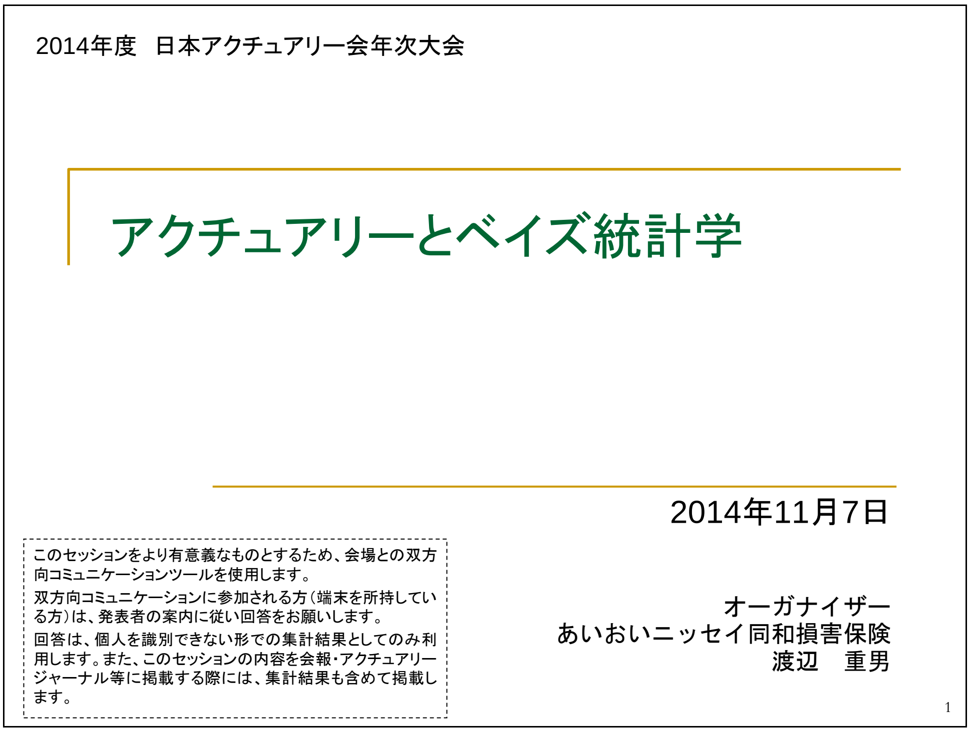
アクチュアリーとベイズ統計学

オーガナイザー
あいおいニッセイ同和損害保険　渡辺 重男
パネリスト
電力中央研究所　桐本 順広
ミリマン・インク　出井 基晴
岩沢 宏和

【渡辺】　「アクチュアリーとベイズ統計学」というタイトルで、パネルディスカッションを始めたいと思います。司会の渡辺です。よろしくお願いいたします。



最初に、皆さんにお願いしたいことがございます。そこに書いてあるかと思いますけれども、このセッションでは双方向コミュニケーションツールを使うことにしておりますので、皆さん、端末がお手元にある方は、ぜひ積極的な参加をお願いいたします。具体的には、パネルの冒頭と最後に、私から幾つか皆さんに質問をさせていただきます。そのときに「ボタンを押してください」と私が言いますので、そのあとで、それぞれ端末を持っている方はボタンを押していただくようにお願いします。合図の前に押してしまうと集計されませんので、そこはよろしくお願いします。結果は集計されてスライドに出てきますので、それをご覧いただくことができます。また、後日、この発表内容をまとめて、年次大会報告集という形でアクチュアリー会のサイトに掲載することになるかと思いますけれども、その際に集計結果が入ったスライドを載せることになるかと思いますので、ご承知おきください。

はじめに

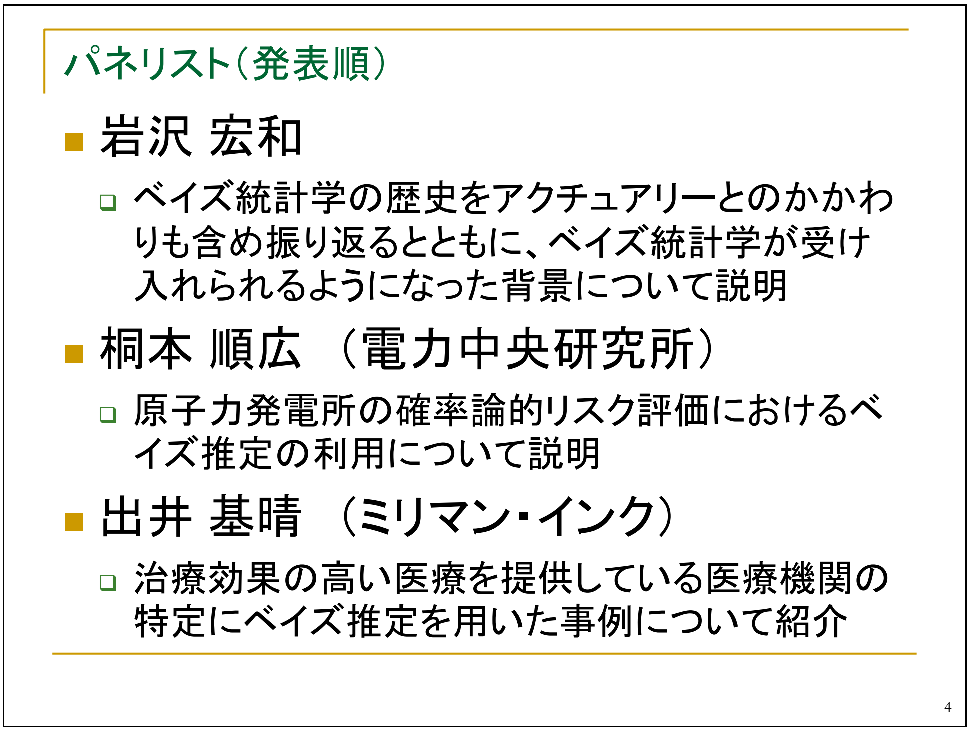
2

当パネルのテーマ

- アクチュアリーはベイズ的手法を使っているのか？
使っていないとしたらなぜか？
- 保険・年金分野以外の領域はどのような使われ方をしているのか？
- アクチュアリーは今後ベイズ的手法に対しどう向き合うのか？

3

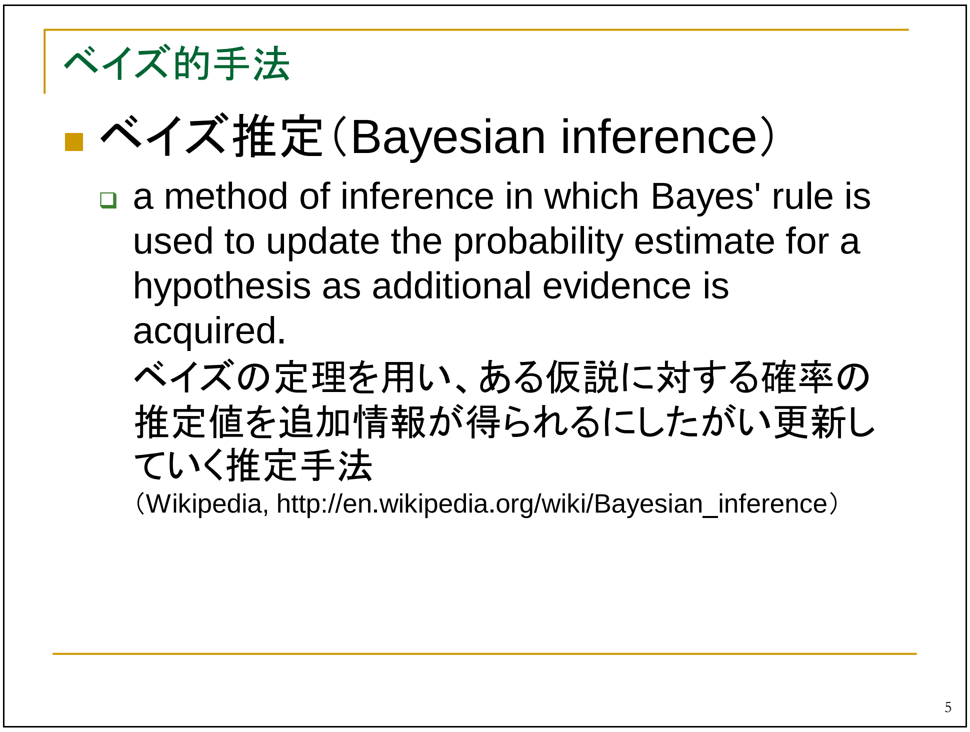
それでは、本題に入ります。最初に、このパネルのテーマを確認したいと思います。プログラムにも書いてあったかと思いますけれども、以下の３点が、このパネルのテーマです。アクチュアリーはベイズ的手法を使っているのかどうか、使っていないとしたら、なぜなのか。保険年金分野以外の領域では、どのような使われ方をしているのだろうか。それから、アクチュアリーは今後ベイズ的手法に対して、どのように向き合っていくのか。このようなところについて、会場の皆さんへの質問や、パネリストの方からの発表、あるいはディスカッションを通じて、その答えを見いだしていこうということが、このパネルのテーマです。



続いて、発表いただくパネリストの方をご紹介したいと思います。最初に発表していただく方は、岩沢さんです。岩沢さんは、アクチュアリー講座の損保数理の講師も長く務められていますので、ご存じの方も多いかと思います。損保数理に関する著書も多数執筆されておりまして、損保数理に関して大変高い見識をお持ちの方です。そのようなバックグラウンドをお持ちの岩沢さんに、まずはベイズ統計学の歴史を、特にアクチュアリーとのかかわりというところにスポットを当てて振り返っていただくととともに、ベイズ統計学が世の中に広く受け入れられるようになった背景について、説明をお願いしたいと思います。

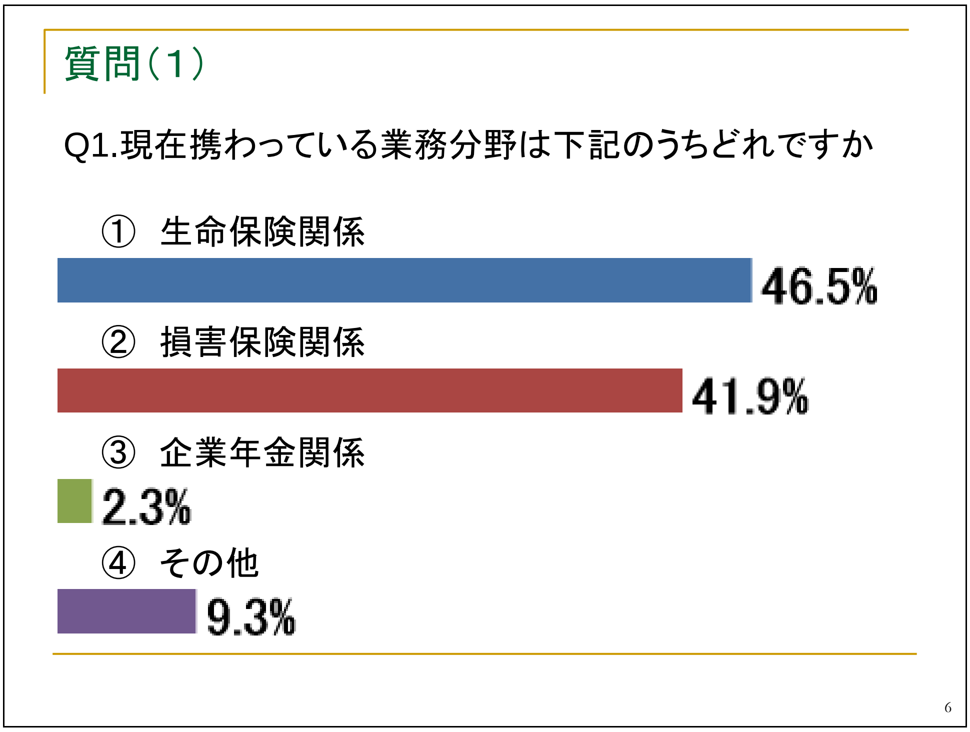
続いて、桐本さんです。桐本さんは、原子力発電所の確率論的リスク評価という分野、「ＰＲＡ」というそうなのですけれども、ここで 20 年ぐらいのご経験をお持ちです。そのような経験をお持ちの桐本さんに、ＰＲＡでのベイズ推定の利用について、ご紹介いただきたいと思っております。

それから３番め、出井さんです。出井さんは、コンサルティング・アクチュアリーとして、業務の中で実際にベイズ的手法を使っている事例について紹介していただきたいと考えております。



早速ですが、会場の皆さんに質問させていただきたいと思います。その前に、質問の中でもそうですし、ディスカッションの中でも、「ベイズ的手法」や「ベイズ推定」という言葉が出てきますので、まずはその意味合いをはっきりさせていきたいと思います。いろいろ定義のしかたはあろうかと思いますけれども、ウィキペディアの「ベイズ推定」という項目によさそうな定義がありましたので、ここに挙げさせていただいております。「ベイズの定理を使って、ある仮説に対する確率の推定値を追加情報が得られるに従い更新していく推定手法」と訳していますけれども、このような意味合いで、まずは使っていきたいと思います。発表者の中には、これとは違う意味で使う方もいるかもしれませんけれども、私からの質問では、この意味で使います。

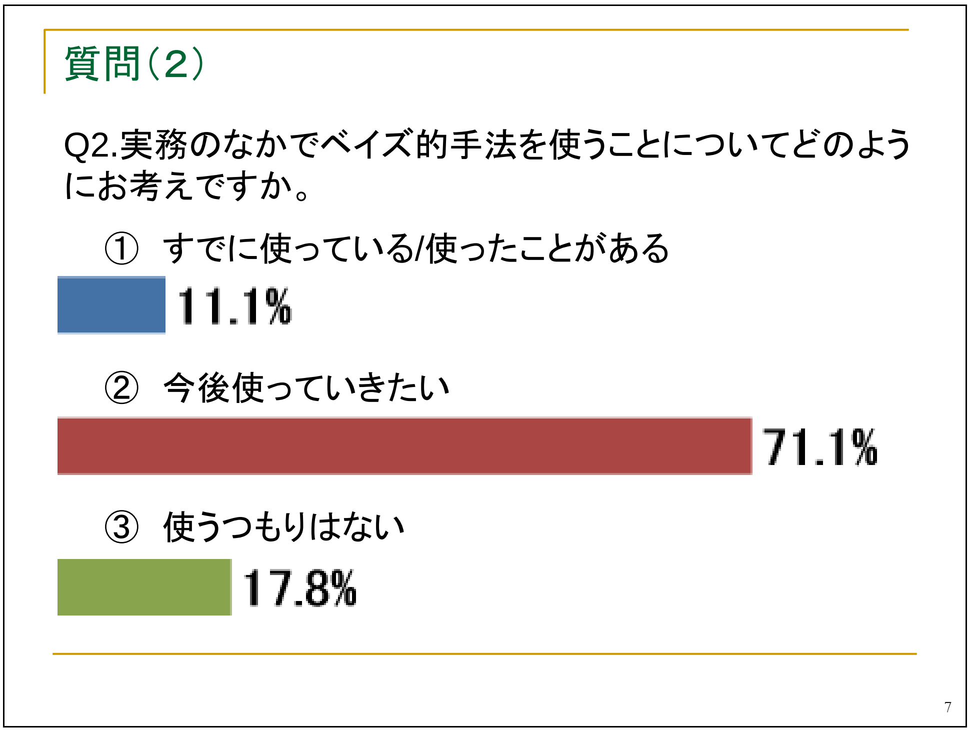
それでは、まず１つめの質問です。ベイズについて確認させていただく前に、まずは母集団の特徴を確認したいと思いますので、皆さん、現在携わっている業務分野について、お答えください。会社ではなくて業務分野ですので、コンサルタントなどで、会社としては保険会社ではないという方でも、どの業務を扱っているかというところで、ご判断いただければと思います。それでは、ボタンを押してください。



（①20、②18、③1、④4、計 43）

はい、これで締め切らせていただきます。意外ですね。損保関係の方が多いかと思いましたが、生保の方が、結構といいますか、一番多いという状態ですね。はい、ありがとうございます。

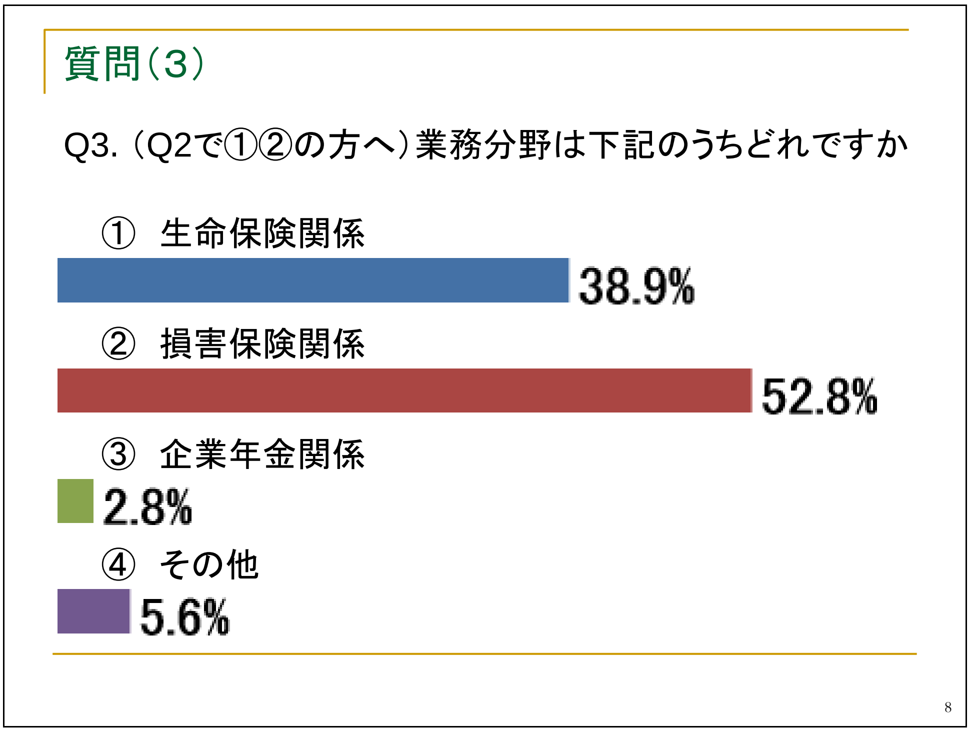
それでは、ここからが本題ですね。２つめの質問です。業務の中で、ベイズ的手法を使うことについて、今どのようにお考えでしょうか。それでは、ボタンを押してください。



（①5、②32、③8、計 45）

はい、これで締め切らせていただきます。「今後使っていきたい」という方が、一番多いということですね。これでこそ、このパネルディスカッションをやらせていただく意義があるかと思います。全員が①だったら、どうしようかと思っていたところなのですけれども、このまま進めさせていただきます。

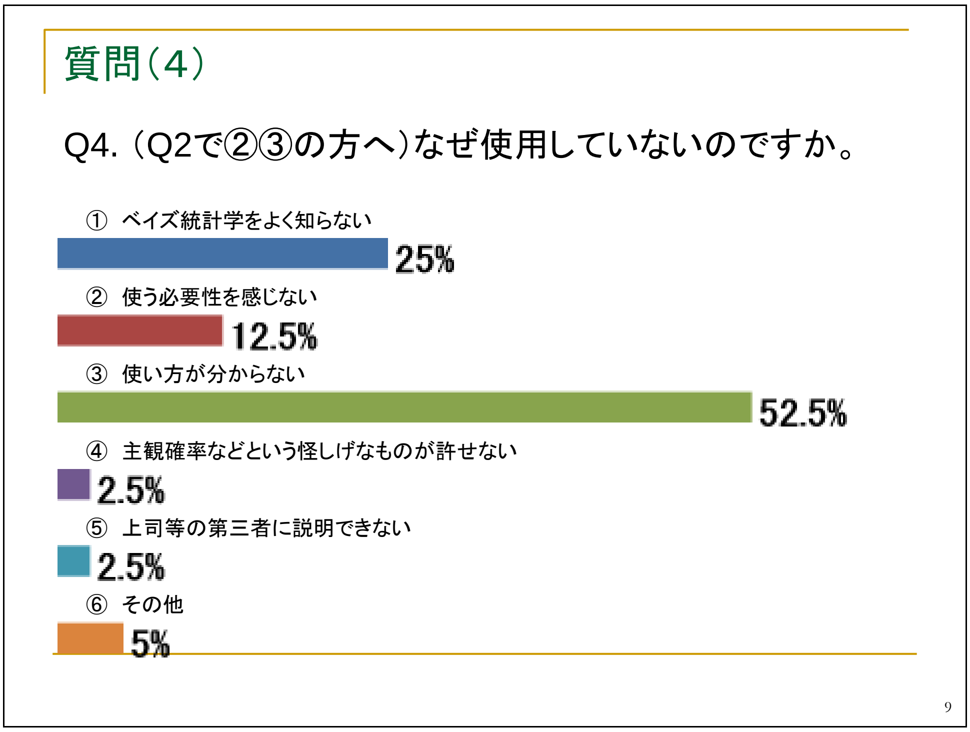
それでは、３番めの質問です。この質問は、先ほどの質問で「既に使っている」「使ったことがある」「今後使っていきたい」とお考えになっている方に対して、お聞きします。中身は、１番めの質問と同じです。業務分野はどれに当たりますか。それでは、ボタンを押してください。



（①14、②19、③1、④2、計 36）

はい、よろしいでしょうか。「使っていきたい」という方では、損害保険の方が多いということですかね。生保の方は、会場にはたくさんいらっしゃいますけれども、「使うつもりは今のところない」ということですね。これが、終わったあとでどのように変わっているかというところが、われわれの腕の見せどころというところかと思います。

それでは、前半最後の質問です。今度は２番めの質問で、「今後使っていきたい」「使うつもりがない」とお答えいただいた方への質問です。その理由は何でしょうか。それでは、ボタンを押してください。



（①10、②5、③21、④1、⑤1、⑥2、計 40）

それでは、これで締め切らせていただきます。「使い方が分からない」という方が一番多いということですね。ご安心ください。使い方は、多分お帰りになる頃には、ばっちり分かっているかと思います。

ということで、ある意味、私どもが期待したとおりの結果を頂いたわけで、非常に心強く思っておりますけれども、ここでようやく本題、メイン・コンテンツです。パネリストの皆さんからの発表に移りたいと思います。それでは、最初に岩沢さん、よろしくお願いします。

【岩沢】　紹介いただきました、岩沢です。どうぞよろしくお願いいたします。今日は３人のパネリストがおりますが、私はあくまでも前振りということでお話をして、細かいテクニカルといいますか、中身の話、使い方が分からないということへの答えは、むしろお二方のお話になります。私の役目としては、少し歴史的な話と一般的な理屈の話をして、まずは抽象的なレベルでモチベーションを高めていただいて、「おお、なるほど。誤解をしていたけれども、ベイズ統計学、使えそうではないか」となっていただきたいと思っています。

目次

1

中身としましては、まず、ベイズ統計学の歴史。それから、アクチュアリーとベイズ統計学。ベイズ統計学の歴史においてアクチュアリーはかなり活躍しているという話です。それから、主観確率に関する話。かつて「ベイジアン」と呼ばれる人たちがかなり強硬に主観確率を強調していた時代があって、そのためにそのころにベイズ統計学に対して持たれた偏見がいまだに引きずられているところがあります。そこで、主観確率を強調しないベイズ統計学について、お話をします。それから、最近、広くベイズ統計学が使われるようになってきた大きな理由にコンピューターの発達がありますので、その話もいたします。

じつは私が９月に出した『世界を変えた確率と統計のからくり』という本がありまして、今日の話の一部の種本になっています。ベイズ統計学を含めた統計学の歴史について興味がある方は、ぜひ参考にしていただければと思います。

1　ベイズ統計学の歴史

1.1　ここでいう「ベイズ統計学」

未知母数を（未知の定数ではなく）確率変数として捉えることによって統計的推測を行う統計学.

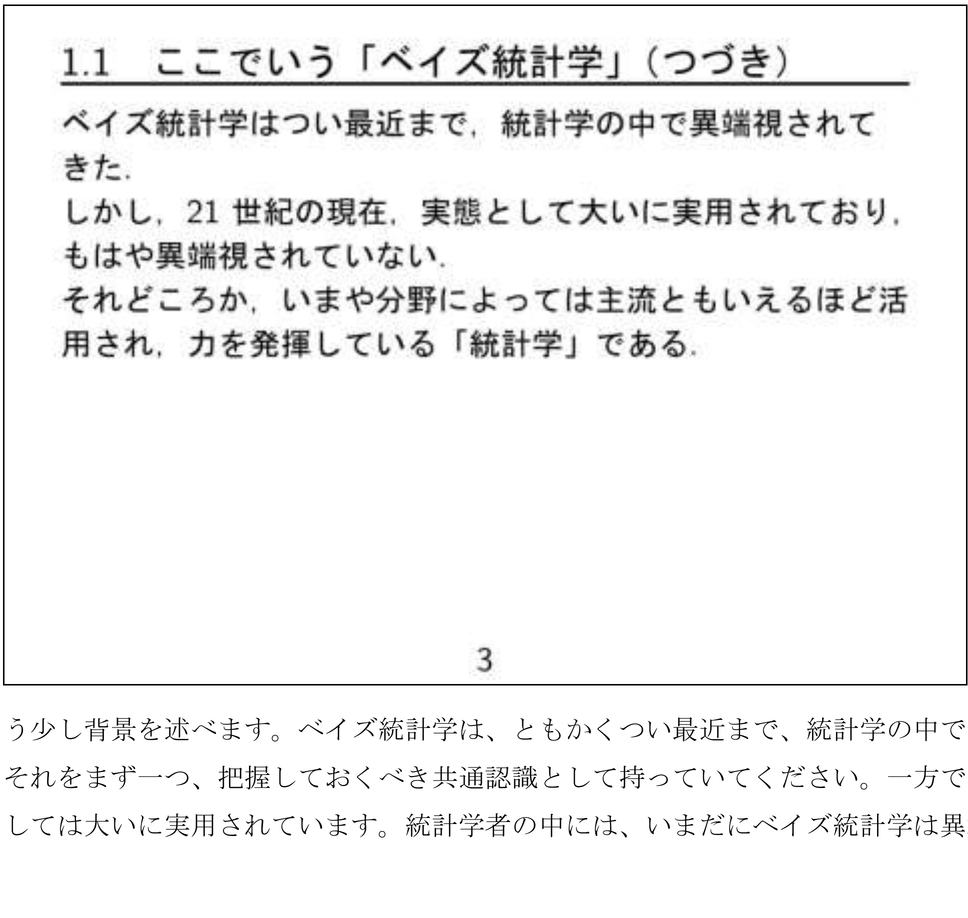
- 未知母数が従う分布を**事前分布**という.
- 得られた観測値をもとに事前分布を更新して作った分布を**事後分布**という.
- そうした分布の更新の際にベイズの定理を使うので「ベイズ」という名が冠される.
- 主観確率という考えを伴わないものも「ベイズ統計学」という.

