰水準の値によって、実際どれくらいのスピードで回帰するかについては、ちょっと知識がございませんので、何も答えられないという状況です。申し訳ございません。

ただ、今後、まだ投資理論委員会が引き続き行われますので、今いただいた宿題に関しては、また研究を進めていきたいと思っています。ありがとうございます。

司会 それでは、お時間になりましたので、以上をもちまして、セッションF、投資理論委員会の「金利リスクおよび信用リスク分析」について、終了いたしたいと思います。永井さん、権さん、発表ありがとうございました。お二人に、今一度、大きな拍手をお願いいたします。