2

さて中身ですが、最初はベイズ統計学の歴史のお話をします。その際に用いる「ベイズ統計学」とは何のことなのかを、スライドに簡単に整理しておきました。既に目次のところで少し示唆しましたが、「主観確率」という言葉は前面に出さないで「ベイズ統計学」を定義しています。

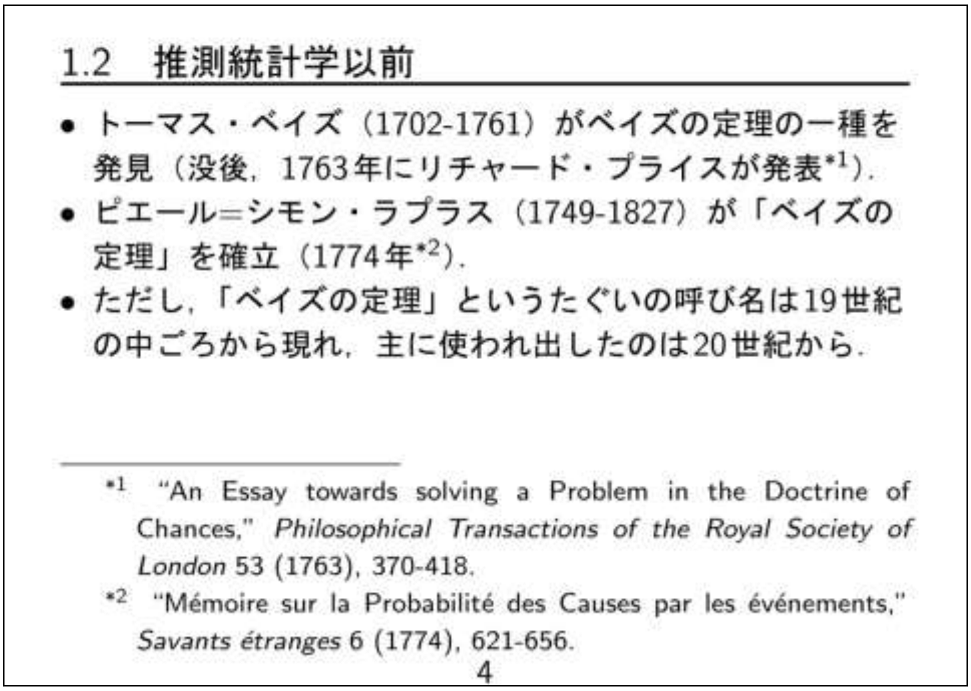
本当にまったく予備知識がないとしたらこれだけ見てもよく分からないかもしれないですが、私なりにベイズ統計学をどのように定義するかを表現しています。統計学においては、母集団を考え、その「未知母数を推定する」といったことが典型的な課題です。この未知母数を、代表的な統計学であるネイマン・ピアソン流の統計学では、「未知の定数」だと考えます。分からないものだけれども、それはあくまでも単なる数です。あるいは、正確にはベクトルかもしれないですが、まあ数の一種です。これに対し、未知母数を確率変数として捉えることにしてみます。すると、同じように「未知母数」と呼ぶとしても、存在物としてはかなり違うものとなります。このように未知母数を確率変数として捉えることによって統計的推測を行う統計学のことを、「ベイズ統計学」と呼ぶ。それだけのことだということで、ベイズ統計学を捉えることとします。

ただ、そうは言っても、ベイズ統計学には歴史がありますから、言葉遣いやテクニカルタームは、ある程度は歴史にのっとった形で幾つかは使うことにします。代表的なものを挙げておきますと、未知母数はともかく確率変数ですから、それは何らかの分布に従うということで、その分布を「事前分布」といいます。得られた観測値をもとに、事前分布を「更新」して作った分布を「事後分布」といいます。そうした分布の更新の際にベイズの定理を使います。実はそのことが、「ベイズ統計学」「ベイジアン」「ベイズ流」など「ベイズ」という名前が使われる理由です。つまり「ベイズ統計学」とは、18 世紀の人トーマス・ベイズが作った統計学のことではなく、ベイズの定理を使う統計学のことです。そして、既に言いましたけれども、主観確率という考えを伴わないものもここでは「ベイズ統計学」と言います。この点はむしろ、従来のベイズ統計学をある程度知っている方はご注意ください。ベイズ統計学の入門書などを見ると、いまでも主観確率ありきで説明している本は多いかと思いますが、ここではそうではないということです。



さらに、もう少し背景を述べます。ベイズ統計学は、ともかくつい最近まで、統計学の中では異端視されてきました。それをまず一つ、把握しておくべき共通認識として持っていてください。一方で、現在は少なくとも実態としては大いに実用されています。統計学者の中には、いまだにベイズ統計学は異端的だと思っ

ている方もいらっしゃるかもしれないですが、ともかく実態としては大いに使われていて、その意味では、事実として異端視されていないということです。それどころか、分野によっては、むしろ主流といえるほど活用されて、力を発揮している統計学です。この点に鑑みると、統計学を、専門と申しますか、少なくとも強力な武器として持っているはずのアクチュアリーが、なぜベイズ統計学をさほど使っていないのか、という疑問が浮かぶ。それくらい他の分野では大いに使われている統計学だということを、最初にメッセージとしてお伝えしておきます。



次に、統計学の始まりということで、少し簡単に、ここはさらりと行きますけれども、歴史についてお話しします。ベイズは 18 世紀の人と申し上げましたが、トーマス・ベイズ、1702～1761 年ですね。彼がベイズの定理の一種を発見したという歴史があります。ただし、ベイズの定理を誰が作ったかといいますと、多分ラプラスだというべきで、それは 1774 年の頃です。いずれにせよ、今の推測統計学、統計学ができるずっと前に、ベイズの定理ができたということです。スライドの「ただし」のところは、雑学的な知識なので重要ではないですが、歴史上は比較的最近ともいえる 19 世紀の中頃から「ベイズの定理」という名前は使われるようになりました。それが統計学以前の「ベイズ」という言葉の登場です。

補足：ベイズの定理

古典的なベイズの定理の表現では，$A_1, A_2, \ldots$ が全事象の分割であるとき，

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_k P(B|A_k)P(A_k)}$$

という形で表される．

これに対し，ベイズの定理をベイズ統計学で用いるときは，（1次元のデータの場合であれば）得られた観測値を $x_1, \ldots, x_n$ とし，未知母数を Θ とすると，

$$f_{\Theta|\mathbf{X}}(\theta|x_1, \ldots, x_n) \propto f_{\mathbf{X}|\Theta}(x_1, \ldots, x_n|\theta) f_\Theta(\theta)$$

という形で表される．

5

ここは「ベイズの定理」について、一応書きました。確率論でベイズの定理、例えばアクリュアリーの試験でもベイズの定理は出ますが、その場合には、少し抽象的に書きましたが、この上から３行めに書いてあるような形で、ベイズの定理を習います。けれども、ベイズ統計学の場合は、計算上、この分母の部分は面倒なので、実際の手法で使うときは、下から２行めに出ているような、細かい記号の説明は省略しますけれども、おおよそこのようなものを使う。条件付き確率密度と確率密度の積のようなものが、右辺に出る。このαのような、∞のでき損ないのような記号（∝）は比例記号でして、左辺は右辺に比例するという、この比例関係だけで実際の計算には十分なのです。あとで、他の方の話でも、ベイズの定理が出てくるときに、見た目はこの下のほうのような形で登場する場合がありますので、もし上の形しか知らない方は一応認識しておいてください。

1.3　推測統計学の3大立役者

カール・ピアソン（1857-1936），ロナルド・フィッシャー（1890-1962），イェジー・ネイマン（1894-1981）

- 統計的検定の先駆けとなるカイ2乗検定（カール・ピアソン，1900年）
- 最尤法の理論的基礎づけ（フィッシャー，1922年）
- 『研究者のための統計的方法』（フィッシャー，初版1925年，14版1970年）
- 信頼区間の考え方（ネイマンら，1928年．「信頼区間」という用語は1934年）
- ネイマン＝ピアソンの補題（ネイマンら，1933年）

3人はずっと「ベイズ統計学」を排撃し続けた．

6

その次です。いよいよ統計学です。これは、一応教科書的にいえば、いわゆる統計学、推測統計学です。1900 年ぐらいに生まれたと考えられるものですが、20 世紀前半に一気に発展し、そしてほぼ完成したものです。誰が偉かったか、といいますか、立役者は誰だったか３人挙げろというならば、この３人でしょう。カール・ピアソン、ロナルド・フィッシャー、イェジ・ネイマン、この３人が作ったといえると思います。もし３人だけ挙げればですよ。他にも、もちろん活躍した人は何人もいるわけですが。

さて、ここで少し年表風に挙げている中で、統計的検定の先駆けとなるカイ二乗検定はカール・ピアソンが 1900 年に発表しています。これは、イアン・ハッキングという哲学者に言わせると、「1900 年以降の人類の 20 大発明のうちの一つ」に挙げられる大発明であって、推測統計学の先駆けになっています。それから、フィッシャーです。最尤法があり、推測統計学の初めての教科書と呼ばれる『研究者のための統計的方法』が 1925 年。ネイマンらによる信頼区間の考え方は 1930 年ぐらいです。そしてネイマン・ピアソンの補題。これは象徴的に挙げているわけですが、皆さんご存じの仮説検定がほぼ完成した時期がまあこの頃だということです。

このスライドでは二つ押さえておいてほしいのですが、20 世紀の前半に推測統計学というものができあがったということが１点。もう一つは、ここには言葉で書いてあるだけですが、この三大立役者がそろってベイズ統計学的なものを排撃し続けたということです。ベイズ的な要素があるものは、「これはけしからん」と、３人が３人そろって攻撃したのが史実です。そして、もしかしたら今もその影響は、ベイズ統計学への偏見として残っているかもしれません。

1.4　ベイズ統計学の基礎づけ

20世紀前半に，ハロルド・ジェフリーズ（1891-1989）やブルーノ・デ・フィネッティ（1906-1985）の先駆的な仕事があるが，旧来の推測統計学に対抗してベイズ統計学を推進すべく敢然と立ち上がったのは何といってもレオナルド・ジミー・サヴェジ（1917-1971）であった．

ベイズ統計学の本格的な数学的基礎づけは，1954年にサヴェジが書いた本[*3]（第2版は1972年）で与えられた．

しかし，その後も，アカデミズムではベイズ統計学は長らく異端視されていた．

[*3] *The Foundations of Statistics*, 1954.

7

ではベイズ統計学のほうはどのように生まれたのか。このことに皆さんがどのぐらい興味を持つか分からないですが、軽く押さえておきます。20 世紀前半に、一応ベイズ統計学のもととなるようなものが、ジェフリーズやデ・フィネッティらによって考え出されました。このうち、デ・フィネッティは保険数学の専門家でもあったのでアクチュアリーと深く関係がありますが、そうした人が先駆的な仕事をしています。

ただ、推測統計学に対抗してベイズ統計学をやるのだ、ベイズ統計学こそ正しいのだと言った人は、サヴェッジです。この人が 1954 年に書いた本がありまして、非常に細かいことを言うと、この本を書いた時点では、まだ本人の立場もそこまで明確ではなかったので、ベイズ統計学の誕生年はもう少しあとかもしれな

いのですが、ともかく、サヴェッジがこの本を出してからしばらく経ってから、ベイズ統計学は推測統計学と真っ向から喧嘩をし始めたのです。以来アカデミズムでは、ベイズ統計学は長らく異端視されてきました。

この会場には、私よりも年代が上の方が、こう見ると何人もいらっしゃる一方、若い方もたくさんいらっしゃいますが、いずれにせよ、二十何年前の昔話をすれば、私がアクチュアリー会の基礎講座を受講していたとき、数学の授業の一つは統計学で、鈴木雪夫先生が、アクチュアリー試験とは一切関係ないのにベイズ統計学を教えてくれました。その時代というのは、その頃は私は知らなかったのですが、まだまだベイズ統計学は戦いの真っ最中でして、ですから鈴木雪夫先生も「戦い」の人だったのです。戦っていた。日本の中でも戦いがあった。そのような歴史があって、そしてそれは私でさえ知っているぐらいの最近の歴史ですから、アカデミズムにおける喧嘩の名残はいまだにあって、恐らくはかなり悪い印象で現在にまで伝わっていると思います。

1.5 アカデミズム外のベイズ統計学

アカデミズム外では，ベイズ統計学がかなり以前から市民権を得ていた分野がある．
そのあたりの事情は，
　シャロン・バーチュ・マグレイン著
　『異端の統計学ベイズ』（草思社，2013 年）
に詳しく載っている．

8

ではアカデミズム以外のベイズ統計学はどうだったのか、というお話をします。ベイズ統計学は、実際使えるものであり、今日その話をするわけですが、机上の理屈や、学者が何と言おうと使えるのです。それゆえアカデミズム外では、かなり以前から市民権を得ていた分野のようです。その辺りの事情は、去年出版された、日本語訳だと『異端の統計学ベイズ』という本があって、ただし元の本は 2011 年に出たのですが、それに詳しく出ていますので、もし興味があればそちらも参照していただければと思います。

1.5　アカデミズム外のベイズ統計学（つづき）

- 軍事機密としてのベイズ統計学
主に第２次世界大戦中，暗号解読をはじめとする軍事目的のためにベイズ統計学は大いに使われ，絶大な成果を収めていた．ただし，それは軍事機密であり，戦後も冷戦が続いたこともあり，ベイズ統計学の有用性は長い間，世間に知らされることはなかった．
- アクチュアリーたちによるベイズ統計学の利用
少ないデータを使って保険料を設定するためには，直接の観測値によらない事前情報を積極的に活用しないとどうしようもないので，アクチュアリーたちは自然とベイズ流の手法を採用していた．

9

同書の著者が強調することが二つありまして、一つは、軍事機密としてのベイズ統計学。これが実はあったのですね。英米の側の話ですけれども、第２次世界大戦中に暗号解読を行う。相手はドイツがメインですが、暗号はどんどん改良されていきます。そのとき、改良される前の事前情報はあります。でも、いま得られる暗号に関する直接のデータは非常に少ない。事前情報はあるけれどもデータは大変少ない、というときには、まさにベイズ統計学を使うのです。ただ、そこに使われているテクニックが優れていることは、暗号解読のためのテクニックですから、外には公表されないわけです。軍事機密だったのです。それ以外にも、砲弾がどこに落ちるかなどについてもベイズ統計学が大いに利用されました。これも、データが少ないところでどのように予測するかに関わることなのですが、いずれにせよ、これも全部軍事機密だった。それで、外には知られていなかった。でも、軍事の世界の中ではよく使われていたというのです。

2　アクチュアリーとベイズ統計学

2.1　ある地域の保険料を算出しようとしたとき

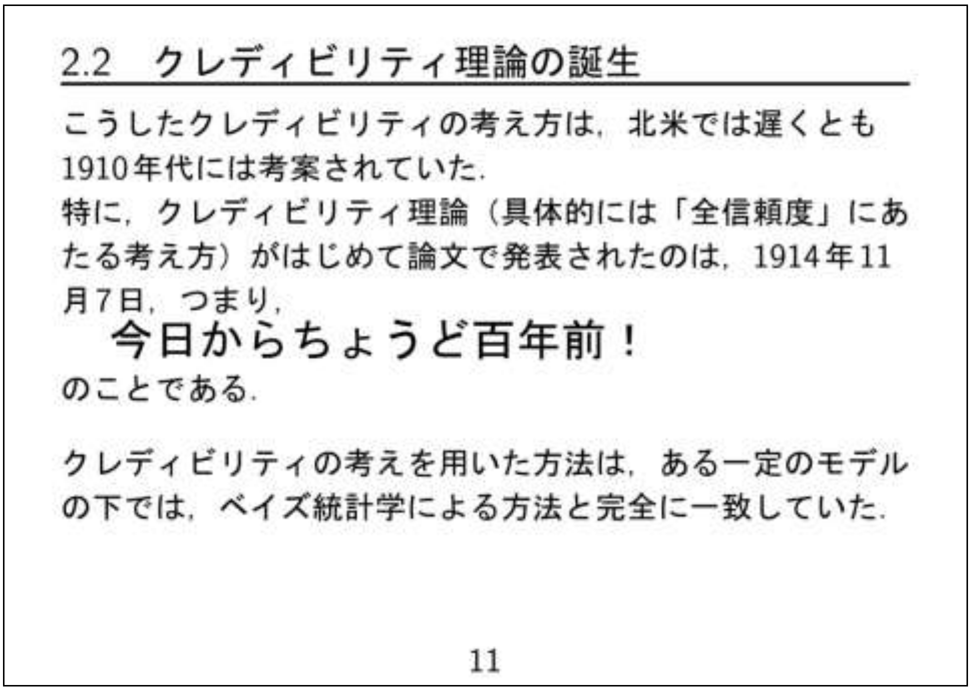
その地域の事故に関するデータがまったくない
⇒ 参考になりそうなほかの地域（あるいは，全国平均のようなもの）の数値を用いる

その地域のデータがほんのわずかだけ得られている
⇒ 数学的にうまい重みづけ（クレディビリティ）を考慮しながら，その地域の実績値と，参考にすべきほかの地域の実績値との間の何らかの数値を推定値として採用する

10

もう一つ。これはオープンな世界での話ですが、われわれアクチュアリーが活躍しています。実は、アクチュアリーたちは、他の分野よりもずっと先駆けてベイズ統計学を利用していたというのです。実際考えてみれば、損害保険などを特にイメージすれば分かると思うのですが、データが少ないです。データが少ない中、ともかくも保険料を設定しなければいけない。そうなると当然、直接の観測値によらない何らかの情報を使わないといけないということなので、アクチュアリーたちは、自然とベイズ流の手法を採用していたのです。

この点をもう少し掘り下げてお話をします。皆さんにとっては簡単すぎる例かもしれないですけれども、一応説明しますと、例えば、ある地域の保険料を算出しようとします。われわれは日本ですけれども、歴史上アメリカでこれは起こったので、アメリカのある州でやることを想像します。例えば、飛行機によるいろいろな輸送などが始まる。でも、ある州は、まだそのようなものはあまり使われていない。一方で、他の州の情報はある。そのような状態を想像します。その州のデータが全くなければ、それはもういい、開き直りやすいです。これは常識的に多分そうなると思いますが、他の州の情報を使うほかないです。問題があるのは、その州のデータが少しずつ蓄積されている場合です。少ないデータですが、それを無視するわけにもいかない。ではどうしようかということで、自然の発想として、州外のデータと、実際の州の少ないデータとで、うまい重みづけをつけて間を取ります。そのときに「クレディビリティ」という概念がアメリカで生まれまして、それを使いました。このようなことが、アクチュアリーの世界では行われていた。自然と行われていたということです。



このようなクレディビリティの考え方は、1910 年代には考案されていました。特に、クレディビリティ理論、先ほどの CAS 百周年に関するセッションから続けて出ている方は、話が出たのでお聞きになったかと思いますが、実はそれが初めて論文にされたのは、何と今日の 100 年前です。1914 年 11 月 7 日に、モーブレーという人のペーパーが、ＣＡＳの初日のミーティングのときに発表されています。そのときは、「クレディビリティ」という言葉を使っていないのですが、今でいうクレディビリティ・セオリーの全信頼度に当たる考え方が出ています。ですので、今日この話をするということは、実にタイミングがよかったです。

2.3　アーサー・ベイリーの1950年論文

アーサー・ベイリー（1905-1954）は，アクチュアリーたちがベイズ統計学を事実上用いてきたことを強く自覚し，1950年に歴史的な論文[*4] を発表している．
その論文の趣旨は，アクチュアリーたちはベイズ統計学を堂々と使えばよいのだ，というものだった．

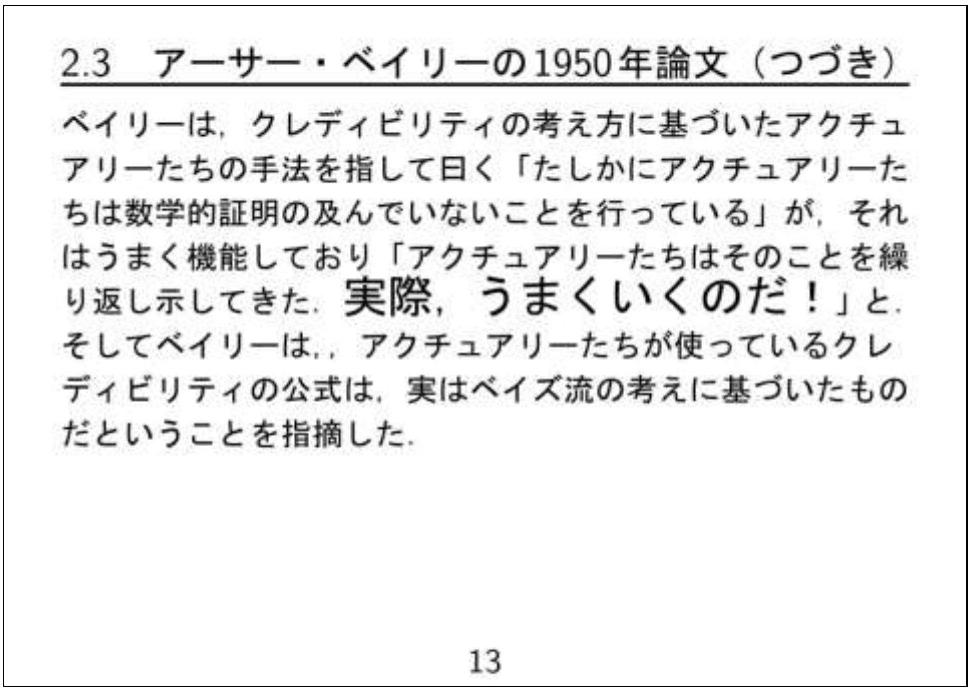
[*4] "Credibility Procedures, Laplace's Generalization of Bayes' Rule and the Combination of Collateral Knowledge with Observed Data," *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 37 (1950), 7-23.

12

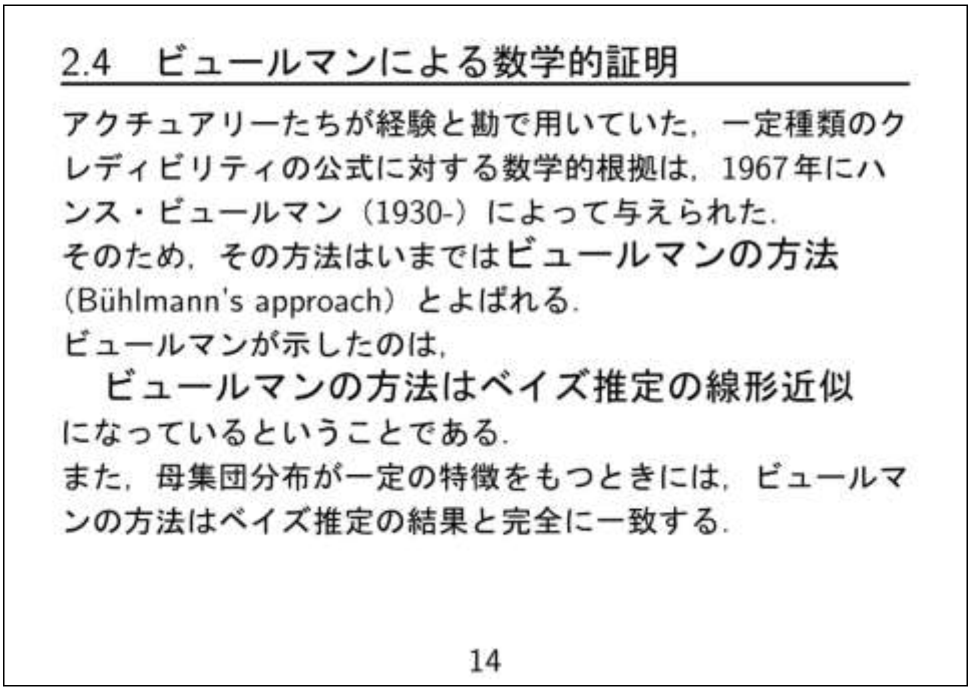
実は、論文を書いたモーブレーも含めて、当人たちはその当時はどうも気づいていなかったようですが、一定のモデルのもとでは、クレディビリティの方法は完全にベイズ統計学の方法と一致していました。それにだんだん気づいてきたのですが、その点でのアクチュアリーの中でのヒーローとして、アーサー・ベイリーという人がいます。1905 年生まれの人です。ベイリーは、アクチュアリーたちがベイズ統計学を事実上用いてきたことを強く自覚しました。そして、1950 年に歴史的な論文を発表します。それは、ＣＡＳの歴史においても、あるいは信頼性理論の歴史においても、非常に画期的な論文として非常に有名です。

先ほど名前を挙げた『異端の統計学ベイズ』においても、日本語訳は少し違うのですけれども、6 章の元のタイトルはずばり「アーサー・ベイリー」となっています。少し脇道に離れますけれども、私は数年前にグーグルでアーサー・ベイリーの情報を得ようとしたときがありました。すると、あれほどアクチュアリーの中ではヒーローであるのに、ほとんど無名だったのですね。ところが最近、「“Arthur Bailey”actuary」とグーグル検索をすると、何千個もウェブサイトがヒットするようになりました。多分、この本のおかげもあるかと思います。

ともかく、今のは完全に脇道ですけれども、1950 年の論文は非常に重要な論文でありまして、アーサー・ベイリーというアクチュアリーが、ベイズ統計学について大いなる先駆けをしていたということです。



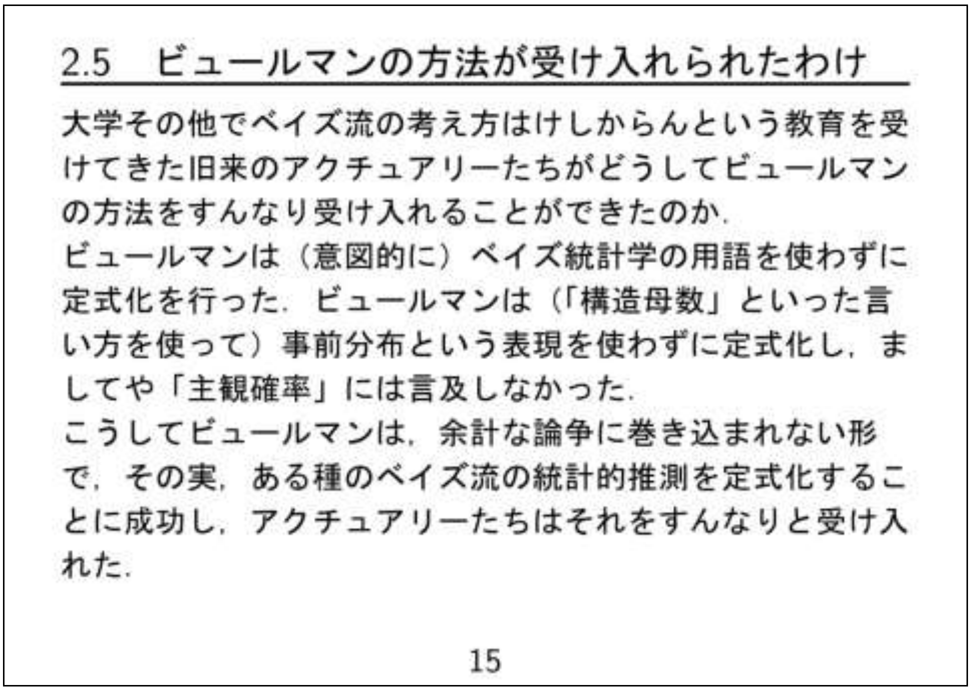
どのようなことを言っているか。その時点では、まだ数学的な根拠は、あまり得られていませんでした。２行めに書いていますけれども、「確かにアクチュアリーたちは数学的証明に及んでいないことを行っている」と。これは自覚しています。その一方で、それでも「それはうまく機能しているのだ」、「アクチュアリーたちは、そのことを繰り返し示してきた。実際うまくいくのだ」とベイリーは言っています。そして、それまでの人たちと違うのは、それが実はベイズ流の考え方なのだということを指摘している点です。そういう指摘をした人が、アーサー・ベイリーなのです。



では、アクチュアリーたちが経験と勘で用いて、実際うまく行くのだと言っているものの根拠はどうかというと、これは、ハンス・ビュールマンという人、この人は損保数理などを勉強していると非常に有名な人ですが、彼が 1967 年に数学的根拠を示しています。そこで示された形の方法が、今では「ビュールマンの

方法」と呼ばれている方法です。

「根拠」をもう少し数学的に厳密に言うと、ビュールマンの方法はベイズ推定の線形近似になっているということです。ですから、ベイズ推定そのままではありません。非常にシンプルな方法であり、線形近似ではありますが、ベイズ的手法であることは確かであり、そのことを、きちんと数学的に根拠づけたアクチュアリー学者がハンス・ビュールマンだったということです。なお、細かいテクニカルなところは聞き流してもらっていいのですが、「線形近似」と書きましたが、一定の条件のときは、ベイズ推定の結果と完全に一致する手法でもあります。



このビュールマンの方法、日本のアクチュアリーは、実はほとんど使っていないと私はお聞きしていますが、その一方で、日本の教科書でもどこの国の教科書でも載っており、特にヨーロッパでは、これはもう非常に標準的な方法と考えられています。でも、だとするとこれは少し不思議なことでして、なぜなら、「ベイズ統計学は異端だ」と言われていたわけです。３人の大御所から否定され続けていた。なぜ、アクチュアリーたちはこれを受け入れることができたのかということです。このことは、もしかしたらヒントになる。他の人に、自分たちの手法の正当性を説明するときにどうするかのヒントになります。ビュールマンは何をしたかといいますと、ベイズ統計学の用語を使わずに説明したのです。ですから、たとえば「主観確率」などと言わないことが説得につながるのかもしれない。ビュールマンの見本で、私はそう思います。ただ、ここは今日のお話だとそれほど深入りしなくてもいいところかと思いますので、スライドの細かいところは飛ばします。次のスライドも飛ばします。

補足：ビュールマンの方法の選択肢の多さ

ビュールマンの方法では，未知母数が従う分布（つまり，事前分布）の取り扱いにはさまざまな選択肢が用意されている．

- 古典的なベイズ推定と同じように事前分布を（共役事前分布などに）あらかじめ特定してもよい．
- 事前分布の種類を特定せずに，必要な構造母数を統計的推測により別途求めてもよい（その場合は，経験ベイズ法（後述）の一種と見なせる）．
- （事前分布だけでなく）母集団分布の種類も特定せず，完全にノンパラメトリックなモデルとしてもよい（これは，本流のベイズ統計学にはなかった選択肢である）．

16

3　主観確率抜きのベイズ統計学

ベイズ統計学を実行するには主観確率の考え方に基づかなければならない

と考えるとすれば，それは誤解である．
20世紀の後半に繰り広げられた「ベイズ」対「反ベイズ」の（ときに大人げなかった）論争は（いまとなってみれば）不毛な論争であったと総括できるとすれば，その「誤解」は両陣営ともに共有されていたものである．
一例にすぎないが，原書が2005年に出版され，2011年に翻訳出版された1000ページを超える大部の書『ベイズ統計分析ハンドブック』（朝倉書店）のほとんどの内容は，主観確率抜きのベイズ統計手法に費やされているといってよい．

17

ここから少し中身のお話になります。主観確率抜きのベイズ統計学についてです。ベイズ統計学を実行するには、主観確率の考え方に基づかなければならないとする考えがある。主観確率とは、勝手にどう思うか、どう何を信じるかということであり、それが、テクニカルに言えば事前分布というものに反映されるわけですが、そうしたベイズ統計学の枠組みは説得力がないと言われてきました。しかし、少なくとも、私が定義するベイズ統計学にはその批判は当てはまりません。実際、これは案外知られていないと感じるのですが、今のベイズ統計学では、主観確率中心のベイズ統計学のテクニックではないものが使われています。スライドの下のほうで、「一例にすぎないが」と書いてあるところですが、『ベイズ統計分析ハンドブック』という、アメリカで出された 1,000 ページを超える本で、ベイズ統計のテクニックのハンドブックになっているものですが、これに何が書いてあるかを見ると、主観確率の話はほとんどありません。テクニックとしては、主

観確率抜きのベイズの手法が、すでにきちんと用意されているのです。ですから、もし誤解していて、「ベイズは主観確率がなければできないのだろう」と思っていたとすれば、そこは改めていただいて、主観確率抜きのベイズ統計学をぜひ使ってもらいたいと思います。

3.1　経験ベイズ法

事前分布を主観的に決めるのではなく，経験（観測値）から決定しようというのが，経験ベイズ法である．
「損保数理」の分野でいえば，ビュールマンの方法の（いわゆる）パラメトリックな場合が経験ベイズ法の一種と考えられる．

18

主観確率抜きのベイズ統計学の一つに、ここではほぼ名前だけの紹介ですが、ビュールマンの方法の一つでも採用されている「経験ベイズ法」というものがあります。事前分布を決めるときに、主観的に決めるのではなくて、経験から決定しようという方法です。その例は、若干ですけれども、後で具体的な話が出てまいります。

3.2　無情報的事前分布

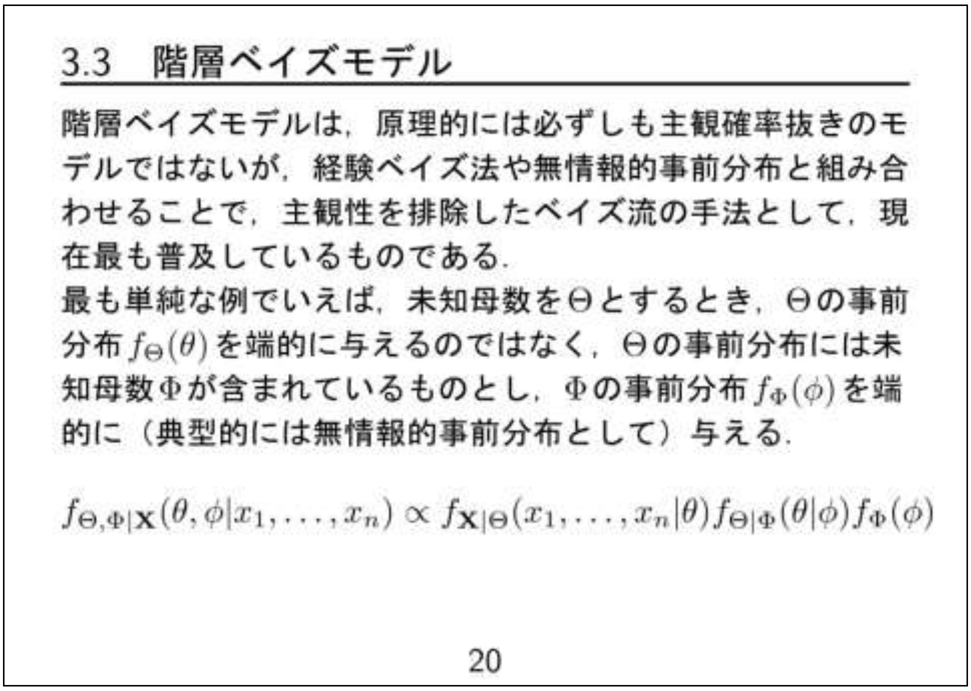
先入見は観測値以外の「情報」によるものだとすれば，先入見によらないという意味で客観的な事前分布は
　無情報的事前分布
として捉えることができる．
階層ベイズ（次項）でない古典的なベイズ統計学では，無情報的事前分布を用いることは，むしろベイズ統計学のよさを消してしまうことにつながるが，実は，ベイズ統計学の初期のころから研究されている．
これまでにいろいろな考えが提示され議論され，いまでは十分に整備されているといってよい．

19

それから、もう一つ。「無情報的事前分布」です。これは、ベイズ統計学を客観的にするためにはどうするか、客観的にするためには、事前情報を使わないという形で考え出されたものです。ですので、「無情報的」

というわけです。しかし、古典的なシンプルなベイズ統計学では、これをするのは自分の首を絞めるようなものです。事前情報を使うからこそ、当初のベイズ統計学は意味があったのです。

これに対し、すぐ後で出てきます、「階層ベイズ」という、少し構造を複雑にしたものにすると、出発点のところでは別に事前情報を使わなくても、構造によってモデルでうまく必要なことを表現することができます。そのため、今はこの無情報的事前分布というものが非常によく使われるようになり、また、それは理論的にもいつの間にかきちんと整備されてきましたので、いまでは実に重宝なものになっています。



主観確率抜きのベイズ統計学で主要なものの一つが、今、名前を挙げました「階層ベイズモデル」です。この後の二人の発表で主に使われているのも、階層ベイズモデルです。ベイズモデルの基本を知っている方向けに簡単にいえば、事前分布の事前分布を考えるモデルです。事前分布は、未知母数という確率変数についての分布ですが、それも一つの分布ですから、その分布自体も未知母数を持っていて、それに対しても事前分布が考えられるという形で、何層にもなっているというのが、階層ベイズモデルの話です。実は何層にもすることで、モデルの中に事前情報を組み込むことができますので、主観を入れない無情報的事前分布を最終的に組み合わせると、客観的、かつベイズのよさを生かしたモデルができあがります。

4　ベイズ統計学とコンピュータ

4.1　かつてのベイズ統計学のもう1つの難点

かつてのベイズ統計学は，主観確率という思想が問題視されただけではなく，ごく簡単なモデルの場合を除き，肝心の事後分布を求めるのが難しく，実用的でなかった．
しかし，その後のコンピュータのハード面，ソフト面の発達により，この問題は（かなり）解消した．
特に，マルコフ連鎖モンテカルロ法（MCMC）とよばれる手法がある．

21

さて、主観性抜きのベイズ統計学がかなりできあがっているというのが、ここまでのメッセージですが、もう一つ大事なのは、コンピューターの発達です。これは実は、歴史をひも解くと、ベイズ統計学は理屈はよさそうだという考えも根強くあったけれども、「では､やってみな」となると困ってしまっていた。「では、やってみな」に応えられていたら、実はもっとアカデミズムでも受け入れられたと思うのですが、応えられなかった。計算しようにも、少し複雑な事前分布を取ると「いや、計算できません」だったのです。ところが、これがコンピューターのハード面・ソフト面の発達で、かなり解消した。キーワードとしては、ＭＣＭＣすなわちマルコフ連鎖モンテカルロ法。後で二人のパネリストがともに使う方法です。

4.2　MCMCの歴史

MCMCの起源は1950 年代に遡るが，統計物理学などの他分野で開発されたものであり，これがベイズ統計学にも大いに活用できることが知られたのは1989年のことである．
そして1991年に，BUGS（「ギブスサンプリング（MCMC の一種）を用いたベイズ統計」の略）という無料のプログラムが開発されたのを皮切りに，ベイズ統計学用のMCMCのソフト面はどんどん整備された．
こうして，計算面におけるベイズ統計学の難点は20 世紀の終わりごろに解消され，その後，現在のようなベイズ統計学の興隆が起きた．

22

このＭＣＭＣの歴史をさかのぼると、どうも 1950 年代、1953 年に、メトロポリスという人が共同論文の中で書いていたのですが､そこからかなり空いて、「これ､ベイズ統計学に使えるじゃん」と指摘されたのは、

ようやく 1989 年のことのようです。そのあと、1991 年に BUGS というフリーのプログラムができました。ですので、ベイズがうまく機能したのはそれ以降だということです。

4.3　MCMCの仕組み をスライド２枚で説明しようという大胆な試み

- なぜ「モンテカルロ法」なのか
ベイズ推定では典型的には事後分布の期待値の計算（積分計算）をしたいが，階層ベイズなどでは未知母数が多数（p個とする）あるので細かいメッシュに区切っての数値積分では計算量が多すぎて現実的でない．しかし，乱数を利用して，事後同時分布に理論上従う（p次元ベクトル）サンプルを多数発生させる（モンテカルロ法）ことができるなら，それをもとに必要な積分等の近似計算を行うことができる．
- なぜ「マルコフ連鎖」という名が入っているか
（ギブスサンプリングの場合を例にして説明すれば）p次元の事後同時分布を直接計算するのは大変でも，$p-1$個の値を与えて，特定の１つの母数の条件付事後分布の計算をするという課題はやさしい（解析的に解ける場合もよくある）．そこで，そうした条件付事後分布を利用してベクトル成分を１つずつ入れ換えるようにしてp次元ベクトルのサンプル列を作ると，マルコフ連鎖となって，これが利用できる．

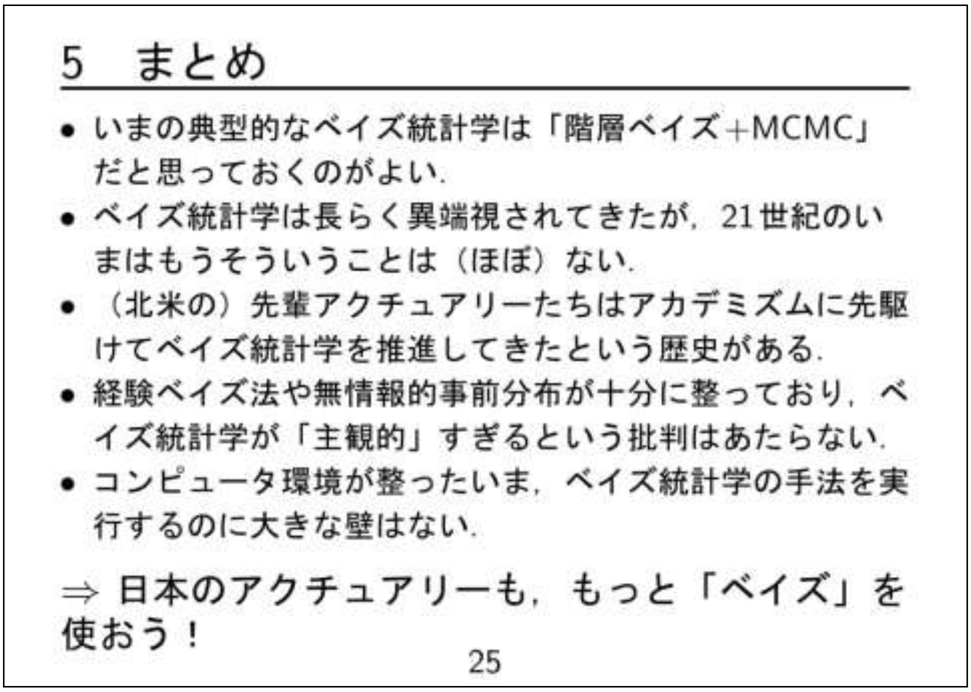
23

4.3　MCMCの仕組み をスライド２枚で説明しようという大胆な試み（つづき）

- なぜ「マルコフ連鎖」を使うとうまくいくのか
マルコフ連鎖は（必ずではないが一般に）連鎖数の増加につれて定常分布に至るという性質をもっている．そして，前ページで述べたマルコフ連鎖の定常分布は未知母数の事後同時分布となる．（定常分布が得られるなら，それがほしかった事後同時分布になるというのは不思議ではないと思うが，実際に得られるのは一種のランダムウォーク列であり，特にギブスサンプリングの場合は自己相関が高いので，「定常分布になる」というのは当然のことではないかもしれない．実際，うまく収束しない場合もあるようである．しかしありがたいことに，応用例の多くの場合は，十分に連鎖数を増やせば（また，収束していく前のサンプルを捨てるなどすれば）サンプルの分布は実際に定常分布になる．）
- まとめると
（ギブスサンプリングの場合に限らず）ベイズ統計学に用いるMCMCでは，定常分布が未知母数の事後同時分布になる何らかのマルコフ連鎖をモンテカルロ法で作り出すことにより，必要な積分等の近似計算を行う．

24

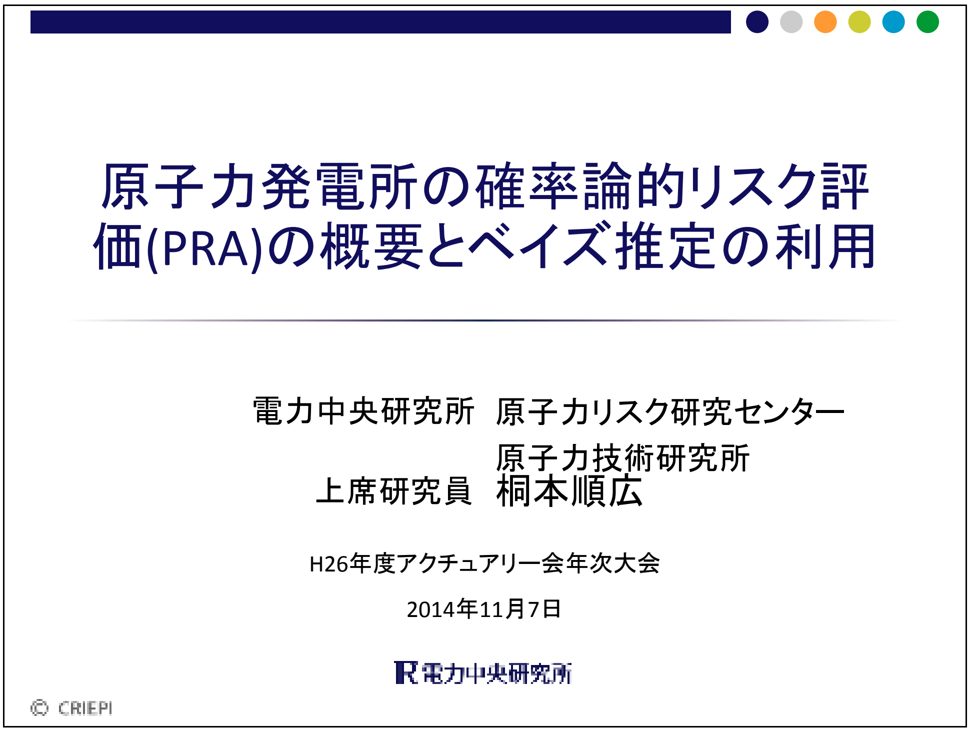
ところで、事前の打ち合わせで司会者の渡辺さんから「ＭＣＭＣを簡潔に説明しろ」と言われていて、このスライドのタイトルに書いてあるようにそれはなかなかの難題なのですが、何とかスライド２枚を作りました。ただし、持ち時間がもうなくなってきましたので、質問等がもしあれば後でやりますけれども、いまは飛ばして、もうまとめに入らせていただきます。



まず、キーワードとして挙げて、こういうものがありますよということしか言ってきませんでしたが、ともかく、現在の典型的なベイズ統計学とは、「階層ベイズ＋ＭＣＭＣ」のことです。旧来の、ベイズ統計学の入門書で紹介されるようなものをベイズ統計学としてイメージしているとすれば、それとは違うものなのです。あれではないのです。階層ベイズ＋ＭＣＭＣだと思っておくのがいいということです。次に、ベイズ統計学は長らく異端視されてきたのですが、もう大丈夫です。今は大丈夫、そのようなことはないです。アカデミズムの方と話すときは、注意しなければいけないこともまだありますけれども、おおむね大丈夫でしょう。それから、アクチュアリーとしては、実は先輩アクチュアリーたちはアカデミズムに先駆けてやってきたのだという、そういった自負を持って、ベイズ統計学に取り組んでいっていいということです。また、経験ベイズや無情報的事前分布というものについて、実はもういつの間にか理論がかなり整っていますので、主観的でない方法が使える。そして、コンピューター環境が整っているということです。私は抽象的にしか述べていないですけれども、使う準備はもう整っていますので、日本のアクチュアリーも、もっとベイズを使いましょう、というのが、この発表での私のメッセージでした。以上です。

【渡辺】　ありがとうございました。岩沢さんから、まずわれわれの先輩であるアクチュアリーたちが古くからベイズ統計学を実際に使ってきて、それが機能してきたというところ、また、かつてベイズ統計学の利用がそれほど広がっていなかった２つの大きな理由が今では解消しているというところをお話しいただきましたので、もしベイズ的手法の利用をためらっているアクチュアリーがいたとしたら、その方の背中を押していただいたことになるかと思います。

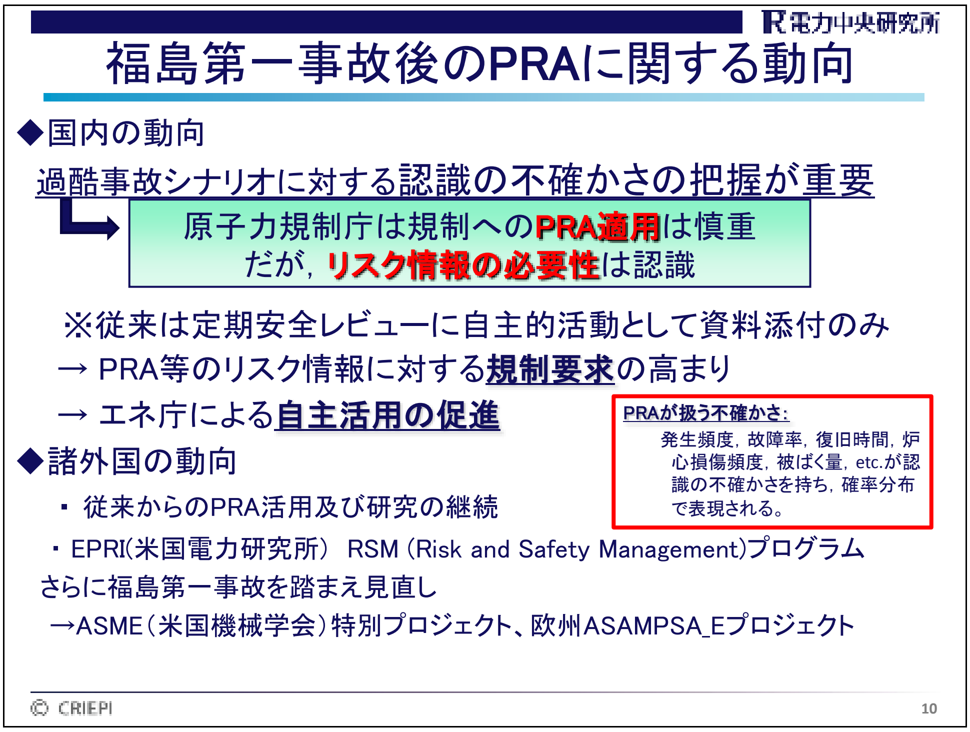
続きまして、桐本さん、お願いします。



【桐本】　はい。電力中央研究所の桐本と申します。よろしくお願いします。私は、もともとこのような原子力の確率論的リスク評価という、安全評価をするための方法の研究をずっとやってきた者です。どちらかといいますと、統計の分野は、多分この会場の中で僕が一番素人でないかと思うのですが。工学屋さんの要は範囲で、このようなベイズのところに少しかかわって、実用化としてどうしようかという経験を、皆さんの所でご説明できたらということで、やってまいりました。

電中研という所はあまりなじみがないと思いますので、少し簡単な紹介だけさせてもらいます。戦後に、51年ぐらいですが、九電力、全電力の共通の研究機関として作られた所でして、電力の寄付金で運営をして

いる研究所でございます。必要な技術を研究するということで、私は原子力の分野でして、大手町や狛江などという所にいるのですが、他にも横須賀や我孫子で例えば電力系統など、あとは大手町だと経済社会の研究所もありまして、電力に関係するいろいろな分野の研究をしている所でございます。



いきなり「福島第一のＰＲＡに関する動向」と書きましたが、少しこの辺でバックグラウンド的なところを説明させていただこうと思います。もともとＰＲＡという確率論的リスク評価という物は何から始まったかといいますと、まずは 1970 年代にアメリカで、軍のミサイルの信頼性を評価するフォルトツリー解析などはご存じだと思いますけれども、あの辺を原子力に応用しようということで、ラスムッセンという方がやった報告がございます。「WASH‐1400」という、割とこの業界で有名な報告書なのですけれども、そこで初めてやられました。それで、原子力の事故の確率を初めて安全研究ということで計算したのですが、そのあとに、あれですね。そのときは、世界中でまだ原子力の商業炉の事故は、マンハッタン計画のときの実験は分かりませんが、商業炉ではなかった時代にその評価をやって、そのあとに、79 年にスリーマイル・アイランドの事故が起きたということです。スリーマイル・アイランドの事故自体は、確率の値自体は、絶対値のような話で行くと、少し小さく見積もりすぎではないかなど、いろいろな批判はあったのですが。

なぜ、このＰＲＡの話が注目されたかといいますと、そのときの研究で、事故のシナリオを分析していったときに、スリーマイル・アイランドで起こった事故のシナリオが、その中の一つとして分析があったのですね。今まで、それが事故の手順書としては作られていなかったのだけれども、その報告書の中では分析があって、やはり、そのような形で分析をしていくと、今まで思いつかなかったようなシナリオという物が、やはりいっぱいあって、それを見つけるために、このようなアプローチをしなければいけないのだということが認識されたのです。では、このＰＲＡというやり方を、もっと精度を高めていけば、もっと事故に対する適用ができるのではないかということで、原子力の分野で確率論を使って、今までほとんど起こらないだろうという事象をどのように分析するかという動きが始まったということが、アメリカのもともとの流れです。

日本の研究者も同じ時期に、やはりアメリカの原子力を追いかけますので、研究自体は始まりました。た

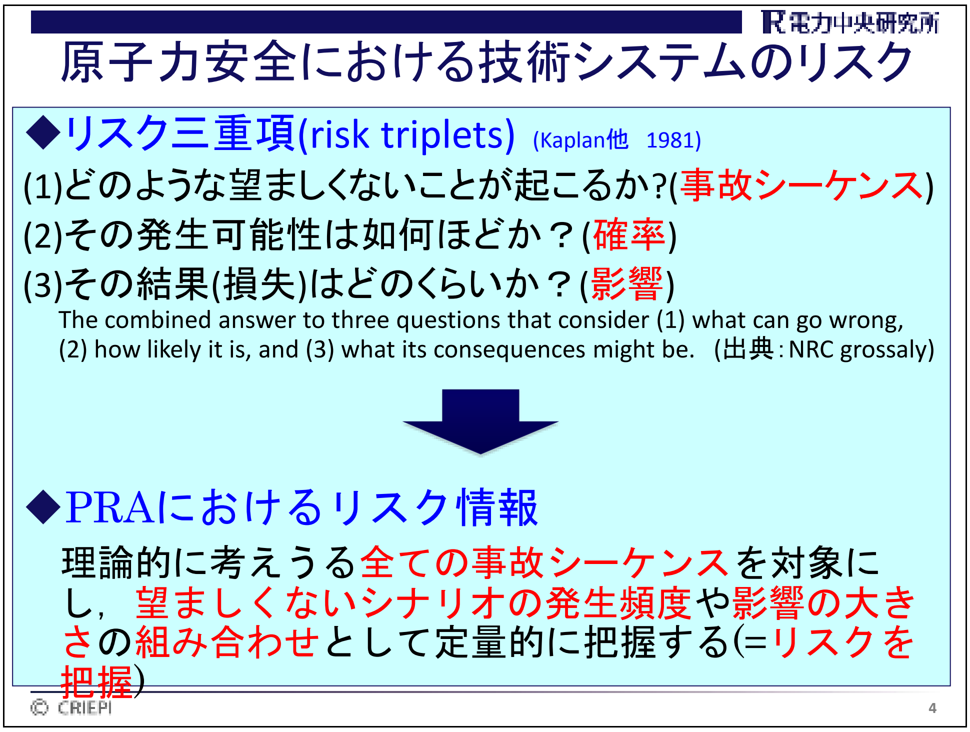
だ、当然その最初のスタートのときに、既にその報告書の中では、要はベイズ統計学的な、彼らはアプローチをしておりまして、確率の扱い方もベイズ統計学的な見方をしています。ただ、スタートですので、例えばそこで扱われる事象の発生や故障率などという物は、もともとデータがないところから始めますので、基本的にそこで彼らがやったことは、まず専門家が集まって、その中である程度専門家パネルで話し合いをして、故障率や人間が失敗する確率などを、簡単に言いますと、「えい、やあ」である程度決めたところからスタートしました。

彼らは、そのスタートをしたところから、アメリカの場合やっていたことはベイズ的な考えで、スタートはそうなのだけれども、主観確率としてそれを作ったあとに、実際の発電所でデータを集めましょうと。そしてベイズで更新していくという枠組みをやっていって精度を上げましょうということが、アメリカのアプローチでした。残念ながら、日本の場合は非常に、この間の福島の事故が起きる直前ぐらいまで、福島の事故の少し前に、流れが変わってきたのですけれども、それまではアメリカが 70 年代から 80 年代にかけて、専門家が作ってきたパラメータなどを、簡単に言いますと、バイブルのような扱いをして、ずっとそれを使ってきたということが正直な話です。

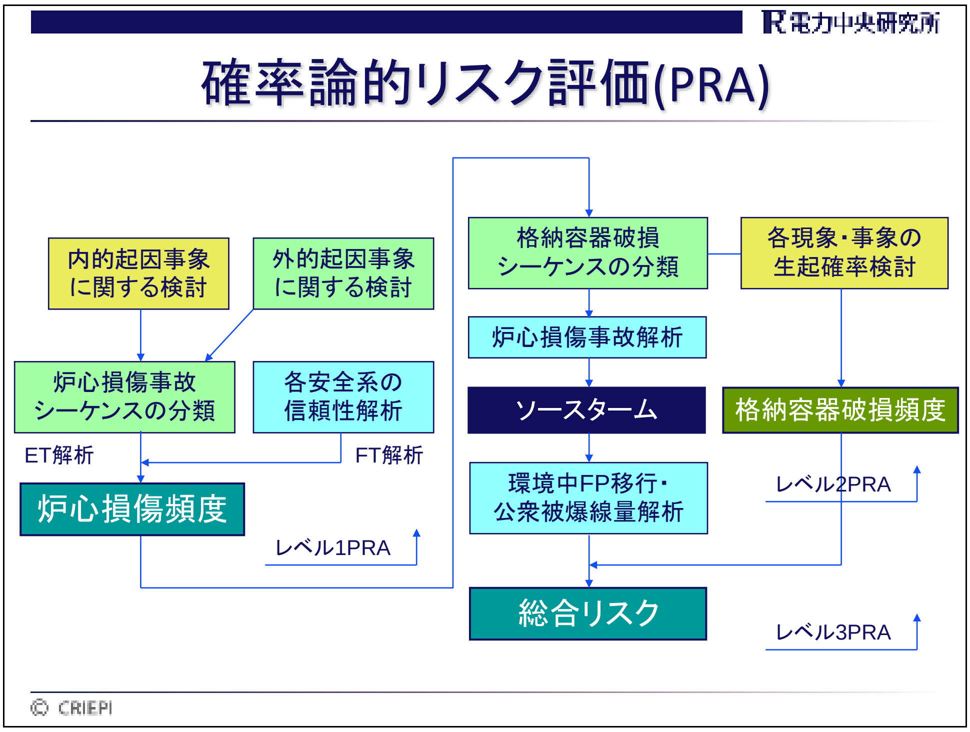
福島第一の事故が起きたことで、やっと日本でも、今までアメリカの古いデータを使って、日本の発電所は安全だという証明のためだけに使っていたようなやり方を改めなければいけないということを、やっと相当認識されてきました。国内の動向として、このような過酷事故のシナリオに対する認識の不確かさをきちんと取れという話がありまして、規制庁から号令が今かかっているのです。ただ、規制庁はまだこの不確かさというところに非常に慎重になっていて、要するに安全神話を打破しなければいけないという話にはなっているのですけれども、彼らが今やっていることは、どちらかというと、批判してもしようがないですけれども、より高い安全神話を一生懸命作ろうとしているアプローチで、あまり不確かさをどうしようというところは、まだ適用の規制に取り組むことには慎重な話にある。

ただ、相当この危機感というものは原子力業界の全員が持っていて、従来やっていたような評価から、例えば実質的活用の促進をするべきだということで、電力会社がきちんと自らそのようなリスクの評価をして、どんどん更新をして、管理をしていくという枠組みを作らなければいけないということになっています。

諸外国としては、やはり福島を受けて、アメリカの電力研究所という所が、Risk and Safety Management Program という物で福島事故の反映をし始めています。それから、アメリカの機械学会の特別プロジェクトや、ヨーロッパの方でも同様のプロジェクトが始まっているような状況になっています。

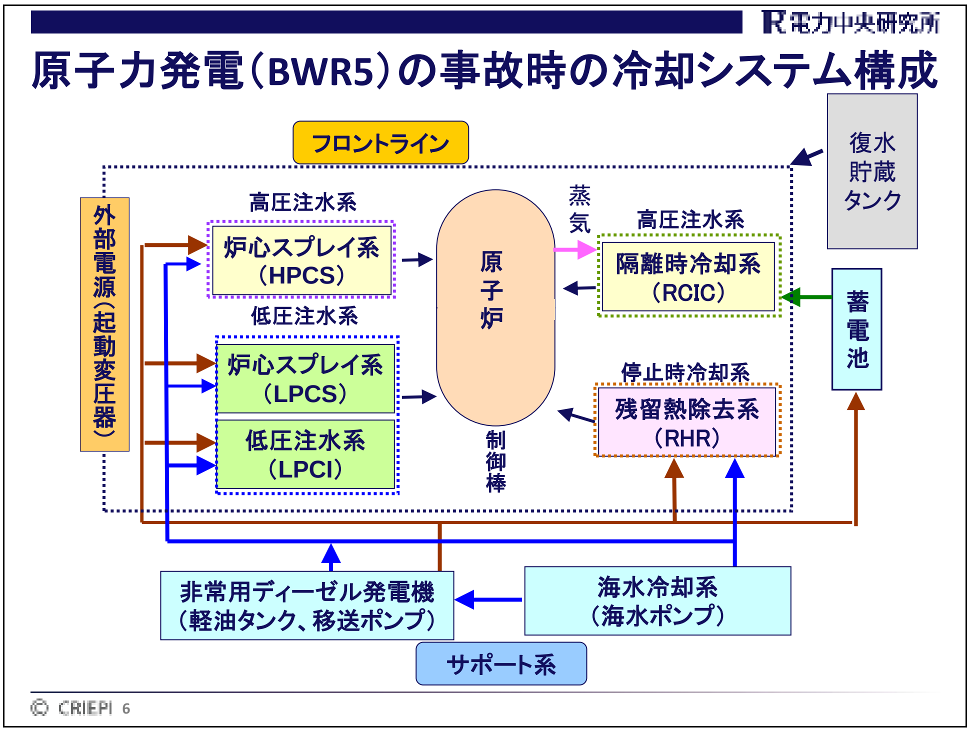


リスクに関しては、「リスク」といいますと「社会リスク」などいろいろな所でいわれるのですが、アメリカの規制の方のＮＲＣという規制の機関があるのですけれども、そこでいっているリスクは、彼らはもう明確にこのように定義をホームページでしています。「リスクトリプレット」という物で定義されるのだと、彼らは言っていて、どのような望ましくないことが起こるかという事故シーケンスと発生可能性の確率、それから、その結果の影響の掛け算ではなくて組み合わせだと言っています。要は、その組み合わせや、シナリオなどというところを扱う手法として、ＰＲＡを位置付けるのだということで、これを公衆の説明も含めて、リスクを評価するために使うことを、アメリカの規制は、もうこれは 1995 年に実は規制の宣言をしまして、これを使って安全を確保すると言っています。

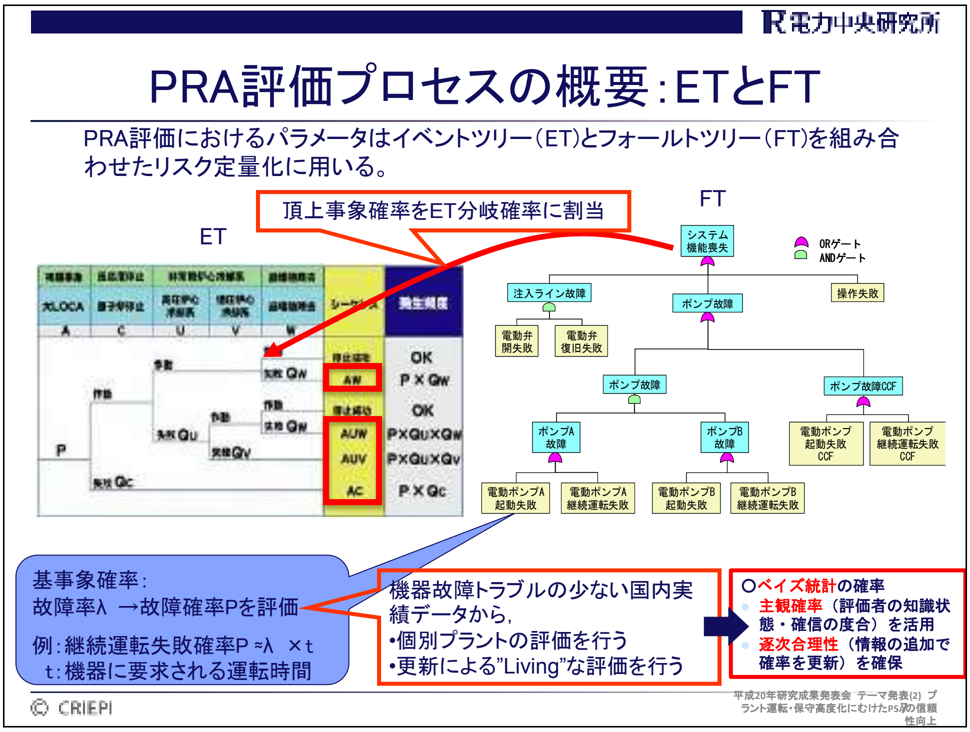


ＰＲＡの簡単な説明だけします。ＰＲＡとは、まず、この間福島の事故が起きたので、だいぶイメージしやすいと思うのですけれども。まず、内的事象というのは、例えば中のシステムが偶発的に壊れて、どこかのシステムがだめになってしまう。そのときに安全のシステムも動かないという発生ですが、それ以外に、外的事象というのは、この間の津波や地震などというところ。そのような物に関して発生した事象に対して、炉心が壊れていくための事故のシナリオを作ることが、事故シーケンスになってきます。

それに対して、シーケンスごとのシステムの信頼性を、フォルトツリー解析という物でやっていきます。左側のシーケンスのこのシナリオの流れを「イベントツリー」というわけです。炉心損傷が起きて、原子力の中の燃料が入ったお釜の中が壊れる。これがレベル１といいます。それで、次に格納容器、福島でいいますと、３号機やいろいろ爆発したときに、あれは水素がここから漏れたのですが、格納容器のところが壊れて、その中から、格納容器が壊れて。ソースタームとは、fission products ですから放射性物質を量として測ります。これが外に出ていくところまで評価するのがレベル２。環境に移行して、公衆が被ばくをして、例えば周辺の人間が何人死んでしまうなど、被害がこのぐらいに出てくるというところまで、環境までのところをやるのがレベル３という形で、順番にそのようにステップを踏んだ評価をする形になります。



これは、資料をお持ちでしたらイメージしていただきたいのですが、実際にレベル１というところで、原子炉に対して、このように外部電源がいろいろな所に電源がなくなった。この間福島で、この外部電気が失われたわけですね。外部電源は当然、他の炉心スプレー系や低圧注入系など、このようなシステムの中でいろいろとつながっていくので、ここが死んでしまうと、他のシステムが全部死んでしまうという状況になります。その緊急用の電源が、下に非常用ディーゼル発電機などという物があって、それを冷やすためにも海水のポンプがあるのですけれども、この間の津波で、この下の二つの青い所が全部死んだということになります。残っていた物は、右下にある残留熱除去系、ＲＨＲだけが蒸気の力で回って、何とか保っていたのですけれども、８時間後には設計上は止まってしまいますので，電源が回復しないまま炉心が溶けたというのが、この間の事故でした。



これをシステム解析することが、このイベントツリーとフォルトツリー。左がイベントツリーです。それで、先ほどの事象が発生して、初期の事象で発生して、それが停止できた場合とできなかった場合で、失敗を下にします。それで、次に原子炉が止まらなければ、もうそのまま右側の事故に進展するのですが。もし止められたとしても、そのあとに原子炉を冷やすシステム、高圧炉心、低圧炉心、それから崩壊熱を除去して、ゆっくり冷やしていって、これは 72 時間ぐらいは最低かかるのですが、そこまでのシナリオというところをやる。

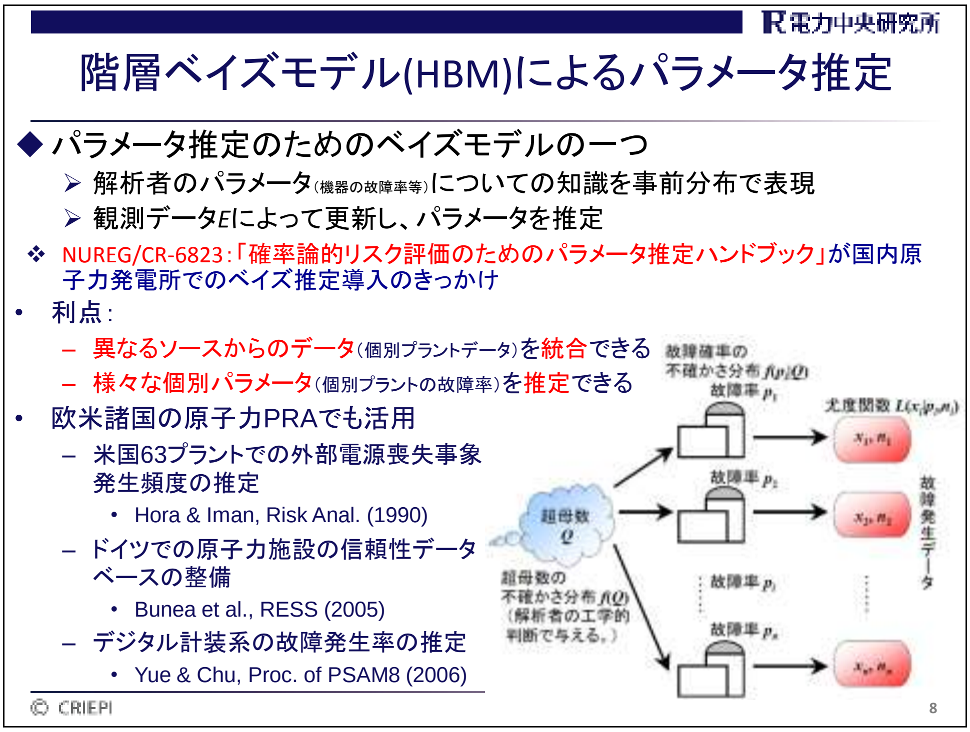
このシステムの故障自体は、システム自体が壊れたことがないため分からないので、あれを分解した物がフォルトツリーになってくるということになります。それぞれの、例えば冷やすシステムが壊れるのを、注入ラインが壊れる、ポンプが動かなくなったというのを分解した物が、右側の物になります。そのときに、例えばポンプが起動しない、起動失敗、あるいは継続運転失敗といって、動いたのだけれども、24 時間や 72 時間動かしたいのだけれども止まってしまうという故障モードは、これは定期検査で、それぞれ機器で検査をかけているので、そのときの運転実績が実際にあるわけです。ここにデータがある。では、このデータを使って、例えば一番下の所の数字を作っていけば、これを論理演算で掛け算や足し算をしていって、最終的にシステムの故障が出るでしょうと、このような理屈で評価をしましょうということが、ＰＲＡの評価の考え方になります。

このときの、ここの白い所の起因事象という故障率、例えばλというところを評価しないといけないわけです。もともと最初にお話ししたように、アメリカの昔 80 年代に使われた故障率をこの中で使っていたので、これを国内の実績のデータを使ってどのように変えていこうかということを、まず検討しました。そのときに、まずわれわれ統計学としては割と素人に近いところから始めましたので、運転時間を取って、故障の件数を取って、割り算をすればいいと、それで平均値を取って何とかやってみようという話からスタートしたわけです。すると、０件の物もいっぱいあるわけですね、当然。それで、０件の物をどうしようか、では 0.5 ぐらいでやろうかなどと、それぐらいのスタートでまずはスタートしていたわけです。それでやっていたときに、当然それをやっていくと、アメリカの方で「では、それはベイズでやった方がいいよ」という話がや

はりいろいろと。「ベイズとは何だ」というところから、まず始めます。

アメリカの方で、例えばＰＲＡを評価するツールがありまして、RISKMAN など、いろいろなツールがあるのです。その中で、いわゆる古典的なベイズ統計学の事前分布を、主観確率でも何でもよいのですけれども、入れて、１段階ベイズをして、個別のプラントのデータにアップデートする機能が、そのツールの中に既にあるのです。アメリカの連中から言うと、そこに例えばアメリカの故障率などを事前分布に入れて使っていって、だんだんよくすればよいではないかという話は、頻繁に言われていたわけです。

ところが、そこで問題になったことは、ではそうしようかといったときに、電力業界がそのようにしようかと思ったときに、いろいろな所で、どことは言いませんが、いろいろ問題が起きました。それはなぜかといいますと、多分主観確率の議論の一番根本になると思いますけれども、事前分布にアメリカのデータを使う、その根拠は何だという追及が来るわけです。それに対して、われわれはその答えを持っていなかったわけですね。では、事前分布に対して、ここに何をやろうかというときに、例えば何か一様分布を使ってやってみようかといっても、それは０件の故障にも使えないわけです。それで、どうしましょうというところから、まず始まったというところです。



このときに、すみません、赤い字で上に書いてある行で、「NUREG」とは、アメリカの規制委員会が出す研究報告書のような物なのですが、この NUREG のＣＲ－6823 という物が、今調べてみたら、2007 年に発行されました。この 2007 年に発行されたアメリカの規制委員会が出した『確率論的リスク評価のためのパラメータ推定ハンドブック』という文書があります。これは、インターネットで公開もされています。この中で、アメリカの発電所も、先ほど言ったように１段階ベイズで簡単にやっているような発電所がほとんどで、あまりアメリカの発電所で実用で使っている人も、それほどいなかったです。アメリカの規制委員会は、割とそのようなところで、アイダホの研究所を使って、いろいろとこのような検討をしていたので、割と実際の現場よりもマニアックなことをいろいろやっていた。この中で、彼らが初めて階層ベイズで解くと。要するに、彼らは全米の電力会社のトラブルの情報を全部一手に集めてデータベースを作って、100 ぐらいあるプラントのデータを使って、階層型ベイズでそれぞれの故障率を評価してみようということをアプローチ

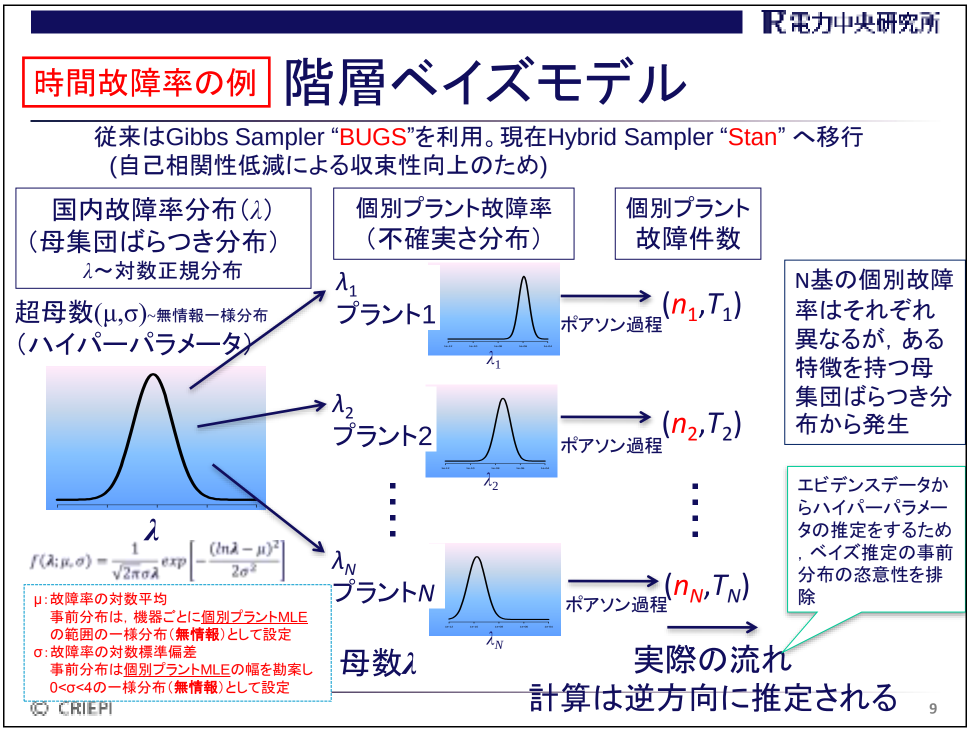
としてやっていたので、その手法をテストした物が、この中に入っていたわけです。

そのときに、日本の電力業界としては、「『階層ベイズ』というアプローチがあるのか」ということを、初めて実はこのハンドブックで、正直言うと知りました。そのときに、原子力学会で、ちょうど確率論的リスク評価の標準を作っていたのですけれども、そのときに、パラメータのところは正にこれが同時に出た時期でしたので、「ちょっと待て」という話になりまして、パラメータを国内版でこの階層ベイズでやってみようというところから議論がスタートしました。

利点としましては、ベイズ推定という物は、知識を事前分布で表現できるわけですが、この階層ベイズを使うと、まず異なるソースからのデータ、例えば、故障率の右側に原子力発電所がありますが、これは大体日本には 50 プラントぐらいあります、データとしては。ですから、それぞれの 50 プラントのデータを、それぞれ個別の故障率を持っている物として設定しながら、データも個別の物を使って。でも、それをある一つの傾向のある、例えば電動ポンプならば、どの、50 プラント、どこの、ＢＷＲやＰＷＲは、炉の形が違っても、電動ポンプは大体同じような性質を持っているはずだという前提のもとで、超母数のところで持っているような、同じような性質のもとで、ある確率でさまざまな故障率が各プラントで出ているというモデルを作るというところができる。それから、もともとの階層ベイズを使うことで、個別のパラメータから、超母数を持ってくることで、先ほどずっと追及されていた「アメリカのデータを使う根拠は何だ」というところを、「いや、日本のデータだけで、それを推定します」いうところで、論拠になるところが作れることを期待して、まず検討を始めましょうというところでスタートしたわけです。

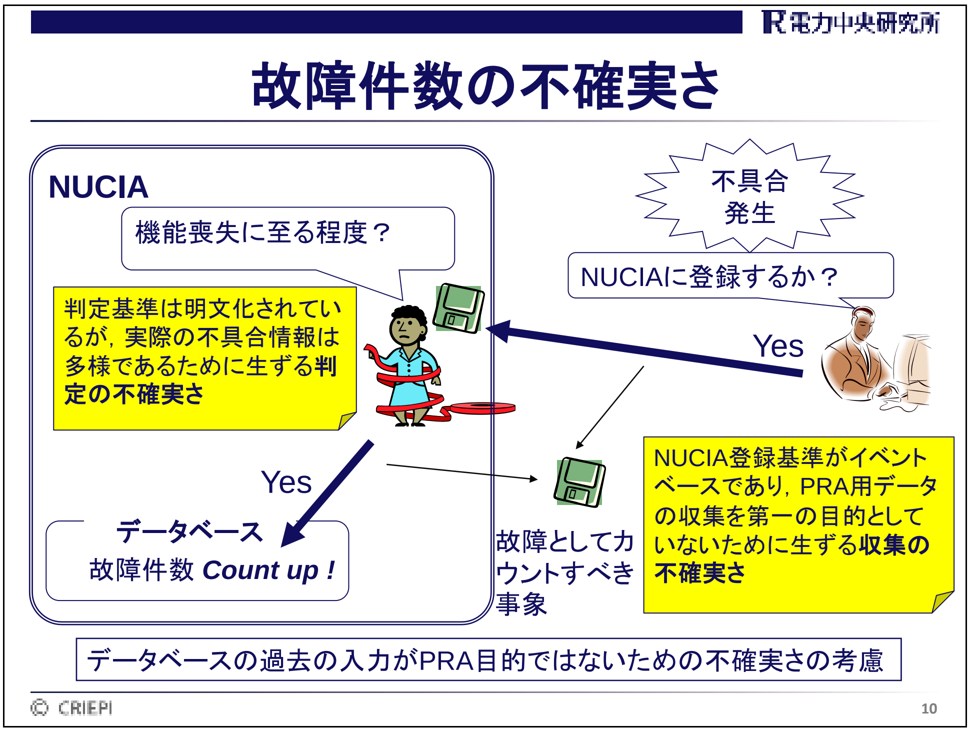
これは、アメリカでも、外部電源損失事象の発生頻度の推定や、ドイツであれば、ドイツもわれわれと似たような時期に、この辺のスタートをしています。少し事故の関係で遅れましたけれども、ドイツも今、割といろいろな所に進んでいまして、結構頑張ってデータベースをいっぱい作っています。

もう一つ、デジタル計装の故障発生率という物があるのです。これは多分、皆さんはあまりご存じないと思うのですけれども、実は原子力発電所という所は、先ほどの安全システムにデジタルの制御という物を従来の設計では使っていないのです。柏崎の一番新しいＡＢＷＲといわれる型式の発電所があるのですけれども、そこは新しいので使っています。要するに、枯れた技術を原子力は使いますので、デジタルは信頼ならんということで、つい最近まで、実はデジタルは安全の計装には使っていませんでした。ところが、逆にいうと、使っていないということは、データがないので、デジタル計装の信頼性をどのように評価するかということは、割と世界中で結構問題になっていることが、原子力のＰＲＡの一つの課題になっています。

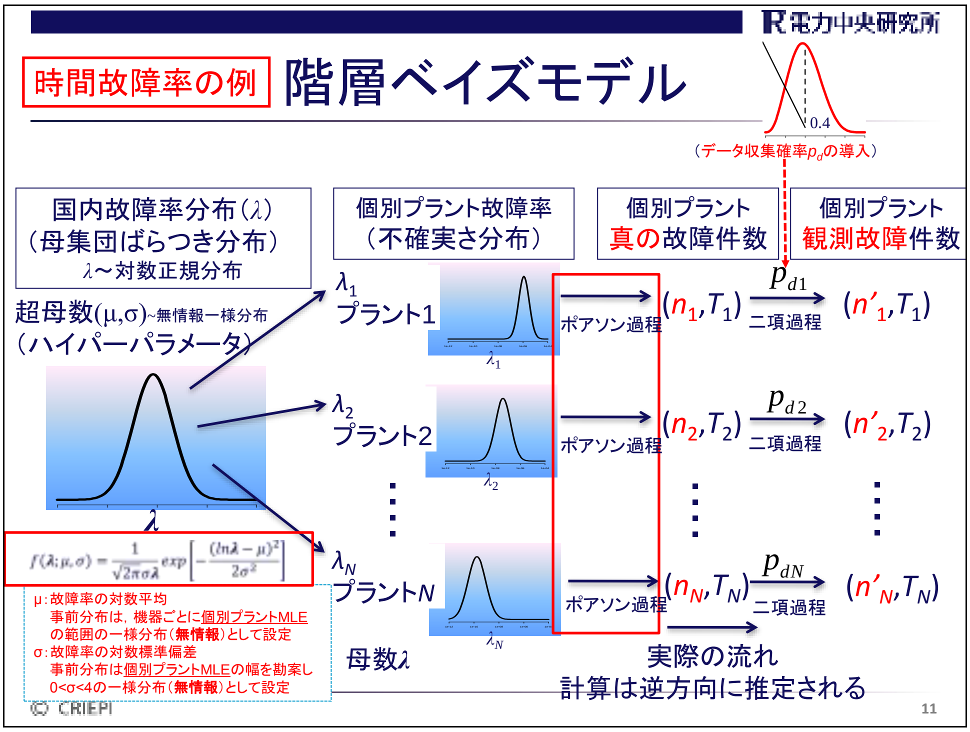


このベイズモデルを使って、例えば時間故障率を作りましょうということで、まずデータを使って、故障のデータから BUGS ですね。WinBUGS を使いましたが、これでまず計算を考えましょうということにしました。そのときに、超母数のところで設定をするときに、まず一様分布として設定をした。ただ、そのときの例えばσの範囲などは、ある程度のデータから想定をして、そこはある程度工学的判断でσの範囲を定めました。その中で、個別のプラントの故障率の不確実さの分布がそれぞれ出る中で、ポアソン過程で個別の故障件数が出てくる。このようなモデルになるのだろうということで。これが逆向きに行く物が階層ベイズですから、いわゆる先ほど説明されている経験ベイズのような位置づけのアプローチになります。

これを使ってやることで、個別の故障率がそれぞれ出るのですが、これを実は検討したのは、実は事故の前でした。日本の原子力のところの電力の性質として、個別の発電所の成績が出ることは嫌だという実は事情があって、一般の故障率にしてほしいと。なぜ階層ベイズで一般にするのか、よく分からないところもあるのですけれども、でも一般にしてほしいということで。そのときにわれわれが考えたことは、もともとそのハイパーパラメータから母集団ばらつき分布が、やった結果から出ますので、では、この母集団ばらつき分布は、これは一般故障率という扱いにしましょうということで、外に出す報告書としては、この母集団ばらつき分布を故障率として出しましょうと。実際の個別の故障率は出るのだけれども、それは内々の資料にしておきましょうかというぐらいの位置づけで、最初はやりました。



ところが、ここで一つ専門家パネルを開いて、そこに規制の人や国の研究機関の人を入れたのですけれども、実はそれだけではなくて、電力の上層部からも、いろいろとここについての突っ込みが入りました。それはなぜかといいますと、もともとこの故障のデータが、ここの右側の故障件数と運転時間のデータなのですが、これについて、故障件数が入っているのが、「ニューシア」という、僕が作って、電力さんが今一生懸命トラブルを入れているデータなのですけれども、それにそもそも全部入っているのかと。要するに、データとして原子力が今トラブルで出している物で、簡単に言いますと、隠している物などがあるのではないかと。ここに全部入っている保証があるのかという議論が、まず実は起こってしまいました。そもそもＰＲＡで数えなければいけないデータベースからどのように入れなければいけないかという話が出ると。このデータベース自体に、不確実さがあるのではないかという話が出ました。



ここを突破するために、われわれとしては、以前データ分析をした中で、どのぐらいデータの分析の過程でスクリーニングアウトをして、データを収集の割合が決まってくるかというところの以前の研究があったので、それを基にして、先ほどのモデルにもう１個、二項過程を入れまして、データが入るか入らないかの過程を入れて、そこで実績の研究の先行の物から 0.4 ぐらいのところがスクリニーングされて、最終的にトラブル事象として残ったので、マックスここの二項過程で 0.4 を期待値にしたところで、これ以上はもう抜けないだろうという、最大限抜けるような「データ収集確率」というモデルを、実は入れました。これは多分、日本でしかやっていないですね。割と特別な事情でやったアプローチです。

ただ、これをやることで、少しけがの功名がありました。何かと言いますと、二項過程でｎ´が、０件の故障は日本にいっぱいあるのですが、実は情報の収集確率を入れることで、必ずしもｎの方は０ではなくなって、幾つかの小さい、零点幾つであるなど、暴露時間が長ければ、もう少し大きいのですが、ある程度ｎに見込みができるような形のモデルを取ることができたということになります。この、何と言いますか、２階層ベイズのような形のモデルを提案しまして、これをＰＲＡの国際学会などに発表しながら、このようにやってみますと発表しました。

電力中央研究所

Probability Models for Parameters

Parameters	Probability Model	
Failure Rate λ_i[/h]	**LogNormal(μ,σ)**	$f(\lambda_i;\mu,\sigma)=\frac{1}{\lambda_i\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(\ln\lambda_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$
Hyper Parameter μ	Uniform(a_μ,b_μ)	$f(\mu;a_\mu,b_\mu)=\begin{cases}1 & (a_\mu<\mu<b_\mu)\\ 0 & (\mu\le a_\mu, b_\mu\le\mu)\end{cases}$
Hyper Parameter σ	Uniform(a_σ,b_σ)	$f(\sigma;a_\sigma,b_\sigma)=\begin{cases}1 & (a_\sigma<\sigma<b_\sigma)\\ 0 & (\sigma\le a_\sigma, b_\sigma\le\sigma)\end{cases}$
Failure Probability p_i[/demand]	**Logit-Normal(μ,σ)**	$f(p_i;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(\mathrm{logit}\,p_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\frac{1}{p_i(1-p_i)}$
Hyper Parameter μ	Uniform(a_μ,b_μ)	$f(\mu;a_\mu,b_\mu)=\begin{cases}1 & (a_\mu<\mu<b_\mu)\\ 0 & (\mu\le a_\mu, b_\mu\le\mu)\end{cases}$
Hyper Parameter σ	Uniform(a_σ,b_σ)	$f(\sigma;a_\sigma,b_\sigma)=\begin{cases}1 & (a_\sigma<\sigma<b_\sigma)\\ 0 & (\sigma\le a_\sigma, b_\sigma\le\sigma)\end{cases}$
Data collection probability p_{di}	**Beta(4,6)**	$f(p_{di})=\frac{p_{di}^{\,4}(1-p_{di})^6}{B(4,6)}$ $\quad B(4,6)=\int_0^1 t^{4-1}(1-t)^{6-1}dt$

$$\mathrm{logit}\,p_i=\ln\frac{p_i}{1\text{-}p_i}$$

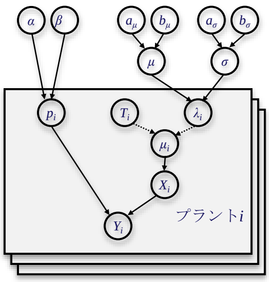
 12

このときに使った、上が failure rate の物は、時間故障率には、ポアソン過程です。あとデマンド故障率とは、スイッチを入れて起動するかしないかですので、二項過程で表現されるわけです。それから、データコレクションプロバビリティには、ベータ分布を設定するという形をとりました。

電力中央研究所

故障件数の不確実さのモデル化

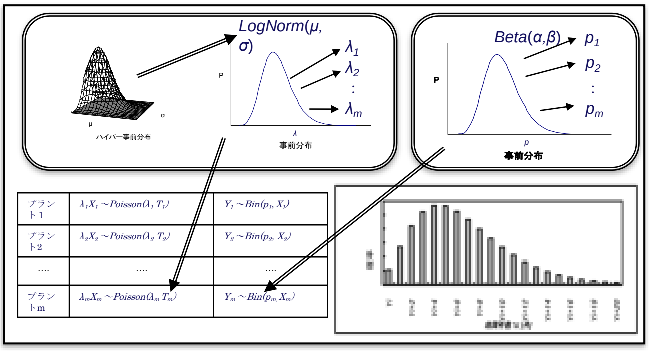
・データ収集確率事前分布は原安協報告及び16ヵ年報告のスクリーニング結果からBeta(4,6)で設定



← は確率的依存性, ←…… は論理的依存性を表す。

p_i ： プラント i におけるデータ収集確率
X_i ： プラント i における故障件数
Y_i ： プラント i における観測故障件数
λ_i ： プラント i における個別プラント故障率
T_i ： プラント i における露出時間
μ, σ： 母集団変動分布のパラメータ
a, b ： ハイパーパラメータ

時間故障率の階層ベイズ確率過程モデル



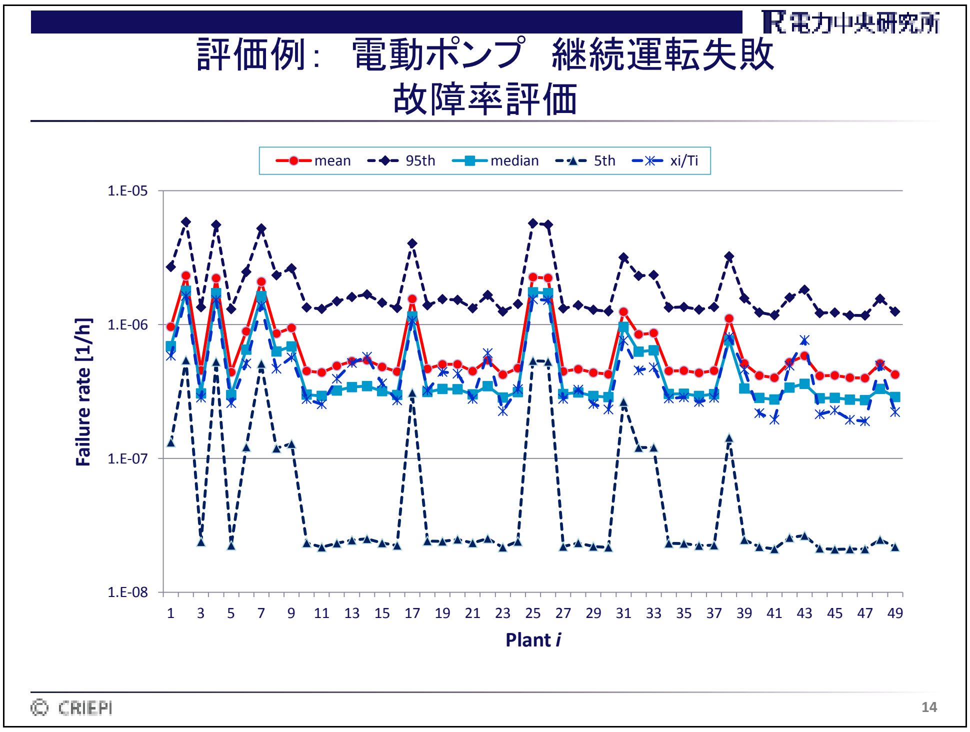
μ, σ：ハイパーパラメータ　λ_i : i プラントの個別プラント故障率　p_i : i プラントのデータ収集確率
T_i : i プラントの露出時間　X_i : i プラントの故障件数　Y_i : i プラントの観測件数

データの不確実さを考慮した階層ベイズモデルの概念

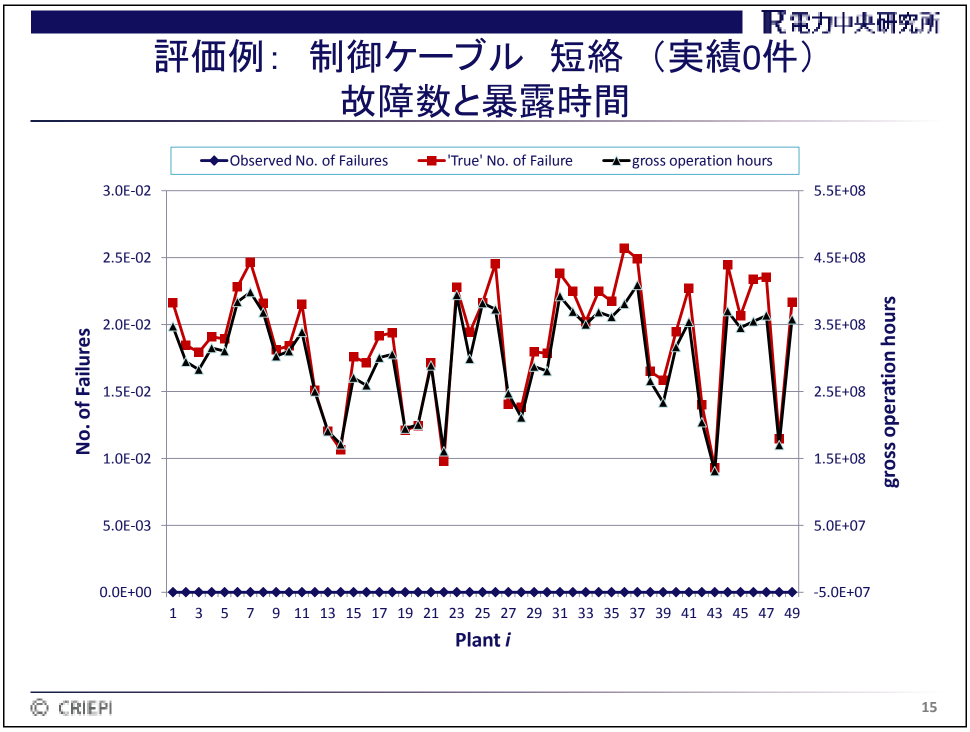
「故障件数の不確実さを考慮した国内一般機器故障率の推定」,（社）日本原子力技術協会, 平成21年5月

 13

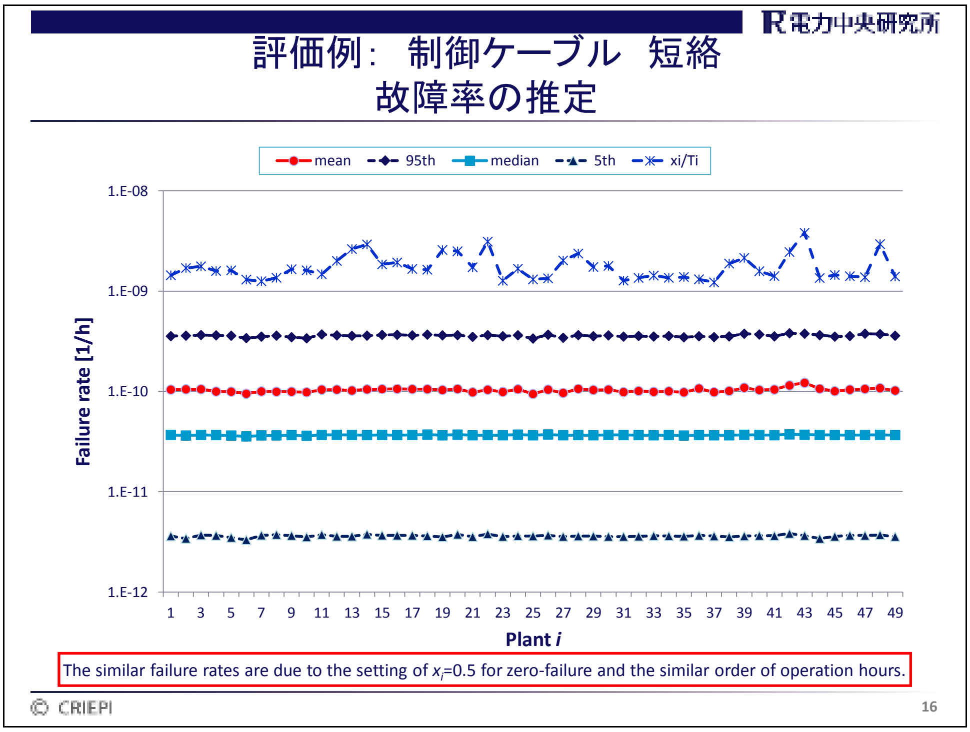
これが BUGS でやったときの Doodle というモデルそのものです。先ほどの物を図に表したような形ですので、このような形。



これで表現をして、故障率を出そうということで、例としまして、まず電動ポンプの継続運転失敗の例ですが、これは少しごちゃごちゃして見にくいのですが。ここの、もともと時間故障率で、先ほど割り算で０件の物は 0.5 件で入れればよいというぐらいでやっていた物が、ここの、このマークでついているグラフになります。実は電動ポンプは割と故障が多いので、それなりにリーズナブルな形になります。要するに、平均値を見てみると、それほど変わらないと。少し跳ねているのは何かといいますと、ここの、今までは最尤法でやっていた物でやるので、跳ねている物は、発電所が新しくて運転時間が短いのですね。簡単に言いますと、同じ故障件数でも、運転時間が短いと故障率としては高くなってしまう、運転時間の比で出てしまうので、新しい発電所ほど信頼性が低いという評価にもともとなっていたものが、ある程度まとまってくるようになってきたというところです。

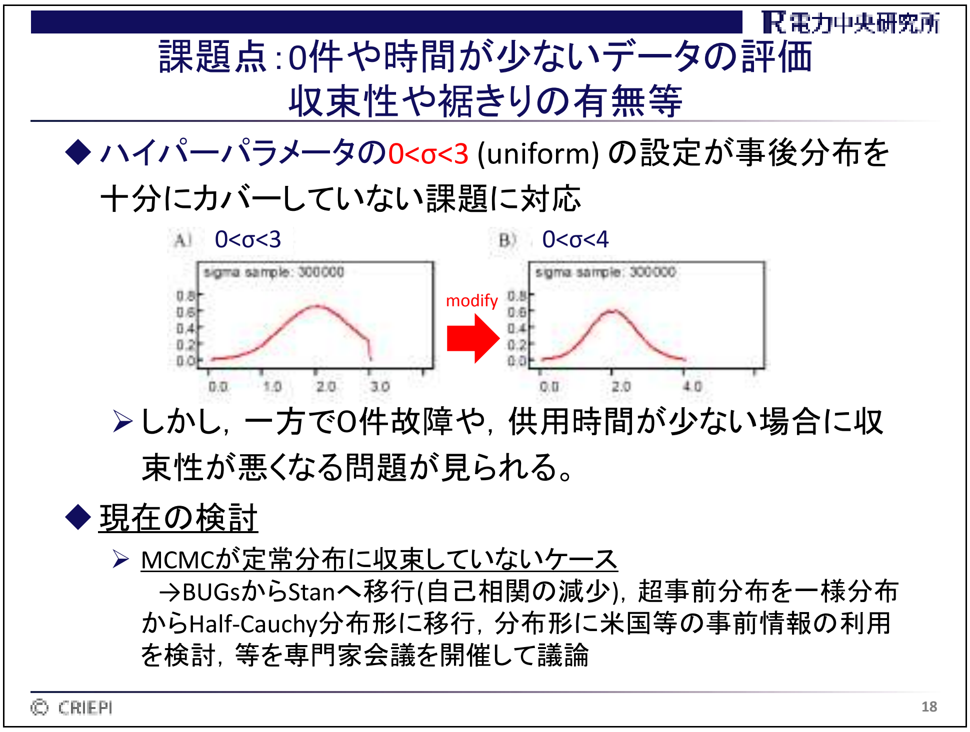


この辺はいいのですけれども、実は、例えば制御ケーブルという、下を見てみると分かるのですけれども、下に何が書いてあるかといいますと、これは故障件数が０件で、日本で１件も故障が起きていないような事例です。簡単にいうと運転時間が、このように分布しているので，単なる比になります。



これを先ほどの物でやると、これは全部 0.5 件として、故障率が計算されているわけですが、先ほどの階層ベイズの形でやると、基本的には全部性質としては皆０件でまとまってきますので、大体このような結果にまとまってきます。要するに、運転時間のただの比になるわけではないという結果が得られることになる。

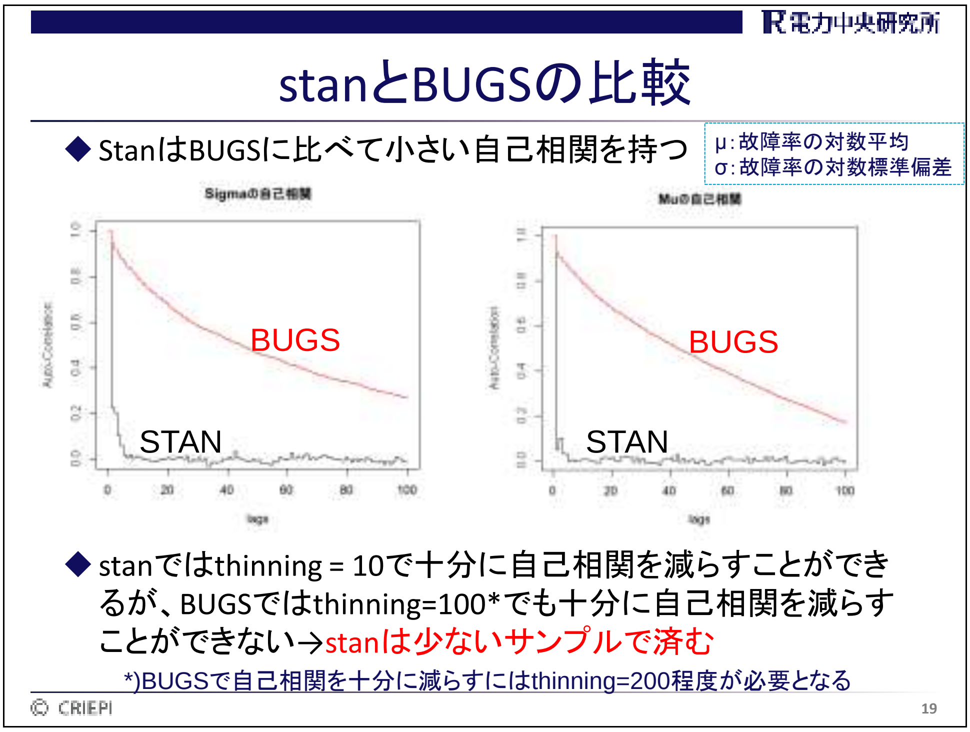
少し今回、短い時間でのご説明ですので、もしこれについて面白いなと思っていただけた方は、先ほどの実はトラブル情報のデータベースで「ニューシア」というデータベースがあります。このニューシアにアクセスしていただくと、ここに「信頼性情報」という所があります。先ほどの、今このベイズを使ってやった評価が、下のここのスクリプトの所も含めて、BUGS でどのようなスクリプトを書いたかも含めて、全部報告書で公開をしています。これは最初にやった 21 か年のデータと、さらに少しリバイスした 26 か年の報告があるのですが、これがダウンロードできます。ぜひ、ご興味があったら、スクリプトを回していただいて、「ああ、そのようにやったのか」と思っていただけると面白いかと思います。



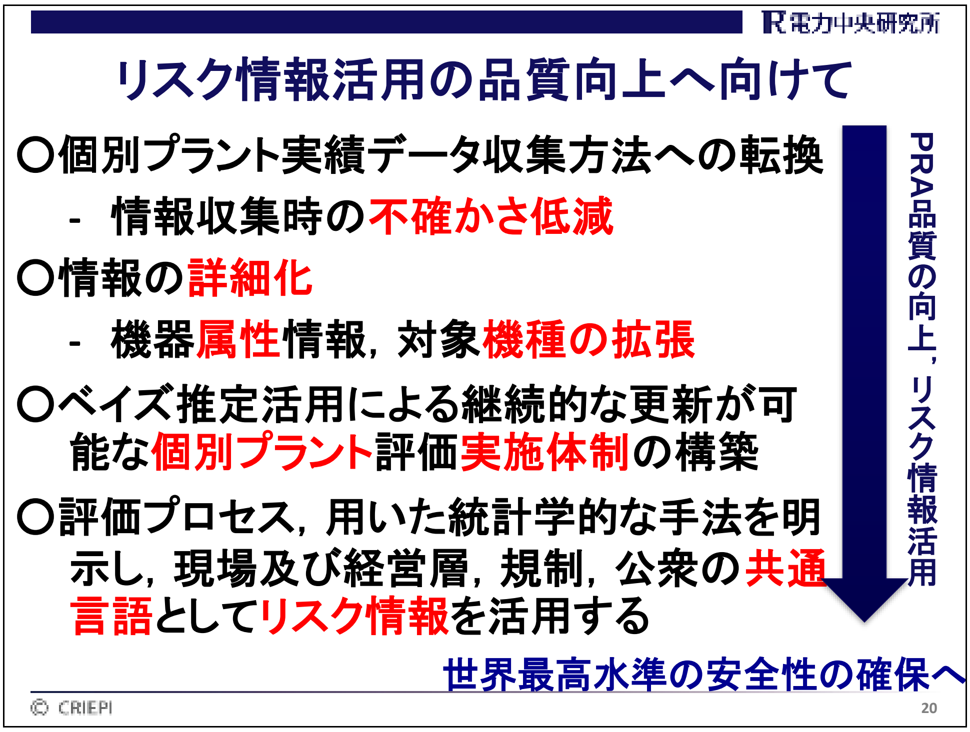
では、今、それではそうやって皆解決したのかと言いますと、実は解決していない所を今議論している部分が実はあります。これは、もともと 21 か年のときに、ハイパーパラメータの σ の幅の設定をするときに、0 といいますか、0.1 なのですけれども、0.1 から 3 までの設定をすると大体十分だろうということで、実は始めたのですけれども、幾つか、実は σ のサンプルを追ってみると、十分に取れていないような故障率が、幾つか見つかりました。分布として、裾がこんと切れていることが分かると思うのですけれども。このような物があるので、実は σ を 4 ぐらいに広げてやったら、十分にロバストな分布の幅が取れるので、広げてやろうかということが、実は 26 か年のときに改訂版でやった作業なのです。

ところが、広げてみたら、広げてみて、入っていくのはいいのですけれども、例えば、ここで大問題が出てきてしまったのは、0 件の故障や、あとは、例えば先ほどのデジタルのように、4 プラントぐらいしかデータがない、暴露時間が非常に少ないという場合には、極めて収束性が悪くなるのですね。要するに、広げた分だけ、実はサンプリングの回数が少ないと、どこかでぽんと外れ値が出てしまう、それに全部平均値が引っ張られてしまうということが分かったので、結構単純に「4 ぐらいでいいかな」というぐらいで、割とばくっと決めたのですけれども、それがあだになって、計算時間をサンプルはこのような回数ではとてもではないけれども収まらないかもしれないという問題が出てきた。ここの収束の可能性をどのようにしなければいけないかというところで、今議論をしていて、これをまたさらに改訂版で 29 か年のデータを使った報告書を、正に作っているところなのです。

まず一つは、この収束性を限られた時間で上げるためにやったことは、BUGS から Stan にツールを移行しましょうと。これで収束性を自己相関性を減少させることで上げましょう。それから、超事前分布を、今まで一様分布でやっていたのですけれども、これも例えばハーフコーシー分布形に移行して、0 件の物も含めて、ある程度収束性を上げるような事前分布のところが取れるようにというところで、形状を変えましょうなど。あとは、もともとは一律に、例えば幅を決めていたのですけれども、そこにある程度、例えばアメリカで今、故障率がある。アメリカの故障率を、事前の物をそのまま使うのではなくて、このときの、例えばハイパーパラメータの幅の設定について、米国のパラメータの情報を利用してやってみて、ある程度リーズナブルなところの幅はどのように取るべきかということを理屈付けしましょうということをやりました。



少し例があった方がよいかということで、Stan にすると何がいいのだというところが、もう少し図的にも見えるかということで作った物がこれです。これは、実際に今やった結果なのですけれども、σ と μ の自己相関のところを見ると、BUGS と Stan で収束のスピードが全然違うことが見て取れる。それで、Thinning が 100 でも、BUGS だと自己相関を減らすことはできないのだけれども、Stan だと 10 ぐらいで早々に減らすことができるというスピードなので、このようなところで効率を上げるというところを補えていることが見えます。



最後になりますが、個別プラントの実績データの収集方法の転換を今度は今目指しています。それで、も

う今の電力会社は、個別の故障率をきちんと出すという方向で動いています。それから、不確かさ低減をするために、データベースの取り方を今変えようということで、枠組みを作っています。それから、詳細化することですね。機器の属性情報や対象とする機器を拡張する。それから、推定に、ベイズ推定で継続的に更新が可能になるということが、これがリスク評価上では一番大事だということで、これの実施体制を電力の中で専門部署を作って自らデータを作らせるというところで、品質を上げようとしているということ。あとは、今、ある程度安全評価の担当部門が中心になっているだけなので、これを現場や経営層、あとは規制や公衆も含めて、共通言語としてきちんとこういうＰＲＡの手法が使えるようにという形でやることを目指して、今やっているということでございます。

発表は以上でございます。ありがとうございます。

【渡辺】　桐本さん、ありがとうございました。原子力発電所という複雑なシステムのリスクの評価で、例えばデータの不足を補うために、どのような工夫をしているかという辺りは、アクチュアリーにとっても大いに参考になるのではないかと思います。

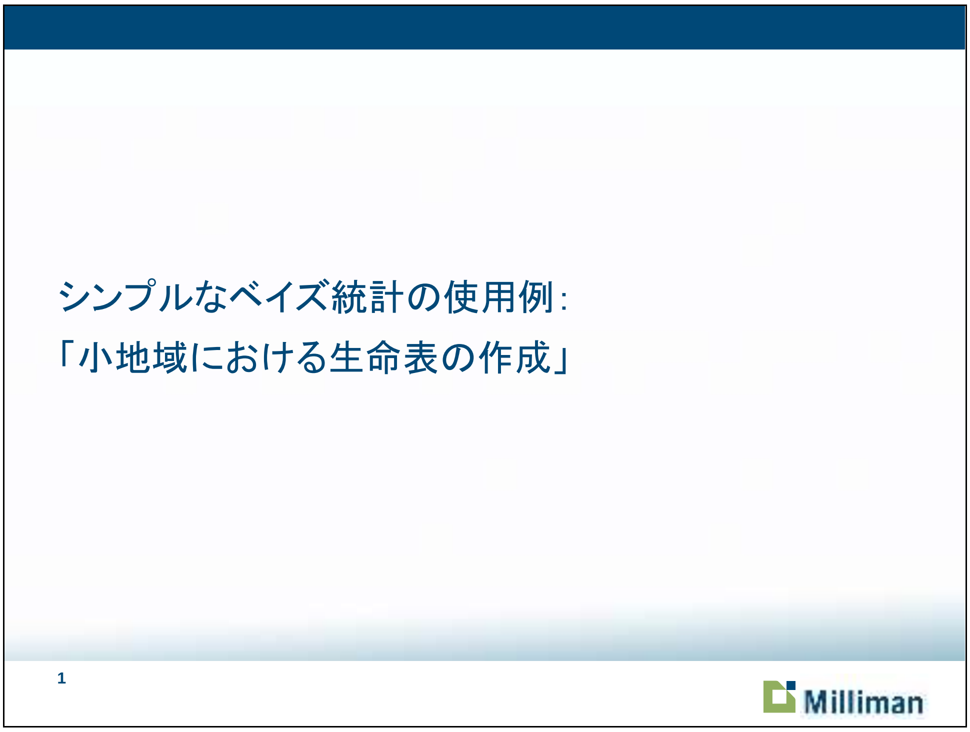
では、最後に出井さん、お願いします。

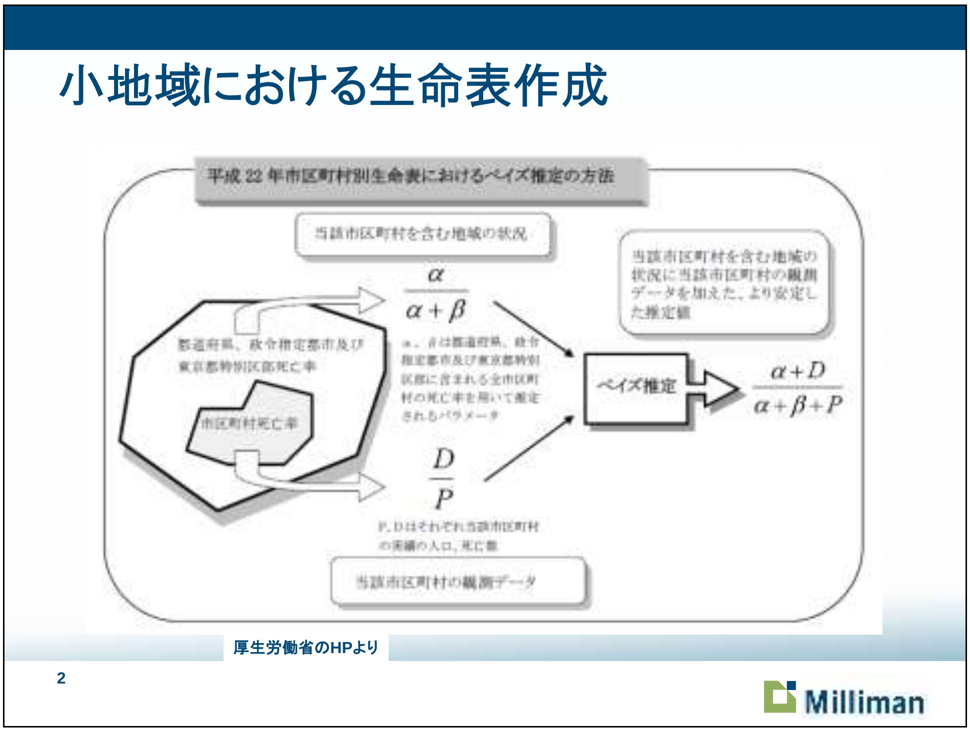
【出井】　はい。ミリマン、出井でございます。どうぞよろしくお願いいたします。

私からは、岩沢さんの非常に好奇心をそそる総括的なお話と、桐本さんの、アクチュアリーとは違う、原子力発電所という業界ながら、非常に洗練されたベイズ統計、ＭＣＭＣ階層ベイズの使用例を見せていただいて、それを受けて、今後アクチュアリーとしてはどのような使い方を取りうるかということを皆さんと一緒に考えていきたいと考えています。

私からは、ベイズ統計を使ったアクチュアリー寄りの事例として、二つ紹介いたします。一つめが、事前分布をあえて与えている事例です。岩沢さんの整理の中でいうと経験ベイズの一種といえる事例なのではないかと思っております。もう一つは、もう少し複雑で、階層ベイズをＭＣＭＣで解いたという事例でござい

ます。そのあと、Stan の使い方についてお話しします。Stan というツールは、桐本さんの説明でも出てきましたが、これで MCMC を比較的簡単に実行できますので、皆様に使い方を軽くご紹介して、私の発表としたいと思っております。





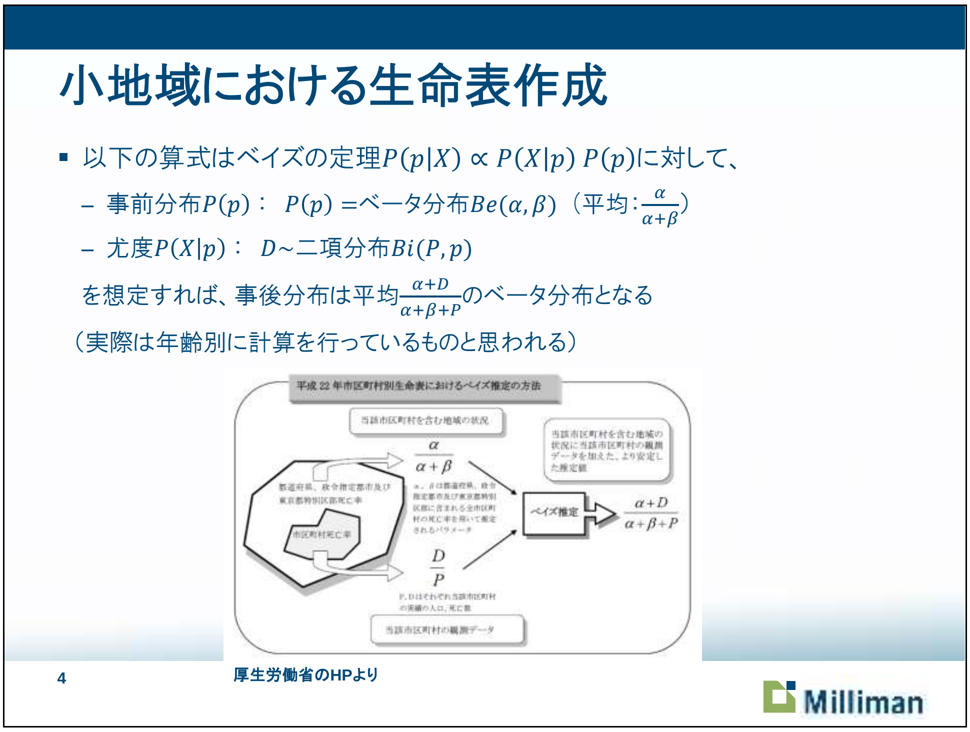
まず一つめの、事前分布を与える方の使用例ですけれども、小地域における生命表の作成というトピックをご紹介します。これ自体は私ではなく厚労省がやった事例で、厚労省のホームページで、ベイズ推定を使用したということとそのイメージをスライドの図にあるようなもので公開しています。

まず、小地域における生命表の作成とは、市区町村別生命表を作るということです。通常、市区町村別と

なると、市はそれなりに人口が多いかもしれないですが、村になると人口がかなり少なく、例えば１年で死亡者が１人でした、１けたでしたということがよくあると思うのですけれども、その中でどのように死亡率を推定できるかというところが、まず問題設定でございます。それをやるために、図ではより広い枠が書いてあって、これが都道府県レベルの死亡率です。で、それより狭い枠である市区町村死亡率がターゲットとする死亡率です。$\alpha/\alpha+\beta$ と書いてあって、これが広い範囲の死亡率を用いて推定されるパラメータであるというような説明が記載されています。狭い範囲の方から出てきた物がD/Pで、ＰとＤは、それぞれの人口と死亡数と書かれていますから、これは単純に点推定した場合の死亡率です。これを使うと、なぜか推定される市区町村別の死亡率推定値は$(\alpha+D)/(\alpha+\beta+P)$になるということが書かれています。

これを私なりにかみ砕いて解釈した物をご説明したいと思います。本来はあくまでも厚労省がやったことで、厚労省ではそこまで細かいやり方を発表しておらず、この図程度しかホームページでは公表していないので、恐らくこのような概念でやられているのではないかという私の解釈であることはご留意ください。

一つめのポイントは、市区町村の生命表では、単純な割り算では結果がぶれてしまうということです。そこで、ベイズ推定を使うということです。



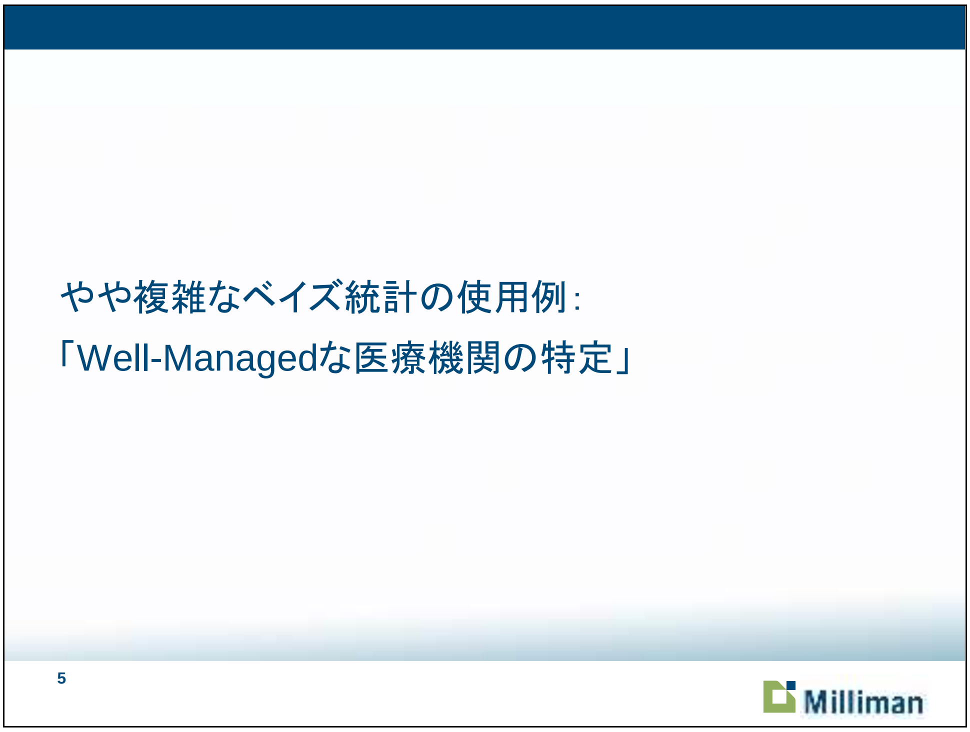
まず、ベイズの定理が恐らくこれまできちんと詳しく説明されていなかったので、念のため細かく説明させていただきます。スライドの「ベイズの定理」右辺にある確率変数の一つであるｐが、発生率なのですがこれをそもそも特定の真の値があるものではなくある確率分布に従う確率変数ととらえます。つまり、P(p)は発生率の分布です。これにより発生数が少ない事象に対する不確かさを反映しようという考えです。この時のP(p)は事前分布と呼ばれるものです。さらに、もしｐという条件が与えられたときの、X が得られる条件付確率として P(X|p)という項が右辺に出てきます。X をデータと考えると、これはｐという条件で X というデータが得られる確率つまり尤度です。P(p)という事前分布に P(X|p)という尤度を掛けると、データを条件とするｐの分布 P(p|X)、つまり事後分布に比例するというのがベイズの定理です。比例するというのは、確率ですので、積分をすると１になるように定数を掛けるということです。

今回の小地域における生命表の作成でいいますと、事前分布というのは、この Be(α,β)分布です。ベータ分布は平均がα／α＋βなので、厚労省の図に記載の物に一致していることがわかるかと思います。つまり、ある都道府県に対して、すべての市区町村の死亡率を単純な死亡数/人口で１個ずつ計算していきますと、ある市では非常に高い死亡率、ある市では非常に低い死亡率と、Ｐ自体に分布が出ると思います。それをベータ分布だと仮定してパラメータ推定を行ったらあるパラメータ、α,βが得られると思います。それを推定することが、まず１個目のプロセスです。

次に、尤度ですけれども。尤度は、Ｐ という母集団に対して、二項分布でＤという死亡が起こる確率ですので、単純に確率ｐによる二項分布による尤度が得られます。Be(α,β)分布と二項分布を掛け合わせると項がうまくまとまって結果、平均が(α+D)/(α＋β+Ｐ)のベータ分布になります。ですから、厚労省の図に記載のものと一致するわけです。実際は年齢別に結果が出されているのでもう少し細かいと思いますが恐らく今お話ししたように、ベータ分布という事前分布の前提、尤度が二項分布であるという前提、二つの前提をおいて計算した物が、厚労省の手法なのだろうと思います。

α,βがパラメータでＰとＤがデータですから、データにパラメータを足して割っているというところで、一見直感に反するのですが、何も間違っているわけではなく、ベイズの定理を考えると実は妥当なやりかた

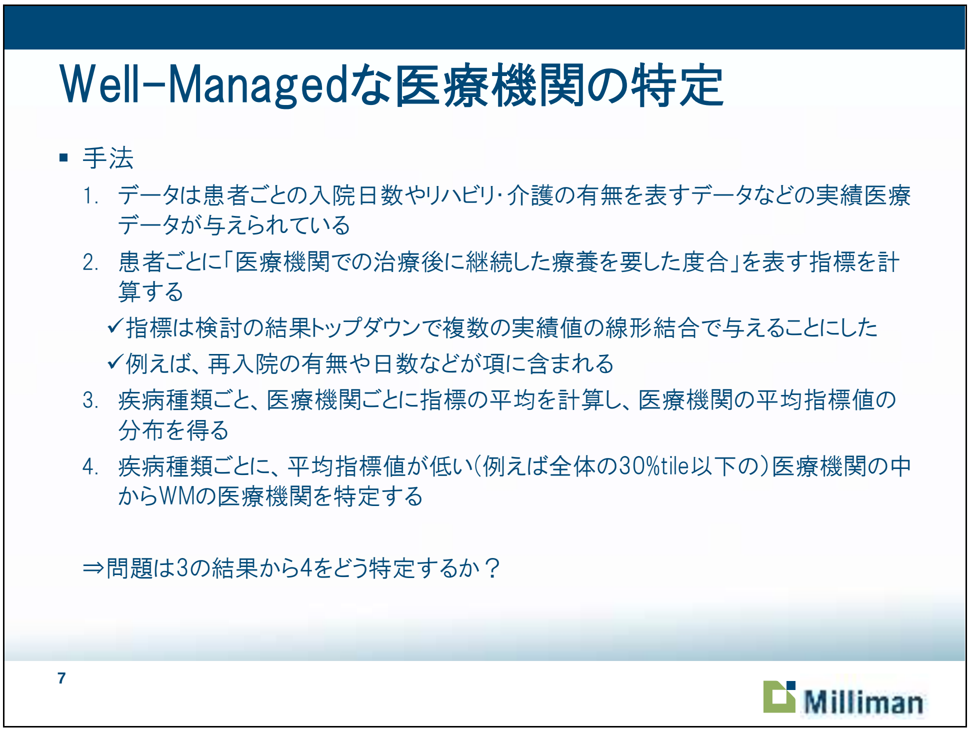
であったということです。事前分布と尤度を記載のように想定した場合の結果は確かに平均が$(\alpha+D)/(\alpha+\beta+P)$のベータ分布になるということが分かるかと思います。



もう一つ、「やや複雑なベイズ統計の使用例」として「Well-managed な医療機関の特定」と題を書いています。やや複雑というのは、階層ベイズを使ってＭＣＭＣで解いているからです。

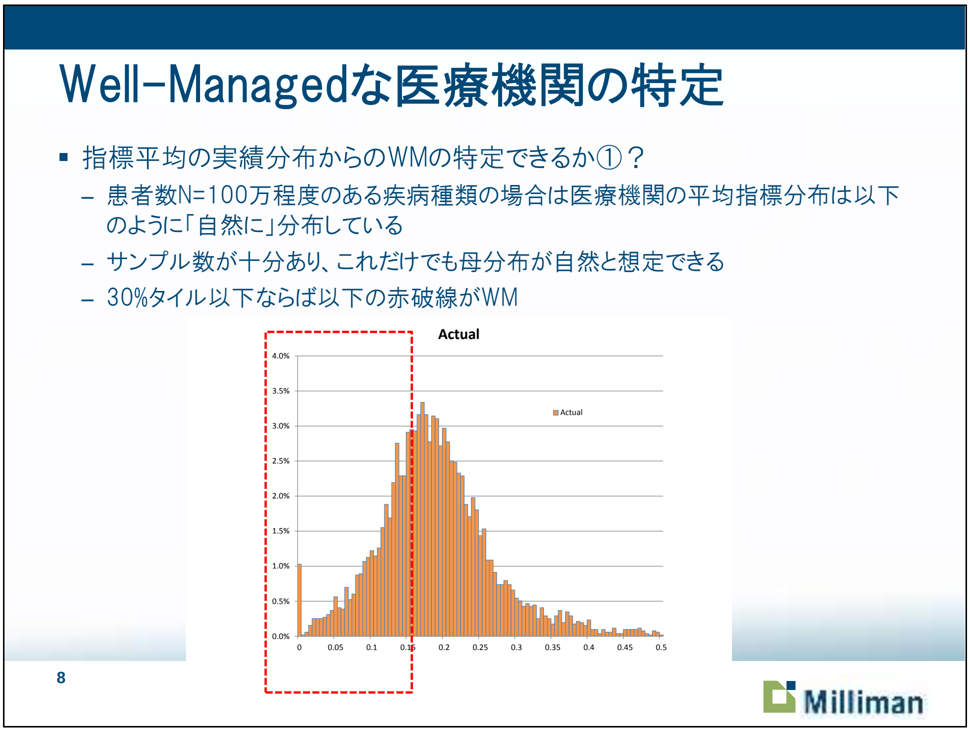
プロジェクトの背景としては、米国で患者ごとの実績医療データがたくさんあるとします。その中で、Well-managed と見なせる医療機関をまず特定することを目標とします。Well-managed とは何かといいますと、治療効果が高い医療を提供していると思われる医療機関です。しかもそれを、疾病種類ごとに特定し

たいというのが目標です。というのも疾病によっては、直しにくい病気、直しやすい病気がありますから、疾病を混ぜてしまうとあまりよくない特定になってしまいますので、疾病種類では分けておきたいということです。最終的には、その Well-managed の医療機関を、全医療機関の平均と比較して、Well-managed とはどのような指標がどれぐらい素晴らしいのかというところを比較するベンチマーク表を作成するところが、このプロジェクトの最終目的なのですが、その部分は単純に Well-managed を特定したら出ますので、Well-managed を特定するところまでが、今回の説明の範囲とお考えください。



手法の説明に入ります。まずデータが患者ごとにたくさんあるとします。それには入院日数やリハビリや介護の有無を示すデータなどの実績医療データがたくさん含まれているとお考えください。その中で、患者ごとに医療機関での治療後に継続した療養を要する度合いを、指標で計算します。この指標の計算方法の設定が、実はこのプロジェクトでは一番大変だったのですけれども、ここは結果的にはトップダウンで複数の実績値の線形結合で与えるとしました。内容については書いていませんけれども、例えば、再入院がその患者にあったのか、再入院があった場合、その日数は何日だったのか、もしくは、リハビリや在宅介護等々のいろいろな指標を足し合わせて、その患者ごとに治療後に継続した療養を要した度合いといえるポイントを、患者ごとに与えてあげることを、まず二つめの手順としてやっています。

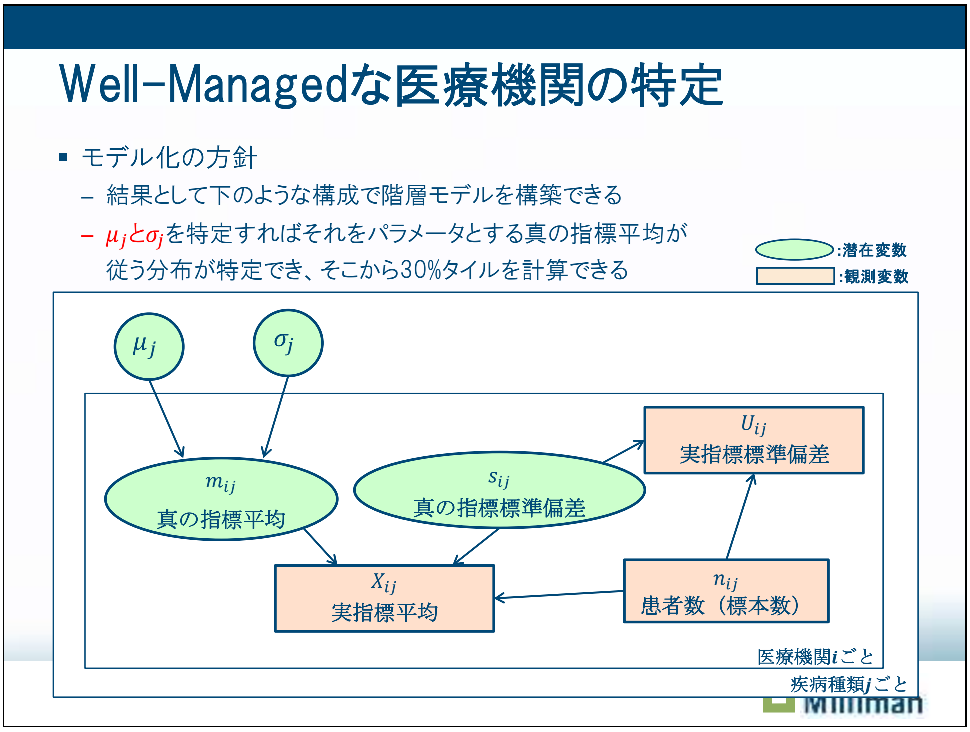
三つめで、それを疾病種類ごと医療機関ごとにまとめて、その指標の平均を出します。そうすると、疾病種類ごと医療機関ごとに平均指標がたくさん得られるので、その分布が分かるということです。すると平均指標値の分布が、得られるわけですが、その中で低めの平均指標を持っている医療機関が、Well-managed な医療機関であると特定するということです。



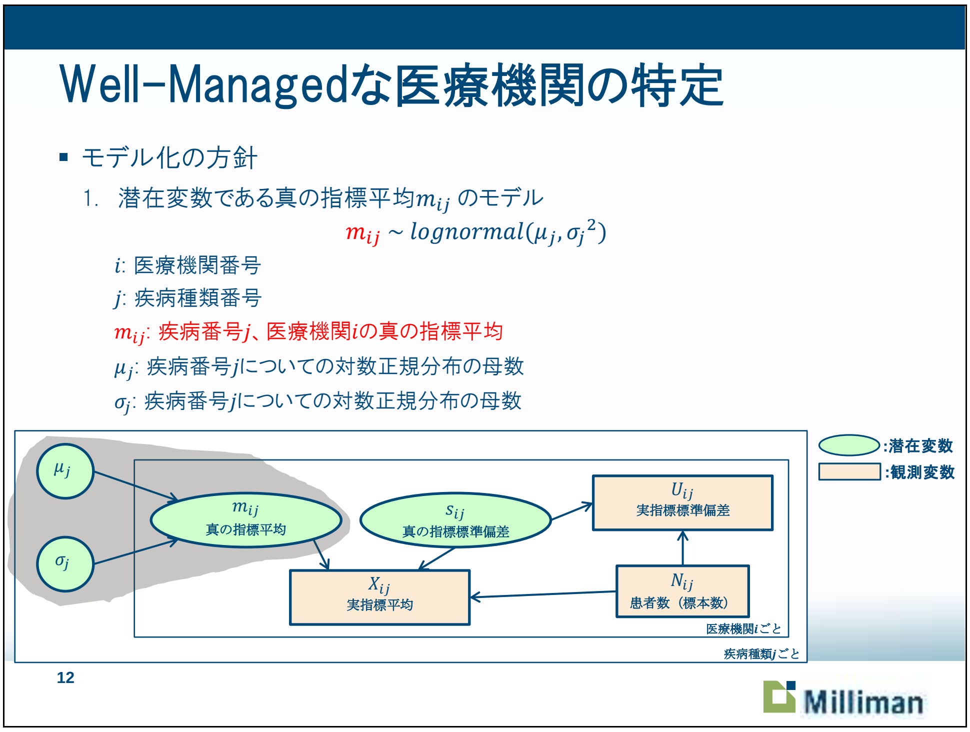
問題は、最後の Well-managed な医療機関の特定をどのようにするかということです。もし、非常に患者数が多い疾病である場合は、各医療機関でも 1 万人、あるいは 5,000 人の患者がいるような疾病ですと、スライドで見せるような割とナチュラルな分布になります。これならば非常に簡単で、仮に 30 パーセンタイル以下を Well-managed とするとしたらこの破線枠内でしょうと簡単に分かると思います。

問題は、患者数が少なく全体でも 5,000 人程度しかいないような疾病種類の場合です。その場合、このスライドのような分布になるのですが、これだと例えば実績データ 30 パーセンタイルを取ると 0 になります。しかし 0 の医療機関の実態を見るとほとんどの場合が、患者が 10 人に満たないような医療機関で、全患者指標

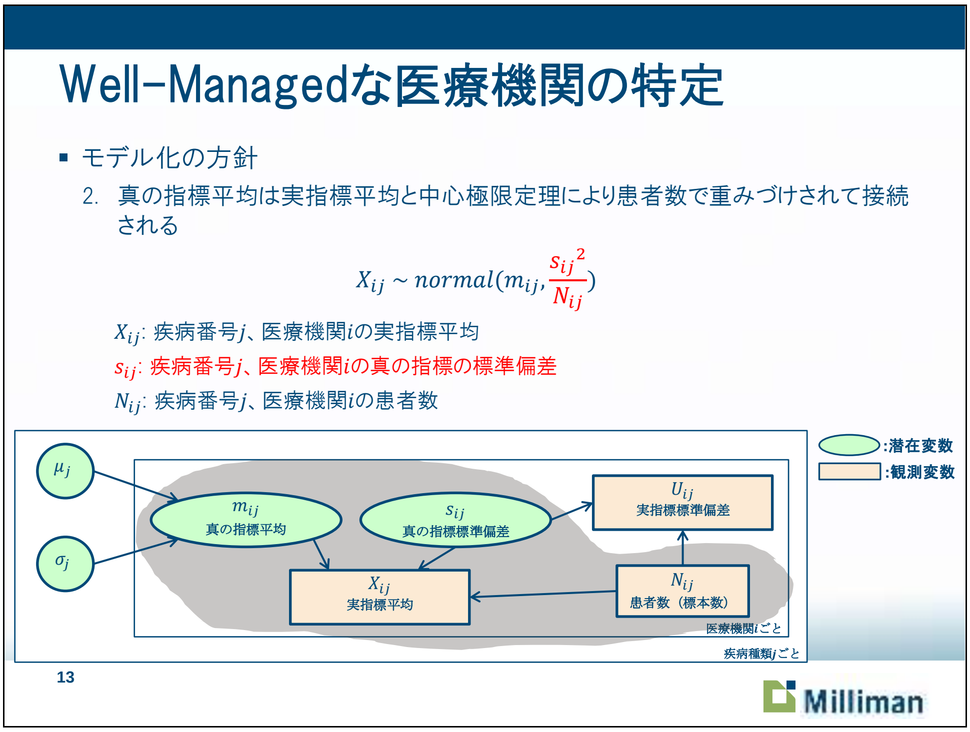
が 0 というパターンです。たまたまサンプル数が少ないためにゼロになってしまっただけで、例えば、同じ疾病種類で各医療機関に 1 万人ずつ患者がもしいたとしたら、恐らくスライドの実線に見せるようなナチュラルな分布になるはずです。ですのでたまたま患者がいないサンプル数が少ない疾病であるというだけで、実績の平均指標を真の値だと考えて 30 パーセンタイルで Well-managed な医療機関を判断することは、やはりよい判断とは言えないと言えます。つまり、サンプル数が少ない疾病種類では、実績は真の分布を反映できていないと考えられるので、その場合は真の分布自体をモデル化してあげなければいけないということがわかります。つまり、階層ベイズで出てくるパラメータのパラメータのような話が必要になります。



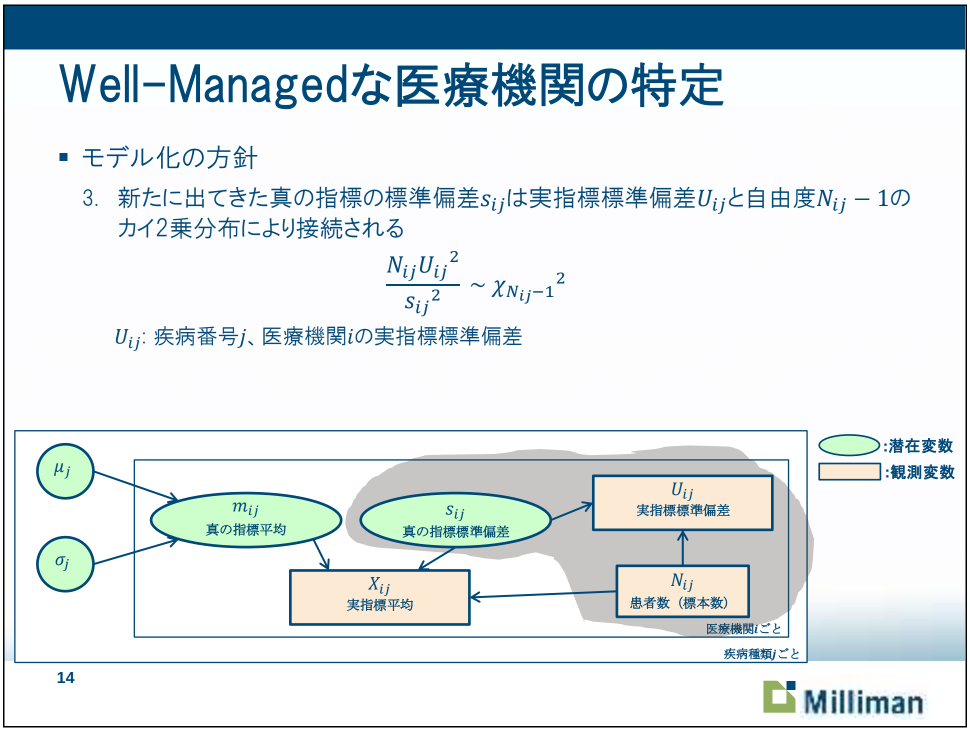
最終的にスライドにある図のような構成でパラメータの関係を想定して、これをＭＣＭＣで解くことをやりました。データとして入れているは、病院、医療機関ごとの実指標平均、患者数つまり標本数、実指標の標準偏差の３つです。それにスライドで緑色となっている潜在変数を付け加えています。これは、それぞれ真の指標平均、真の指標標準偏差であると書いています。中身は追々説明いたします。さらに真の指標平均は、医療機関ごとでない疾病種類ごとの、さらにメタな母数を二つ μ と σ を持っています。求めたい物は、この中でいいますと、μ と σ です。それらを出せば、医療機関ごとに真の指標平均がどのような分布を持つかということが分かったということですので、つまり先ほどの「ナチュラルな分布」と呼んでいたものが得られるわけで、その 30 パーセンタイルを特定したらどの辺の医療機関がいい医療機関なのかということが分かるわけです。



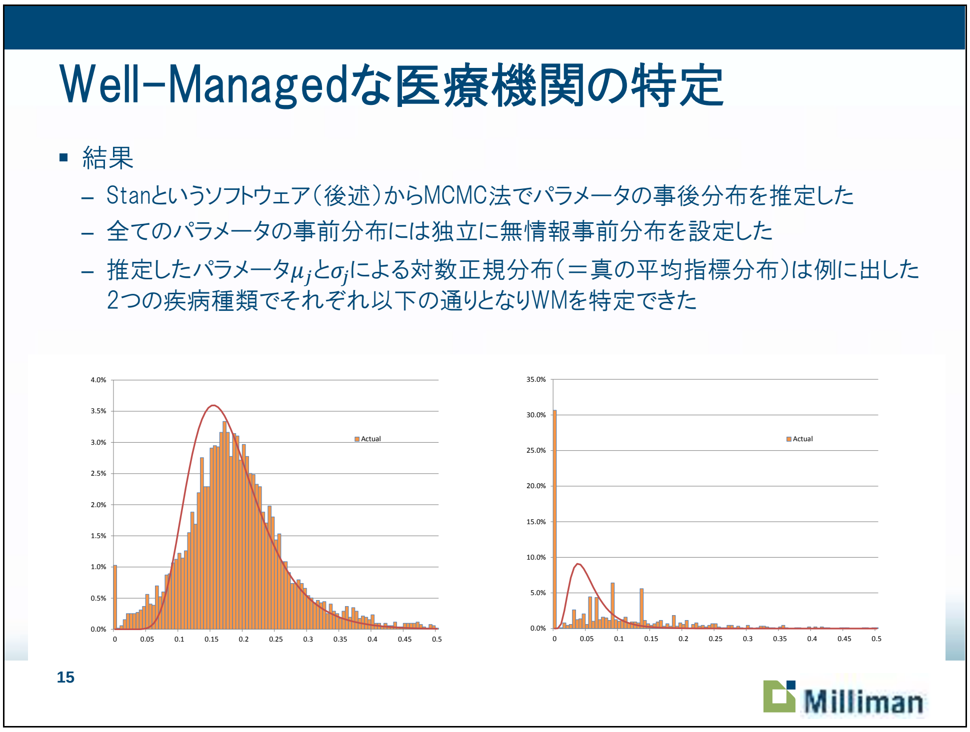
もう少し、モデルの中身を説明しますと、まず潜在変数である真の指標平均 m_{ij} はメタなパラメータ μ と σ の二つの log-normal であるという条件を与えました。



もう一つのモデルは、実指標平均が、真の指標平均と真の指標標準偏差と標本数である患者数から、このスライドにある式をとなります。これは有名な中心極限定理です。ですから、N が非常に多いと、ほぼ m は真と実指標平均というのが一致するようなタイプの正規分布になるということです。非常に N が少ないと、実指標平均がぶれるということですね。

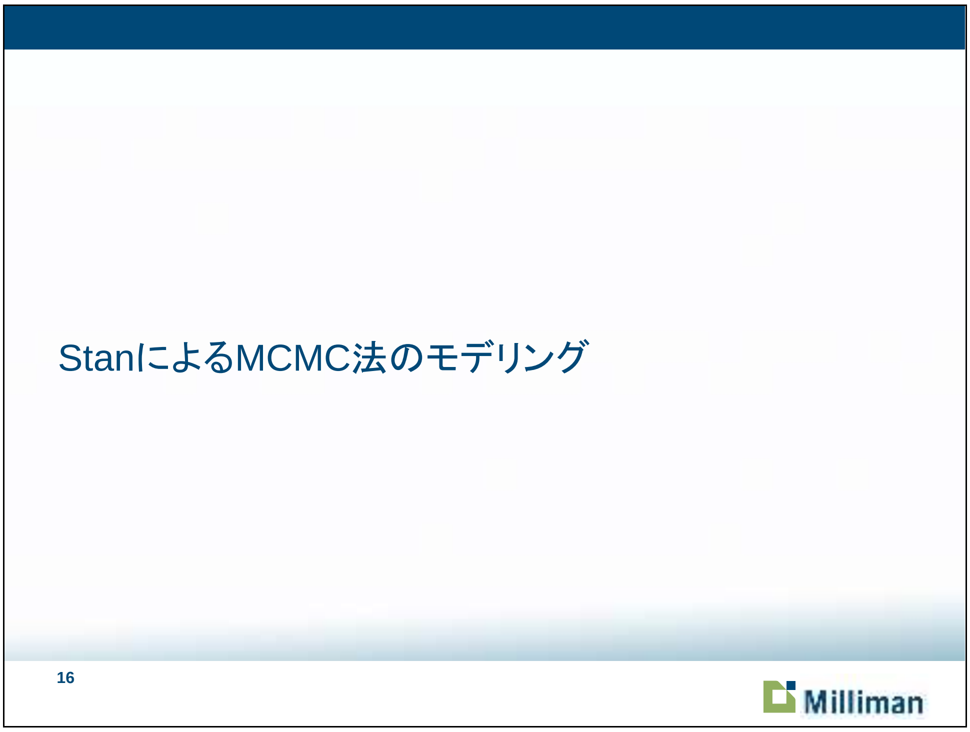


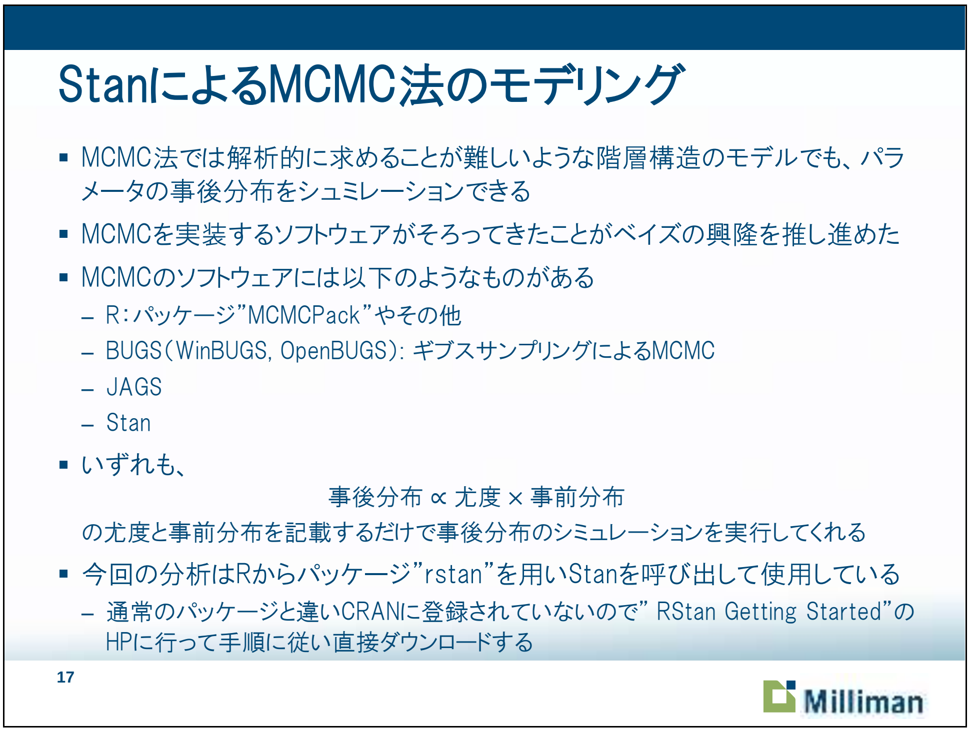
もう一つ、真の標準偏差を縛る式として、サンプル数×実分散／真の分散は自由度 *N-1* のカイ二乗分布に従うという式になります。



パラメータ推定をどのように実行したか、また後にお話ししますが、推定の実行は Stan というソフトウェアで行いました。これは桐本さんが使われている物と同じ物です。これで、MCMCを実行しパラメータの事後分布を推定しました。推定したパラメータは、この μ と σ です。すべてのパラメータの事前分布には、独立に無情報事前分布を設定しました。岩沢さんの説明からお借りしますと、階層ベイズの無情報事前分布という黄金コンビでやっています。

推定したパラメータに対する正規分布は、例に出した二つの疾病で、それぞれスライドの曲線の通りとなりました。患者数が多い左の方が、大体実績と合っていることは当たり前ですが右の患者数が少ない方も、きちんと推定できたように見えます。これら推定結果から、Well-managed がどのあたりか知ることができました。



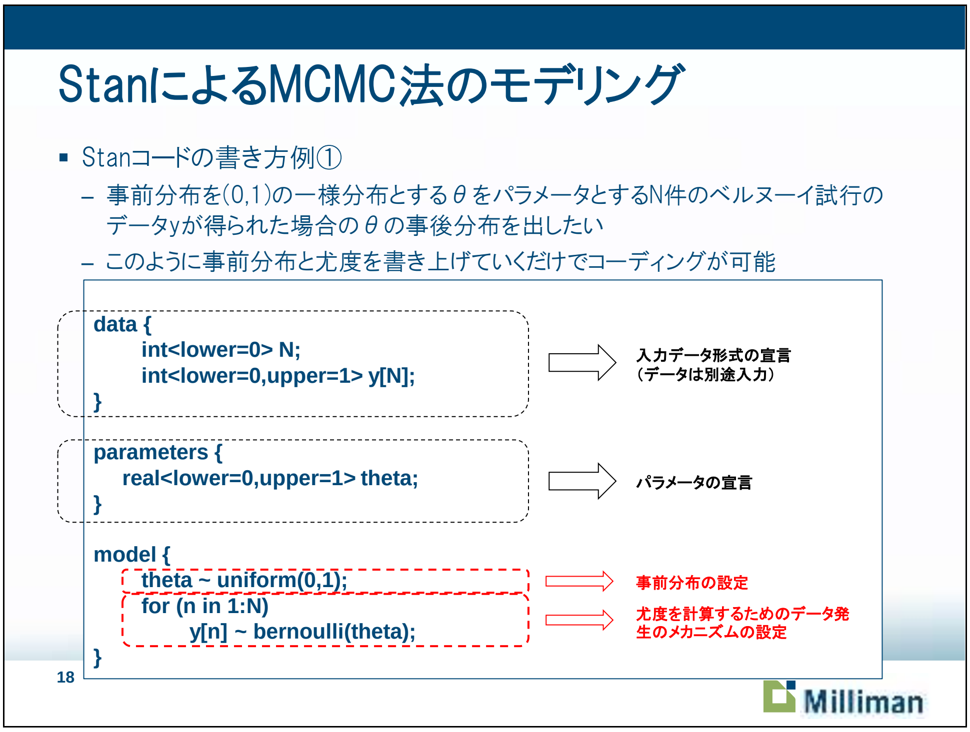


ここからは、事例の紹介から少し離れまして、Stan そのもののご紹介を、実際の簡単な使い方のご紹介も含めてさせていただきます。ＭＣＭＣ法では、解析的にパラメータの結果を求めることが難しいような階層構造のモデルでも、シミュレーションによって推定することができます。岩沢さんの説明にもありましたよ

うに、Stan のようなＭＣＭＣを実装するソフトウェアが出てきたことが、ＭＣＭＣの普及をかなり押し進めました。

実際にソフトウェアにどのようなものがあるかを簡単にご紹介します。有名どころでは、Ｒのパッケージの MCMCpack です。あとは BUGS です。BUGS は Bayesian inference Using Gibbs Sampling の省略で、Gibbs Sampling というアルゴリズムを使った MCMC を実行してくれるソフトウェアです。WinBUGS や OpenBUGS などがあります。Gibbs Sampling を使っているものでは JAGS も有名です。今回の事例で使っているソフトウェアは Stan というものです。

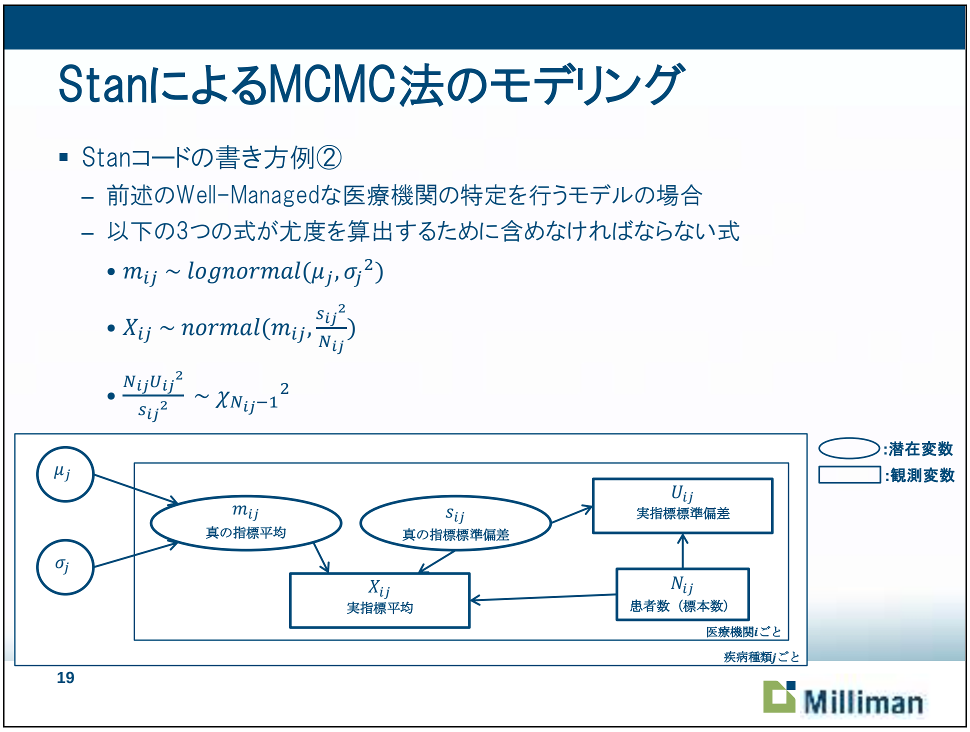
いずれも、ベイズの定理をベースにしていますが、これらソフトウェアが非常に優れている点としては、何か特殊なロジックを入れなくてもよくて、尤度と事前分布はこれだと教えてあげるだけで、事後分布をシミュレーションできるところです。今回の分析は R に Stan を上乗せして使える rstan というパッケージを使っています。これは少し特殊なパッケージのようで、通常 R からパッケージをダウンロードできる CRAN という所に登録がされていないので、rstan を配布しているサイトを検索して直接ダウンロードします。多くの場合は、そのままさっくりインストールできるようなのですけれども、たまにインストールの過程で引っかかることもあるという話を聞いていますので、ご注意ください。



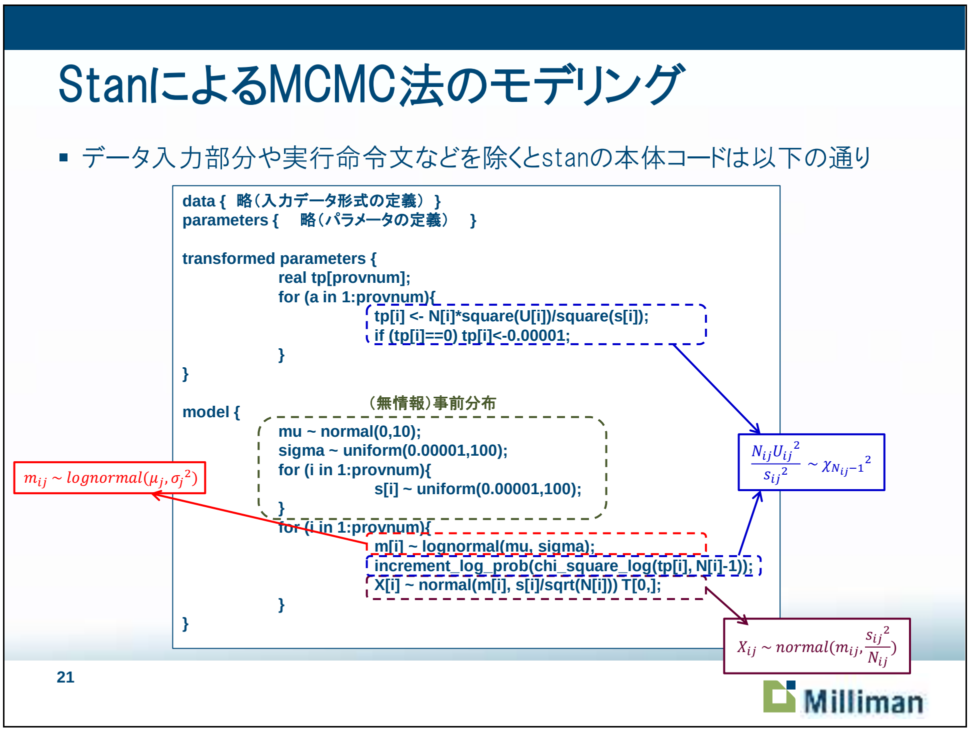
Stan のコードの書き方ですが、多分一番簡単な例を出すと、このスライドのような例になります。何をしているかというと、事前分布が(0,1)の一様分布であるθをパラメータとするｎ件のベルヌーイ試行のデータｙ が得られた場合の、θの事後分布を出したい。だから、θが何か分からないけれども、とにかくθで発生するような確率が起こる試行をｎ回したら、ｙ回返ってきたというパターンです。このときに、Stan ではどのようなコードを書けばよいかというと、実質的にこの一番下の３行だけです。上の２つのパラグラフは入力データの宣言や、パラメータの宣言をしているだけです。入力データはｎとｙ、パラメータθはです。下の３行のうち一番上の行ではθの事前分布は一様分布 U(0,1)を設定しますと書いてあります。ｎ回やったらｙ回返ってきたけれども、そこはθというパラメータをもってベルヌーイ試行によって出ましたと書いてあるだけで、これは言ってみれば尤度です。θというパラメータありきの場合のＹの発生確率なので、単純に

尤度です。

見ていただければ分かるように、確率分布もチルダを使って書いてあるなどしてほとんどそのまま読めて非常に分かりやすくできています。



では、今回の Well-managed な医療機関特定の事例の場合ですけれども、尤度で使われる物は、スライドの三つの式です。結果、コードはこのような形になりました。

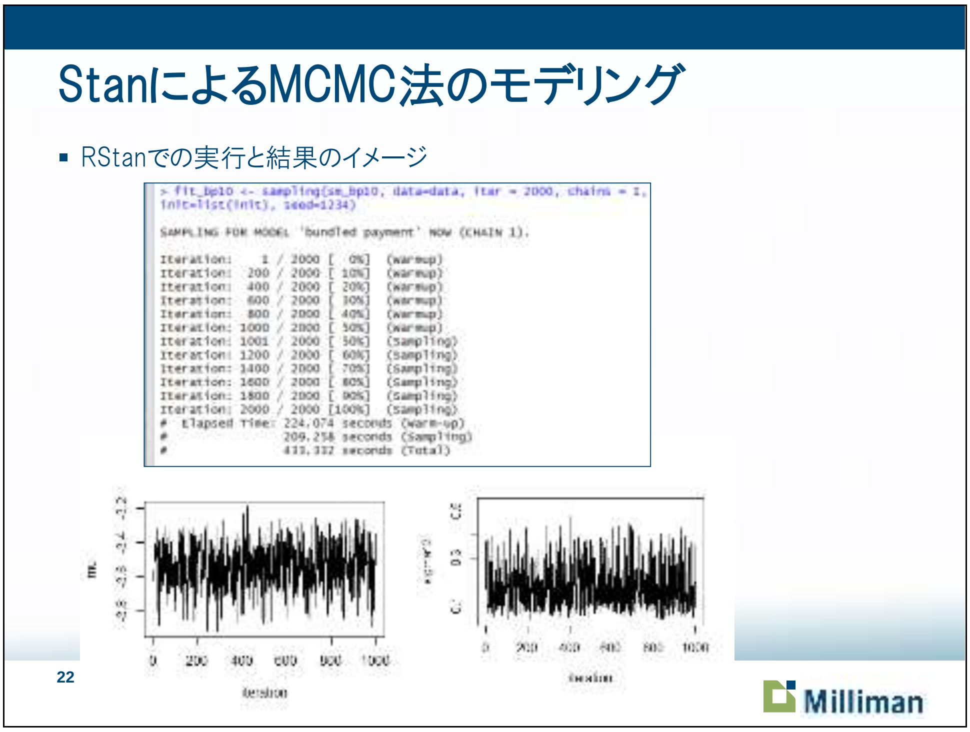


データ形式の定義とパラメータの定義の箇所は省略していますが、ここはそれほど難しくないです。続けて transformed parameters というセクションがあり、さらに model というセクションがあります。まず model

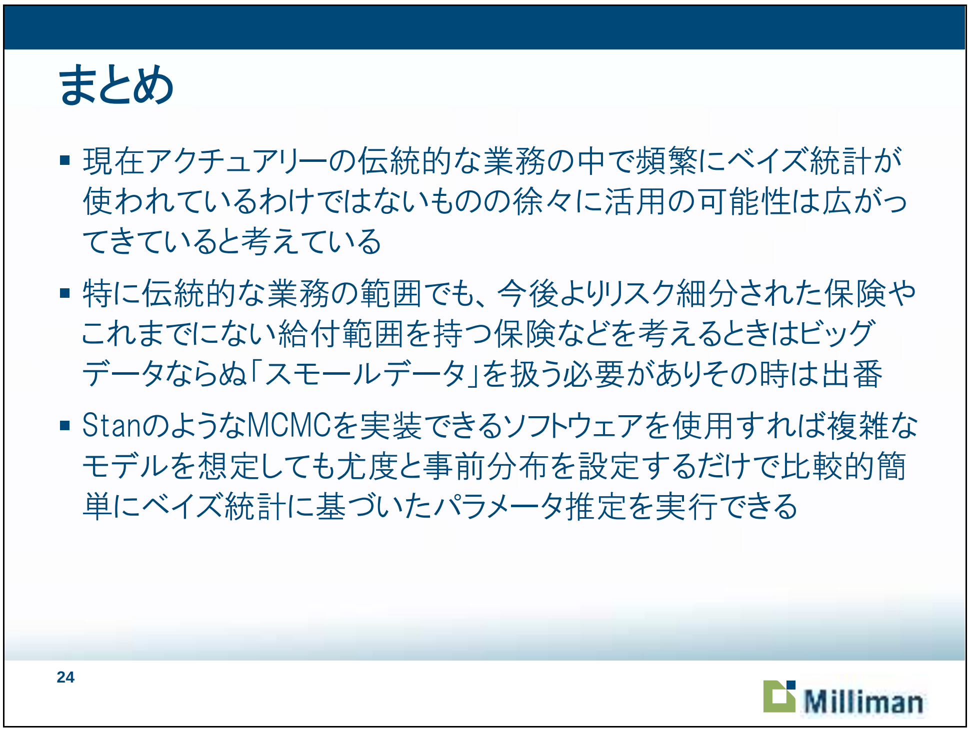
のセクションから分解してみていきます。この m[i]で始まる行が m_{ij}~*log-normal*(μ, σ)です。先ほども申しましたように、数式がほぼそのまま表現されています。X[i]の行は、X_{ij}~*normal* (m_{ij} ,s^2/N)で、これは中心極限定理の部分を表現しています。

もう一つは、少し形がトリッキーでしたので、単純に 1 文では書けなかったのですけれども。transformed parameters のセクションで少し変形をした変数を例外処理などもしつつあらかじめ用意して、それを model セクションでカイ二乗分布に当てはめています。これも、書き方は特殊なのですけれども、ある程度決まった形式ですので、それほど難しい話ではないです。

事前分布は、無情報事前分布を、ここで設定していまして、μは、平均 0、分散が 10 の正規分布です。σは、ここで 0 を含めてしまうとエラーになるため 0.00001 から 100、つまりほぼ 0 から 100 の一様分布を設定しました。s もほぼ 0 から 100 の一様分布を設定しました。ですから、非常に平べったく範囲の広い分布を設定してあげて偏りのない事前分布でシミュレーションを始めます。



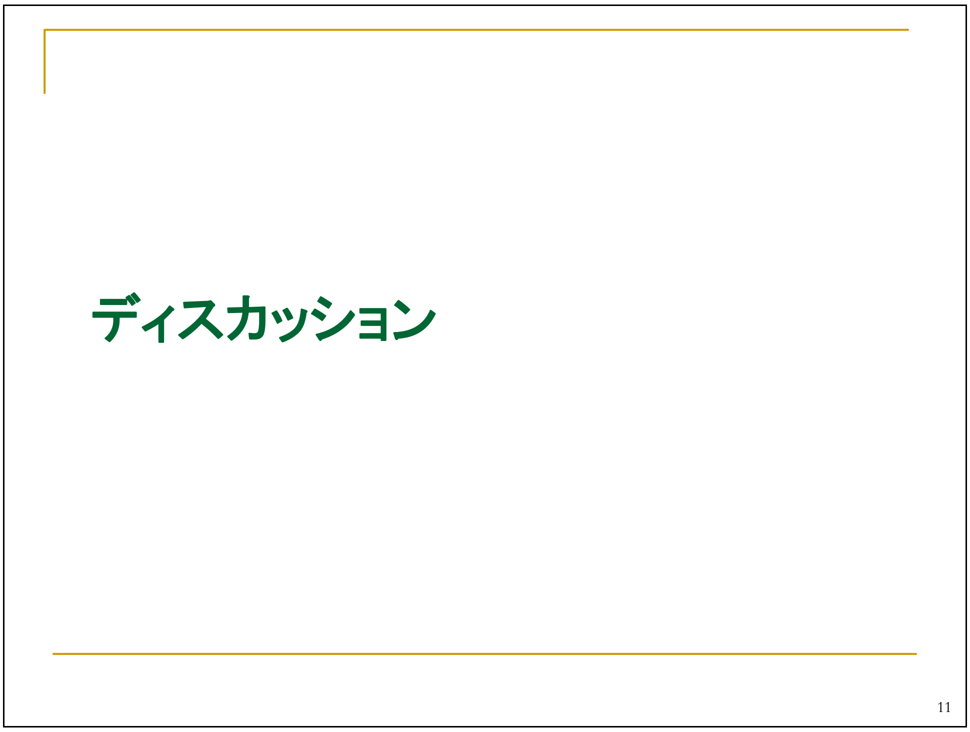
実際に MCMC を実行すると、このスライドのような出力になります。sampling という関数でサンプリングを実行すると、「今 1 件目始めました」「200 件目行きました」「2,000 件完了しました」「トータル 433 秒かかりました」などという経過を順次出力して、シミュレーション結果は R の変数に収めてくれます。結果をグラフ化すると、μが左のグラフのような感じで、σの二乗は右のグラフのような感じになります。これのグラフの意味は、MCMC ではシミュレーションをして、μの真の値を探すということをやりますので、横軸が一つ一つのシミュレーションで縦軸がμの推定値でして、ある時点のシミュレーションではμはこのくらいかと思っていて、次のシミュレーションでは別のμに移動してなどということを繰り返していくと、このようなある値を行ったり来たりしたグラフになります。この結果は、結構よい収束をしています。といいますのは、大体の中心があるうえで上下にバランスよく行ったり来たりしていることがグラフから分かります。これが、もし収束していなかったら、上の方に偏っていたと思ったら、突然あるシミュレーションで下に飛んできてしばらくそこにとどまってまたまた戻ってきたりしますので、今回の収束がいいということは、グラフを見れば分かるかと思います。



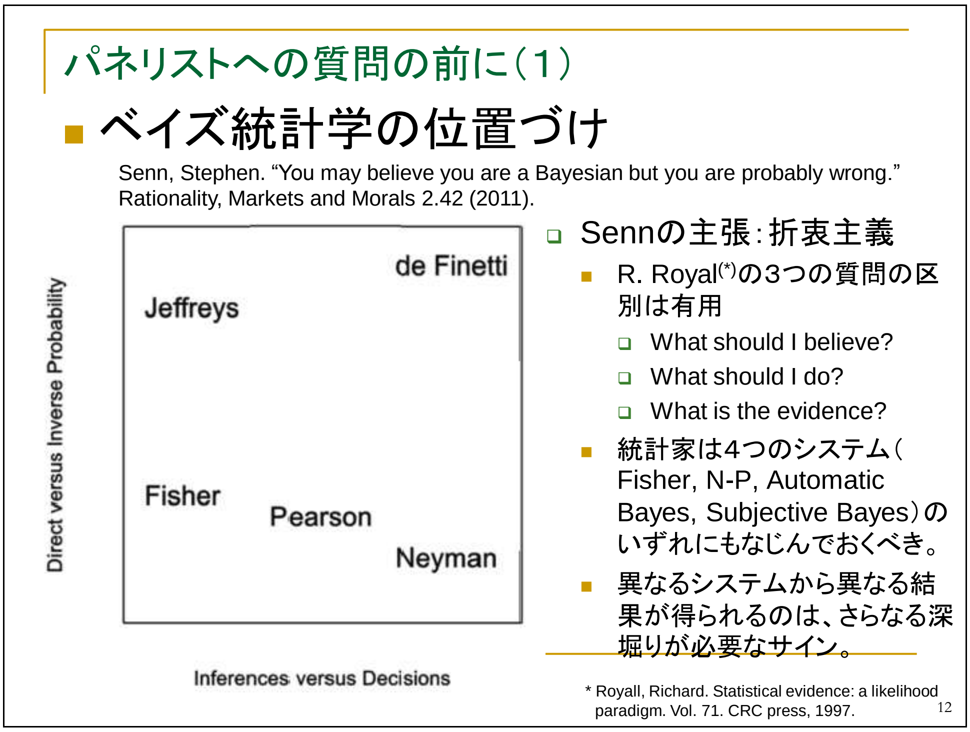
以上、いくつかの内容にまたがってご説明しました。まとめとしましては、第一に現在のアクチュアリーが伝統的な業務の中で、頻繁にベイズを使っているわけではないと思いますが徐々にその活用の場は広がってきているのではないかということです。特に、リスク細分化された保険や、これまでにない給付範囲を持つような保険を考えるときは、ビッグデータならぬサンプル数が小さいスモールデータを扱うことになりますので、そのときはベイズ統計の出番ではないかと思っています。次のポイントとしては仮に、難しいややこしいパラメータ構成を持つモデルを想定しても、Stan のようなＭＣＭＣの実装をサポートするソフトウェアがあれば、尤度と事前分布の設定という比較的シンプルな手順で、簡単にベイズ統計に基づいたパラメー

タを推定できるというところがあると思います。
　以上、私からの発表を終了とさせていただきます。

【渡辺】　ありがとうございました。出井さんから、実際の業務で使われた事例について、モデルの詳細説明だけではなくて、分析のためのコードの紹介までいただきました。始めてみたい方は、ぜひともこれを参考にいろいろ試していただいて、結果が出たら、ぜひ来年の年次大会で論文発表をしていただきたいと思います。よろしくお願いします。



　それでは、ここからいよいよディスカッションに入りたいと思います。私からパネリストの皆さんに質問をしていくのですが、それに先立ちまして、幾つかの追加の情報をご提供したいと考えています。



１点めですが、岩沢さんのスライドの６ページ、７ページ辺りに、推測統計の立役者のフィッシャー、ネイマンという方や、あるいはベイズの先駆者として、ジェフリーズ、デ・フィネッティなどの方々の名前が出てきていましたけれども、それぞれどのような関係になるのかというところを、マトリックスで表現した図が、このスティーブン・センという方の論文にありましたので、それをご紹介したいと思います。

まず、縦軸が、direct VS inverse probability となっています。下の方にフィッシャー、ピアソン、ネイマンと名前が挙がっていますけれども、こちらが、原因があって、結果の確率を考えるという通常の確率を扱うところです。一方で、上側が何かといいますと、こちらはジェフリーズやデ・フィネッティでありますけれども、ベイズです。結果があって、原因の確率を考える。これを「逆確率」といっているのですけれども、それを表す軸です。

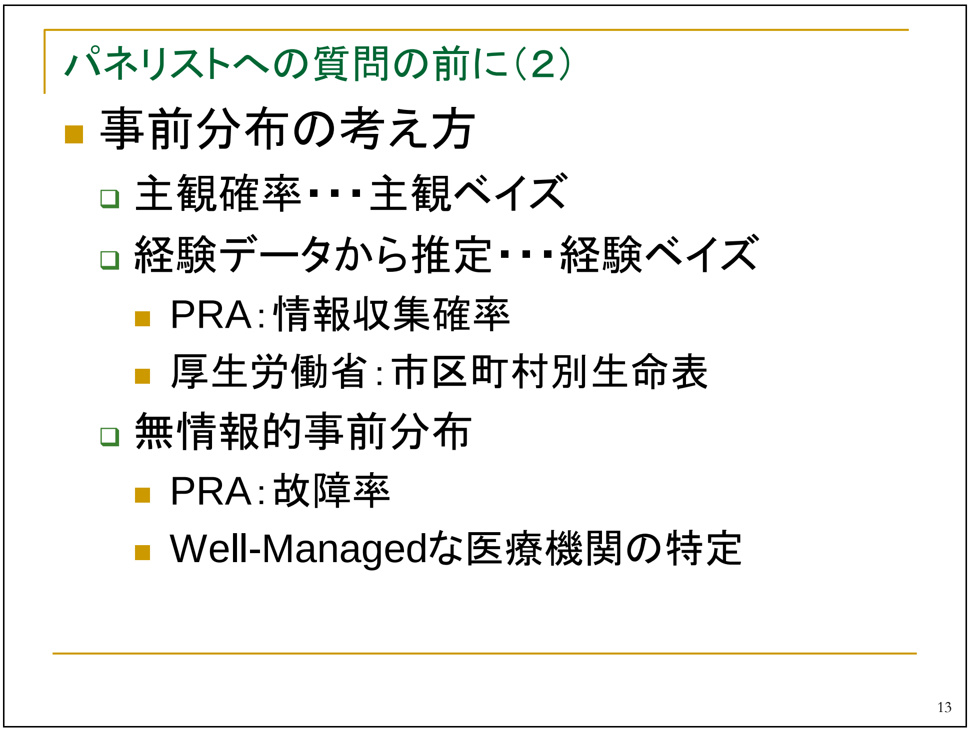
一方で、横軸が何かといいますと、これは推定なのか決定なのかという軸です。例えば、ネイマンが一番決定の方の端にいますけれども、仮説検定理論などを考えていただければいいかと思うのですが、仮説があったときに、それを受け入れるか否定をするかということを、統計分析のシステムの中で決めてしまう、一定の基準を決めたうえで、それに沿って判断していくということが仮説検定理論ですので、これが決定に重きを置いたアプローチだということです。一方で、左の推定の方の端にフィッシャーがいます。フィッシャーという人はｐ値を重視していたわけなのですけれども、ｐ値を計算はするのですが、それに対して、例えば一定のバーを設けて、これと比べてどうであれば仮説を棄却する、あるいは採択するなど、そのようなことまではあらかじめ決めないという立場を取っており、あくまでも統計の分析とは推定のためのツールだという立場でしたので、こちら側にいるということです。ちなみに、間にピアソンがいますけれども、これは岩沢さんのスライドに出てきていたカール・ピアソンではなくて、その息子のエゴン・ピアソンの方です。ネイマン＝ピアソンのピアソンということです。

一方で、上の方に行きますと、推定の方の端のベイズ側に、ジェフリーズがいます。ジェフリーズというのは、無情報的事前分布のアプローチです。なるべくデータに語らせようという立場です。一方で反対側にデ・フィネッティがいます。こちらは主観確率の立場です。意思決定をするのであれば、データに語らせる

などと悠長なことを言っているのではなくて、持っている情報を何でも使わないと意思決定できないではないかということで、主観確率を積極的に使っていこうという立場です。このような４つの立場があります。

このセンの主張は何かといいますと、「皆使えばいいではないか」という、折衷主義ですね。何を主張しているかといいますと、リチャード・ロイヤルという方の、統計を使うに当たっての３つの種類の問いを挙げています。上から順番に、何を信じるべきなのか、何をすべきか、証拠は何か。３つめは、元のロイヤルの表現に沿っていいますと、データを証拠としてどのように解釈するべきなのかと言っているのですけれども、要は、この３つの種類の問いがあり、何をしたいかによって、適切な手法が違ってきます、ということです。

だから、ベイズがよいとかだめだということではなくて、統計をやる人たちは、４つのシステムのすべてになじんでおくべきだというのが、センさんの主張です。４つとはフィッシャー、ネイマン＝ピアソン、ジェフリーズのオートマチックベイズ、主観ベイズです。もし、異なるシステムから異なる結果が得られるのであれば、それはさらなる深掘りが必要なサインだと受け止めるべきだという主張をしておられるということです。ということで、ベイズはこのような位置にありまして、センも、岩沢さんが先ほど言われていましたように、ベイズかどうかというところを判別する軸としては、主観確率という物を一切持ち出してきていません。主観確率を使うかどうかということは、ベイズかどうかということはまた別の軸だということです。



それから、２つめです。岩沢さんのスライドの 17 ページ辺りから、事前分布についてのお話がありました。事前分布を決めるアプローチが幾つかありますということで、主観確率を使うのか、経験データから推定するのか、無情報的事前分布を使うのかと、いろいろアプローチがあります。それぞれ、桐本さん、出井さんから発表いただいた手法がどれに当たるのかということをまとめた物が、これです。主観確率を使っているという方は、おられませんね。経験ベイズ、経験データから推定したという物は、桐本さんの方でいいますと、情報収集確率。あれは過去の実績データから推定したということでしたので、これに当たるかと思います。それから、出井さんの方でいいますと、前半の厚生労働省の市区町村別の生命表。こちらでは、経験データを使って、事前分布を決めていたということで、経験ベイズです。それから最後、無情報的事前分布は、それ以外すべてということですが、桐本さんの方でいいますと、故障率です。出井さんの方でいいますと、

後半の方の Well-managed な医療機関特定のモデルで使っていたすべてのパラメータは、無情報的事前分布だったということで、このような考え方で設定されているということです。

パネリストへの質問の前に（3）

- アクチュアリーの伝統的業務分野では
  - 支払備金の見積もり
    - Zhang, Yanwei, Vanja Dukic, and James Guszcza. "A Bayesian Nonlinear Model for Forecasting Insurance Loss Payments."
  - 保険金総額分布のモデル化
    - Ausın, M. C., et al. "Bayesian analysis of aggregate loss models."
  - 依存関係のモデル化
    - Arbenz, Philipp, and Davide Canestraro. "Estimating copulas for insurance from scarce observations, Expert Opinion and Prior Information: A Bayesian Approach."

14

それから最後、３つめです。では一方で、アクチュアリーの伝統的な分野でどのような使い道があるのかというところを、私の方で調べてみて、見つかったところを並べています。今日は、中身までご紹介している時間がありませんので、タイトルだけでご勘弁ください。一番上に書いた物は、支払備金の見積もりです。これは、軽く中身だけ言いますと、ロスディベロップメントにパラメトリックなカーブを仮定しまして、それのパラメータをベイズで推定するという論文です。それから、２つめです。保険金総額分布のモデル化。これは何かといいますと、クレームの時間間隔と規模の分布を決めてやります。そのパラメータをベイズで推定して、最後クレーム総額分布を出すという論文です。今、お話しした２つの論文は、事前分布には無情報的事前分布を使っています。最後、３つめ、依存関係のモデル化とある物です。これは、上の２つと違って、主観確率を使って、タイトルにもありますけれども、専門家の意見を使ってどのようにコピュラのパラメータを推定するのかということです。これは、例えば自動車保険と火災保険というような種目間の相互依存関係をコピュラでモデル化するに当たって、観測データという物はほとんど使える物がないという前提で、専門家の意見や、あるいはソルベンシー規制などであらかじめ決められているパラメータがあれば、そのような物を最大限に使って、どのように依存関係のパラメータを決めていくかということを紹介した論文です。

今、３つだけ挙げましたけれども、この他、ちょうど今年の４月、アメリカで開催されましたＩＣＡ2014の中で、ちょうど「ＭＣＭＣを用いた保険数理におけるベイズ分析の応用」というテーマで、ワークショップが開催されています。そちらをご覧いただくと、理論的なところもたくさん書かれていますし、あるいはそれを使ってどのように分析するのかというところが細かく紹介されていますので、ご関心のある方は、ぜひご覧いただければと思います。アドレスまでは書いていませんけれども、検索エンジンで「ＩＣＡ2014　ＭＣＭＣ」で検索すれば、上の方に出てきますので、ぜひご覧ください。

私からのお話は以上で、ここから３人の方にそれぞれ質問を投げかけていきたいと思います。まず、桐本

さんと出井さんに、それぞれ発表いただいた分析について、幾つかお聞きしたいと思います。１つめの質問なのですが、そもそもベイズ的手法を使おうと考えたのは、なぜなのでしょうか。まず、桐本さんからお願いします。

【桐本】　一番やはり大事なことは、手法を、何といいますか、ベイズ的に考えたときに、安全評価をしているところでタッチしているので、一番大事なことは、現状のデータがある程度、非常に不確実であったり、根拠が薄かったりしても、ベイズでデータを集めていくことで更新ができるということが一番大事なところです、安全評価上。要は、今日よりも明日、明日よりもあさってといいますか、努力をすればするほど、何といいますか、情報の精度が上がっていくということに、とにかくここが一番大事だと。昔のアメリカの物を金科玉条のように掲げていることは、やはり安全の発想の姿勢ではないというところだと思います。

【渡辺】　ありがとうございました。では、出井さん、お願いします。

【出井】　私の方は、Well-Managed な医療機関の特定の事例ですけれども、少しお話ししましたように、明らかに患者数が少なくて、ヒストグラムではろくでもない分布になってしまう疾病区分があるわけです。一つのアイデアとしては、患者数の少ない疾病区分だけデータによらない何かしらの決めをして Well-Managed を判断するといったやり方もあると思います。しかし、決めをしたらしたで、ではデータが多い疾病区分ではそのようなことをしないのに、なぜデータが少ないとやるのか、どれほどデータがある疾病区分からその決めをするのかという話になるので、そうではなくて、やはり、どの疾病区分でも統一的に同じ推定方法を使いたいということがまずあって、そうなってくると、真のパラメータの分布ということからは避けられないと思いましたので、今回のベイズの手法にたどり着いたということでございます。

【渡辺】　ありがとうございます。２人とも、データの少ないところをどのようにするのかという問題意識から、ベイズに取り組まれたということですね。

それでは、２つめの質問ですが、ベイズ的手法を使う際に何か障害になるような物はありましたか。もしあったとすると、それはどのように克服されたのでしょうか。桐本さんからお願いします。

【桐本】　まずは、ベイズを電力の産業界で使う場合には、少なくともこれを、実はこれは現段階でもまだ問題にはなっていると思うのですが、最終的には意思決定の所に使われないと、やはり意味がないのです。このときに、いわゆるベイズ推定で出てくる不確実さについての理解が、やはりそれぞれのやっている人間や、現場の人間などというところで、また理解度といいますか、認識にやはり濃淡があって、ここをどうするか。電力業界は、やはりある程度何か指標が定められていて、それを満足したらオーケーという文化に慣れているので、このようなところで不確実さを評価して、ある意思決定を下すというところが、なかなか難しい部分があります。ここが現在でもなかなか理解や規制の間でも、使うことが結構困っているといいますか、難しいところにはなっています。

【渡辺】　ありがとうございます。では、出井さん、お願いします。

【出井】　私からは、もっと単純にテクニカルな話で、Stan という分析ソフトウェアを使うとなったときに、

簡単だといっても、やはりどのように使うのかということはゼロから勉強しなければいけなかったところですかね。ただ、Stan ほど有名なソフトウェアになると、もう十分学習マテリアルがウェブ上にあるので、少し検索をすれば、すぐ出てきます。そのような意味では障害という障害ではなかったと思っていまして、使えるようになるまで１週間かかったかどうかという感じだったと思います。

【渡辺】　ありがとうございます。桐本さんが言われていたことは、恐らく保険の業界でも同じような問題が、実際に使うとなればあるかと思います。出井さんの方は、言い換えれば、特に大きな問題はなかったと考えてよろしいですかね。

続いて３点めの質問です。BUGS や Stan のようなツールを使うことで、計算結果自体は比較的容易に得られるかとは思うのですけれども、では、その得られた結果が妥当な物かどうかというところについて、どのような方法で判断されているのかというところを教えていただけますでしょうか。

【桐本】　手法としては、基本的には Stan でも BUGS でもそうなのですが、まずパラメータの結果については、自己相関性をプロットすることで見ていきます。自己相関性が高い場合には、もうサンプル Chain 数をひたすら多くして、落ち着くところまでやっていこうと。あるいは、Thinning の切り捨てをどこに設定すればいいかという検討をしていた。あとは、もう平均値に関しても、プロットが出てくるので、ツールの出力で、ランニング・アベレージを見て、そこでぽんぽんと跳ねていれば、やはり収束していませんということで、収束性はそのようなところ。あとは、ゲルマン・ルービン検定といいまして、ゲルマンプロットを見て、少なくとも shrink　factor 等を計算して見て、定常分布に収束をしているかどうかというところで、パラメータの収束性は、そのような観点で見ていきます。

あとは、原子力の実際のＰＲＡの先ほどのモデルの中に得られた結果を、ある程度代表のモデルを使って入れてみて、フィジビリティ・スタディーを行ってみて、そこに極端に変な外れ値が出ていないかと。外れ値が出ているのであれば、それはパラメータの問題なのか、モデルの問題なのかを見ていって、感度解析をしながら、そこでどこでわれわれが変なことをやっているのかを見ていくことを重ねてやっていくという感じで、見ていっています。

【渡辺】　ありがとうございます。では、出井さん、お願いします。

【出井】　私からも、基本的に桐本さんとかなりかぶるところがありまして、結果の妥当性というときに、パラメータの収束性の観点と、モデルの妥当性という観点、二つあると思うのです。

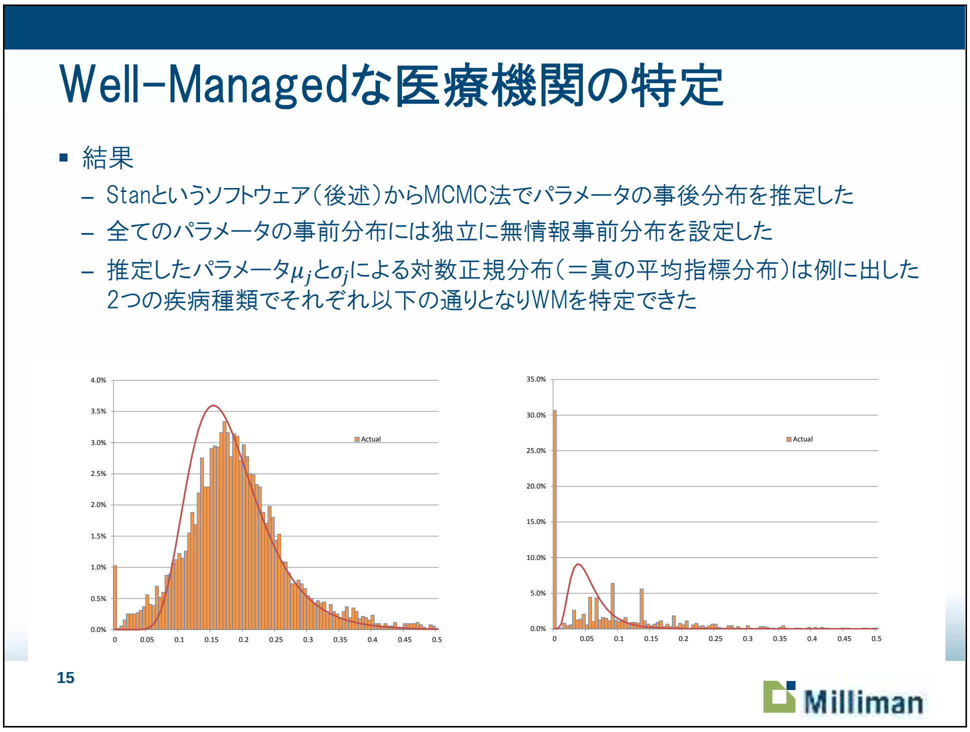
一つめの収束性に関しては、トレース、先ほどのがたがたしたグラフ、私の資料の最後の方にあったと思います。あれは、トレースプロットといいますけれども、あれが、きれいにある値を中心に、上下に散らばっていなかったら、やはりそれは収束していないですね。ですので、そのような結果が出ていたら、どこかがおかしいのです。それは、可能性が幾つかあると思うのですけれども、シミュレーションの数が足りないのかもしれないし、モデルが間違っているのかもしれないというところです。

パラメータの収束性とモデルの妥当性の話は、少し重なる部分もあるのですけれども、他の妥当性の検証の方法としては、グラフと実績値を書いたヒストグラムと、収束した推定したパラメータから得られた分布を重ねてみて、大体合っているかを確認する。もしくは、モデル自体を何かしらの検定で合っているかどうかを確認するなどがあります。あとは、パラメータの点推定値が得られるようなモデルを想定している場合

は、その点推定値とパラメータのベイズでの収束値を比較して、例えば桁が二つも違っていれば、さすがに間違えているだろうなどという感じでやることになるかと思います。何か決まった、これをやれば完璧という物はなくて、いろいろな情報を見て、間違っていそうだという勘を働かせるようなことが必要になってきてしまうかと思っています。

【渡辺】　ありがとうございます。ツールのアウトプットからやるような定量的な情報に加えて、あとは定性的といいますか、判断の要素も加えて、妥当性を評価しているということですね。

それから、これは少し個別の話になるのですが、出井さんのスライドをそちらに映していただけますでしょうか。



出井さんのスライド 15 ページの左側グラフを見ると、どうも推定結果と実績とが、データ量が多いのに、随分ずれているような気がするのです。特に左裾の方です。これは何か理由があるのでしょうか。

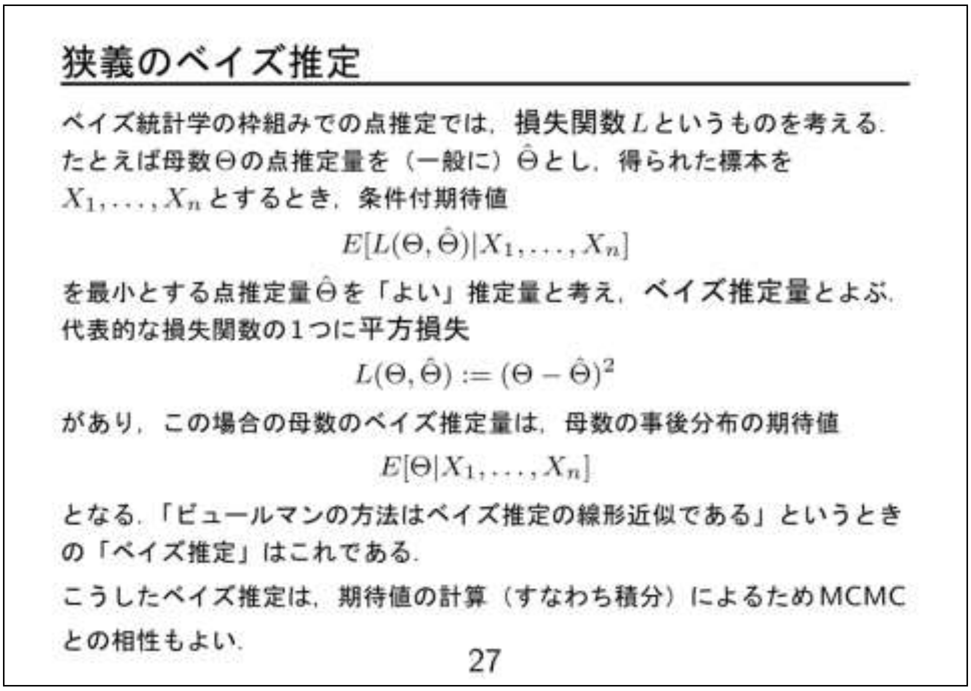
【出井】　そうですね。これは、やはりずれている所、0.2 より下の方は結局サンプル数が少ない病院が多かったですね。ですので、紹介したようなサンプル数でウエートをかけるようなモデルを全体で構築していますので、平均指標の大きい方のサンプル数が比較的多い病院ではかなり合うけれども、下の方はウエートが小さいので、結構外れてくるという結果を表していると思います。それ自体は、サンプル数が多い部分の方がフィットが良いということですから、妥当な結果になっているのではないかと思います。

【渡辺】　ありがとうございます。それでは、続いて、理論的なところについて、岩沢さんに幾つかお聞きしたいと思います。

1 点めですが、岩沢さんのスライドの 14 ページです。ビュールマンの方が、ベイズ推定の線形近似になっているというお話がありました。ベイズ的手法とは、まず結果としてパラメータの事後分布が得られるとは思っているのですけれども、この事後分布とビュールマンの方法による推定値とは、どのような関係にある

のかというところを教えていただけますでしょうか。

【岩沢】　私自身、このビュールマン・アプローチが実務でどれぐらい使えるのかということは、実はよく分からない。今回のプレゼンテーションの前に調べられればよかったのですけれども、そこまで調べられなかったのです。直接のご質問は、テクニカルなご質問だと思いますが、お配りしているものには入っていない次のスライドをご覧ください。



ここを本当に説明すると時間がかかってしまうのですが、狭義のベイズ推定というものをビュールマンの方法はやっています。言葉としては、下から４行めに「ビュールマンの方法はベイズ推定の線形近似である」とあります。

理屈は省略して、下から５行めの式で、これは母数の事後分布の期待値というもので、それがベイズ推定量です。そしてもしもデータから推定値を出すときに、線形的な形、線形結合で表されるものに限定するとすると、ビュールマンの方法によるものが、このベイズ推定量による推定値を最もよく近似できるということです。

なお、ポイントは、少し直接のご質問からは離れるかもしれませんが、ここで点推定値だけを考えているところにあります。質問の中にあった、推定値と事後分布との関係がどのようになっているかということに答えれば、点推定だけ考えることで、いわば、事後分布に直接コミットしないですむ推定になっているのです。つまり、事後分布が具体的にわからなくても、推定値の値は出せる。そこがビュールマンの方法のメリットです。また、先程の発表の際は時間がなくて飛ばした 16 ページをご覧ください。

補足：ビュールマンの方法の選択肢の多さ

ビュールマンの方法では，未知母数が従う分布（つまり，事前分布）の取り扱いにはさまざまな選択肢が用意されている．

- 古典的なベイズ推定と同じように事前分布を（共役事前分布などに）あらかじめ特定してもよい．
- 事前分布の種類を特定せずに，必要な構造母数を統計的推測により別途求めてもよい（その場合は，経験ベイズ法（後述）の一種と見なせる）．
- （事前分布だけでなく）母集団分布の種類も特定せず，完全にノンパラメトリックなモデルとしてもよい（これは，本流のベイズ統計学にはなかった選択肢である）．

16

ビュールマンの方法の選択肢の多さです。古典的なベイズと同じような方法で事前分布を設定することもできるし、２番めに挙げているように、経験ベイズという方法もできるし、そして３番めに挙げているように、分布をもう全然何も特定しないということも実はできます。この場合には、事後分布というものをもとから考えていないのです。推定だけをやろうとしているのでそれが可能なのです。しかも、この方法は、推定量の線形結合で推定値を表す方法の中ではベストだという理屈が立っています。

クレディビリティ理論活用の薦め

CASの教科書の冒頭近く[*5] に次の言葉がある．

> いまでもなお，クレディビリティ理論には試されていない使用法がたくさんあり，同理論を実地の問題にうまく適合させることのできる次のアクチュアリーを呼び寄せている．[*6]

[*5] *Foundations of Casualty Actuarial Science*, 4th ed., Casualty Actuarial Society, 2001, p. 2.

[*6] "Even now, the theory of credibility has numerous untested uses, beckoning to the next actuary who can adapt the theory to practical problems." この文の少し前にある次の文も参照．"Credibility theory was one of the first fruits of actuarial work, and it remains one of the most productive fields of actuarial work."

29

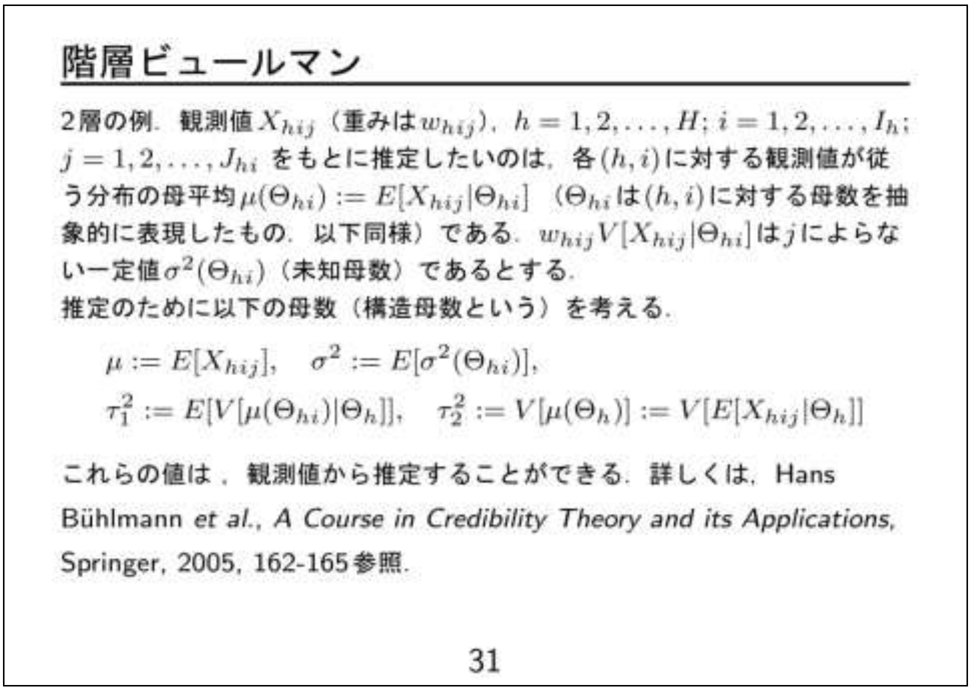
参考のために紹介すれば、ＣＡＳの教科書の中に、このようなことが書かれています。クレディビリティ・セオリーは、損保アクチュアリーの初期からの成果であるとともに、今でも豊かな成果を生んでいる分野である、と。また、クレディビリティ・セオリーの中には、まだ実際に使われていないものがたくさんある。それゆえ、それを実践の問題に使える次の世代のアクチュアリーたちを待っている、といったことが書いて

あります。ビュールマンのアプローチは、ごくシンプルなものですが、質問の中の言葉でいえば、「線形近似」をすることで「事後分布」を直接考えないですむようにするという、ある意味、ベイズの発展形とも考えることができます。

【渡辺】　ありがとうございます。岩沢さん、戻らないでくださいね。もう１問ありますので。

今のお話ですと、ビュールマン・モデルとベイズとは非常にかかわりが深いというお話だったかと思いますけれども、そうすると、使っていないと言いながらも、日本のアクチュアリーにとっては、実はベイズはなじみのある物だということになるかと思うのです。損保数理のテキストの中にも、ビュールマン・モデルと書いてはあるのですけれども、書いてあるといってもほんの少しだけで、限られたパターンの物しか挙げられていないかとは思うのです。もし、そこに書かれていないようなビュールマン・モデルのいろいろなパターンといいますか、広がりという物があるようでしたら、ご紹介いただけますでしょうか。

【岩沢】　分かりました。この質問は、非常にありがたいものでありまして、私の主張したいところに関わります。今日はベイズの方法を宣伝に来たものの、ベイズ統計学といえども一つ少し懸念があって、やはりモデル・リスクがあります。たとえば、先ほど紹介された例でも log-normal を使うといったときに、ではなぜ log-normal なのか。階層ベイズといっても、モデルを構築するときには、何らかの分布を採用しますので、その分布が不適切であるというリスクがあります。これに対し、ビュールマンの方法のいいところは、そのようなものを全く想定しない選択肢もあるところです。



実際、階層ビュールマンというモデルがあります。階層構造をとるということ自体も一つのモデルですから、その限りのモデル・リスクはありますが、階層ベイズと違って、どの分布を選ぶかといったモデル・リスクはありません。このスライドの一番下に挙げている、ビュールマンが 2005 年に書いている本があり、そこに「階層ビュールマン」が紹介されています。これは、階層構造を指定するだけで、分布の形も何も想定しないというものなのですが、これは実務では使われていないと思うのです。階層ベイズも現時点で使っていない方向けに、いきなり階層ビュールマンの話をしても、このセッションとしては少し話が混乱してし

まうかもしれないですけれども、信頼性理論の中にはこのような方法があり、それがベイズ的な方法であることは確かですね。ともかく、こういうものもありますので、ぜひ試しに使ってみて、先ほどの渡辺さんをまねして言えば、来年の年次大会にでもどなたかに発表していただければよいかと思っております。
　答えになっているでしょうか。

【渡辺】　ありがとうございます。それでは、少しテーマを変えまして、やはりベイズを語る上では事前分布をどうするのかというところを外せないかと思いますので、ここについて幾つか質問をしたいと思います。
　まず、桐本さんと出井さんにお聞きしたいのですが、お二人それぞれ発表いただいた分析の中で、事前分布という物を、どのような考え方に基づいて設定されたかということをお教えいただけますでしょうか。

【桐本】　とりあえず、時間故障率に対して、いろいろとまさにパラメータをうまく出すために検討しているところがあって、例えば、共役分布で事前分布を設定してしまうと、うまく答えも早く出て、まとまりもよくなるのではないかというところで、議論もされているところもあるのですけれども、ただ、原子力分野でこれを出すときに、共役でやってしまうと、事前分布ががっちり行ってしまって、データは弱いので、全然動かないという話になってしまうのです。やはり、共役は使いやすいのだけれども、そこは諦めようというところで、いろいろと分布形状としては考えているというところです。少し試行錯誤のところはあります。今は Stan を使うに当たって、ハーフコーシーを使うなど、とらえて、考えている状況であります。

【渡辺】　ありがとうございます。それでは、出井さん、お願いします。

【出井】　私の Well-Managed の事例の場合は、いずれも無情報事前分布を単純に使っているだけです。これも先ほど話しましたように、疾病区分でいろいろな種類があって、疾病区分ごとにやはり推定を全部掛けますので、もしある疾病区分に対して特定の偏りのある事前分布を使うのならば、それは何らかの説明がなければいけないかと思います。今回それはやらずに全部共通で、無情報事前分布を一律当てるという考え方でやっています。

【渡辺】　ありがとうございます。それでは、続いて全員にお聞きします。事前分布に関連して、よく聞く主張なのですけれども、主観確率を前提とするようなベイズ統計学などという物は科学とは認められないという意見が、今はどうか分からないですけれども、かつてはあったかと思うのです。これについては、どのようにお考えなのでしょうか。また、このような批判を避けるために、無情報的事前分布を使うことについてどのようにお考えでしょうか。では、順番に、岩沢さんからお願いします。

【岩沢】　主観確率を前提とするベイズ統計学ということでお答えします。私の発表だと、それを前提としなくてもベイズ統計学であるという立場ではありますが。
　ベイズ統計学を科学で使う、主観確率を使ったベイズ統計学は科学になりうるか、ということに対しては、やはりいろいろと議論があって、簡単な問題ではありません。渡辺さんが用意されたもの（１２ページ）で、お手元の資料を見ていただければよいと思いますけれども、スティーブン・センという人が分けているところで、そのときにリチャード・ロイヤルという人が出している問いの区別、あるいは、スティーブン・センが分けているいろいろな統計学の位置づけ。このように、一口に統計学といっても、いろいろなアプローチ

があります。やはり、問いによって答えは違ってくるのだと思います。科学の場合は何が証拠かということが問題になるので、ロイヤルの問いでいえば３番めの問いに答えるものです。

もし課題が意思決定であれば別にいいのです、主観確率で。今日の私は主観確率なしでやりましょうと言っていますけれども、ベイズを使うときに主観確率を使う選択肢も十分にある、と私自身は考えております。ただ、アクチュアリーがベイズ統計学を、周りの人を説得して使うときに、ではそれでできますかというと、ここにはまた違う問題があります。何に使うのか、例えば、保険料を設定するために使うのか、リスク管理に使うのか、あるいは営業上の戦略で、これは意思決定でしょうか、だとすれば主観確率でいいかもしれない、そういったものに使うのか、ということで、全然違ってきますので、一概に主観確率だとだめということではない、ということは言えると思います。

一方で、何かの「答え」として出すためには、主観確率というものはやはり使いにくいので、批判してもいいと思います。そのときに、無情報的事前分布を使うことは、かなり推奨されるといいますか、とりわけ階層ベイズでやっていれば推奨されます。階層ではない古典的な場合には、私のプレゼンの中で言いましたように、何をやっているのかよく分からなくなってくるのですけれども、階層構造を採用するならば、無情報的分布を採用することは非常に自然なやり方なので、個人的にはかなり推奨できるものだと思っています。

【渡辺】　ありがとうございます。では、桐本さん、お願いします。

【桐本】　原子力の方では、まさにその指摘をされていることですね。例示に示したように、階層を使って、なるべく無情報でやろうということで、やってきてはいるということで、日本は間違いないです。だから、そこの批判という物は、よくやはり認識をしていて、その中でも、やはり原子力などのようなところでは、説明性としては、そのようにアプローチせざるをえないということが、正直。

ただ、先ほどからハーフコーシーは何だろうと言って、僕の方で言っていることは、やはりそうは言っても、エビデンスそのものが、もう本当に全然ないという話になってくると、もうこれも完全にお手上げになってしまっていくのだけれども。それで、われわれは、例えば電中研のような立場だと研究なので、研究ですから、「出ません」と言って手を上げてしまえばいいのかもしれないですけれども、ある意味、要は電力の事業など、工学の分野で意思決定にやはり持っていかないといけないという話になってくると、では次の手段として何を考えるかという話は、やはり避けて通れない話になってきます。そうなってきた場合には、やはりさすがに、ある程度主観確率をそこに持ち込むことをしないと、話が堂々巡りになるだろうという判断で使うべきなのだと認識しています。

【渡辺】　ありがとうございます。では、出井さん、お願いします。

【出井】　はい。主観確率を前提としたベイズが科学的ではないという批判に対しては、少し言葉尻を単になぞって反論しているだけになるかもしれないですけれども、だったら、どのようなモデルが主観が全く入っていないのですかと言われると、何でもやはり主観が入っていると言わざるを得ないと考えています。モデルという物は、すべて何らかの決めがあり、完全に客観的で何もモデラーが何の手心も加えていないなどということはありえないので、それは単純に程度の問題があるかと思っています。

それに続けていうと、有名な統計学者が、「すべてのモデルは間違っている。有用な物が一部にあるだけだ」などということを言っています。その意味で、有用性か否かというところで判断をすると、ベイズという物

は、ほかの皆様からも十分ご紹介しましたとおり、かなり有用であると言えるかと思っています。ですので、そのような中で、無情報事前分布を使うところは推奨できると思いますし、ある種批判をかわすための折衷案のようなところもあるかと思います。比較的客観性の高いものと、私も感じます。

一方で、個人的な印象としては、無情報事前分布を使うと、完全に偏りがない物に尤度を掛けることになりますから、要は尤度にも偏りがないと、単純に最尤法と同じになります。それはやはり客観的だと言えるのかもしれないけれども、若干面白みがないか思っているところもあって、主観確率を、自信を持って使えるような何か事例があったら、大変よろしいのではないかとは思っています。

【渡辺】　ありがとうございます。それでは、少し時間を取って、会場の方にもご意見やご質問等がないか、聞いてみたいと思います。もし、何かあるようでしたら、挙手をお願いします。

【質問者】　すみません。３点ほどお聞きしたいことがあります。
１点めは、今日はあまりお話が出なかったのですが、ＢＩＣのような物というのですか、それについては、批判も多い指標だと思うのですけれども、どのように考えていらっしゃるかということです。
２点めは、私などは全然ベイズを今までやったことがないのですが、これから使うソフトウェアとして、BUGSやStanなどいろいろ今日ご紹介があったのと思うのですけれども、何が一番いいかということです。
３点めは、今、無情報の事前分布という言葉がよく出てきていたと思うのですけれども、それは、厳密にジェフリーズが言うような無情報事前分布を言っているのか、単に一様分布の裾の広いような物や、正規分布の分散が大きいような、無情報「ぽい」物を使っていらっしゃるのかという、その辺についてお聞きしたいので、よろしくお願いいたします。

【渡辺】　ありがとうございます。それでは、１点めのＢＩＣのところは、岩沢さん、お願いできますか。

【岩沢】　私自身は、実際のモデルを作っている立場ではないです。ＢＩＣは情報量規準ですから、モデルの選択に関するものでありまして、今の出井さんのお話も桐本さんのお話も、モデル選択の場面ではないところでの話ですので、話が直接噛み合うかというと疑問です。いずれにせよ、BIC には批判もあるということですけれども、ただ、基本的に情報量規準の考え方は、やはりすっきりしていると私は思っています。

それと、出井さんがちょうど引用した、ボックスの「すべてのモデルは真ではない」という言葉がありますが、有用性を測るときに、やはり情報量規準は効いてくると思いますので、今日の話と直接噛み合うかは別として、重要な指標であることは間違いないと私は思っています。

【渡辺】　はい、ありがとうございます。桐本さん、出井さん、何か補足はありますか。よろしいですか。
１点めについて、よろしいでしょうか。

では、２点めですね。ソフトウェアで何がいいのかということなのですが、これは、そうですね、両方検討されていたという桐本さん、いかがでしょうか。

【桐本】　先生、僕もそれほどいろいろ詳しいわけでは、全然。多分、一番僕のあれも含めて、多分Ｒを使って、そのようなパッケージが、BUGS や Stan などともう先行して、いろいろとインターネットでも先生がいらっしゃるので、多分一番使いやすいのではないかということが個人的な感想です。それから、先ほど

僕の方で、原子力のパラメータのスクリプトに関しては、あれは公開しているので、多分、そのうち Stan を使った例も出します。今、公開している物は BUGS を使った例ですので、試しにコピペで回してどのような物かということをやれば、とりあえず BUGS でやってみるといいかと思います。Stan の物は、多分今年の年末に報告書を同じ場所で公開すると思います。

【渡辺】　はい、ありがとうございます。岩沢さん、出井さん、何か補足はありますか。

【出井】　私も、かつては WinBUGS を使ってみたことがあって、そのあと Stan に移ったことがあるのです。桐本さんがおっしゃったような、自己相関がかなり収縮されて、サンプリングの数が少ないなどのような、よく言われている利点もありますが、付け加えるとしたら単純に Stan は速いですね。スピードが全く違います。やはりＭＣＭＣをすると、シミュレーションなので、すごいモデルを作ると非常に時間がかかります。２時間程度かかることもあります。それが、BUGS だと３倍かかる、４倍かかるなどの感覚で違うこともありますので、まる１日返ってこないなどということになるのですけれども、Stan ならば、寝て起きたら終わっているということになります。それの意味でも、Stan が優れているとは思います。

【渡辺】　ありがとうございます。

【質問者】　すみません。Stan に関しては、やはりまだ開発途上というのですか、バージョンなどが変わると、結構大きく変わってしまう。あるいは、厳密にいいますと、Stan はＭＣＭＣ、モンテカルロではないですから、「ＭＣサンプラー」という言い方がいいかと思うのです。その辺のところでも、やはり WinBUGS などよりは、Stan の方がいいというお考えなのでしょうか。

【渡辺】　出井さん、いかがでしょうか。

【出井】　後半の質問は、恐らく岩沢さんの方がかなりお詳しいと思いますので一旦前半だけ回答いたします。前半の開発途上かどうかという話ですけれども、おっしゃる通り Stan は特にこの１年、異常な回数でアップデートが繰り返されました。ただ、では過去の物が使えなくなったかといわれると、そのようなことも全くなくて、むしろインストールがしやすくなったり、少し早くなったり。先ほど使用例を見せましたけれども、上から順番に「200 本目です」「400 本目です」と出ていましたが、昔はあれが出なくて、終わったら「2,000 本終わりました」とぱっと出てきただけなのです。今は途中経過が出るので、安心して待てるようになりました。そのようなちょっとしたインターフェイス的なところで改善されただけなので、それほど問題ではないと思っています。開発途上といいましても、どんどん変わっているというよりは比較的安定しているかと思います。

【渡辺】　はい。岩沢さん、出井さんからのご指名ですが、いかがでしょうか。

【岩沢】　いや、それをお答えするのは、とても楽しい話なのですが、理論的には面白いのですが、ここで話しても、どうかと思うのです。ただ、ＭＣＭＣではないというお話でしたけれども、理論的にはちゃんとＭＣＭＣと理解できると私は思っています。いわゆるハイブリッド・モンテカルロです。私は Stan の実際の

プログラムの中身は知らないのですけれども、つまりハイブリッド・モンテカルロをどう実装しているかは知らないですが、ハイブリッド・モンテカルロ自体がＭＣＭＣであることはたしかだと思います。

【渡辺】　ありがとうございます。では、２点めのご質問の回答としては、よろしいでしょうか。
　では、３点めですね。もうそろそろ時間がなくなってきていますが、無情報事前分布が、ジェフリーズの事前分布なのか、そうではないのかというところなのですが、これは桐本さん、出井さん、それぞれ簡潔にお願いします。

【桐本】　はい。もう簡潔に、率直に言うと一様分布です。ハーフコーシーの物も、Ａの物を、例えばＡを１に設定して、一様分布に近い形にして使ってみようなどというアプローチです。

【出井】　私も、大したインプットはありませんけれども、パラメータで負の値も取りうる物は、広い正規分布にして、負の値を取りえないσなどは、0 から 1,000 までの一様分布にして、非常に幅広に取っているだけですね。あまりジェフリーズの事前分布などは、考えてはいないです。

【渡辺】　ありがとうございます。これで時間がほとんどなくなってしまいましたので、最後にこちらからの質問に戻りたいと思います。最後は、皆さん３人にお聞きします。今後、ベイズ的手法を使おうとするアクチュアリーに対してアドバイスがあれば、それぞれ一言ずつお願いします。では、岩沢さんから。

【岩沢】　私は正直、今の質問に対しては、今日話していることは全部それに対する答えのようなものなので、今からさらに追加してということはなく、繰り返しにしかならないのですけれども、現在ではかなりツールもそろっていて、理論もそろってきています。誰かに教えてもらったり調べたり、勉強する必要はあると思いますけれども、十分に使える環境にはなっているので、ぜひ使っていただければと思います。

【渡辺】　ありがとうございます。では、桐本さん、お願いします。

【桐本】　はい。むしろ原子力の世界は、恐らくこの間の賠償金などの話も、割と結構乱暴なロジックで決まっているところがあって、むしろ僕などは、このような話のときに、アクチュアリーの方などの助けが原子力には必要なのではないかと思っている状況だと思っています。このような形で、いろいろな所で情報も出せますし、われわれも出せます。ぜひいろいろな所で、このような統計の方たちが実例としてたくさん作っていただけると、われわれも、それを使ってベイズの高度化をどんどん図っていけますので、ぜひ使っていただいて、われわれにもフィードバックをいただけるとありがたいということでございます。以上です。

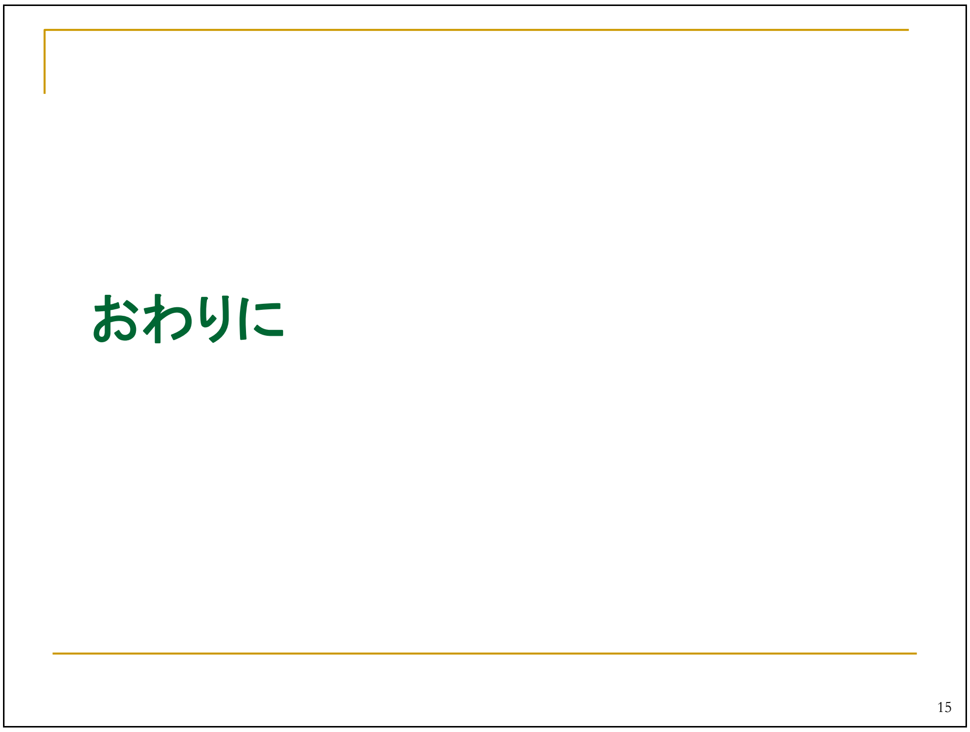
【渡辺】　ありがとうございます。では、出井さん、お願いします。

【出井】　例えば Well-Managed な医療機関特定の事例は、結果的に完成形だけを見たら何か変なモデル構成をしていると思うのですけれども、あれは、最初は変数が１個ぐらいのところから、どのようにしたらきちんと推定できるのかということを考えて、ではハイパーパラメータを１個上に追加してみよう、もう１個上に追加してみよう、１周させてみようなどという、いろいろな試行錯誤でようやくできたのですけれども、

こういった試行錯誤はやってみると、結構楽しいのですね。やっていて、データを見ていると、「ああ、そうか。こういう所で、このような偏りがあるのだ。では、少しここは分けよう」など、新たな発見があるプロセスだったのです。

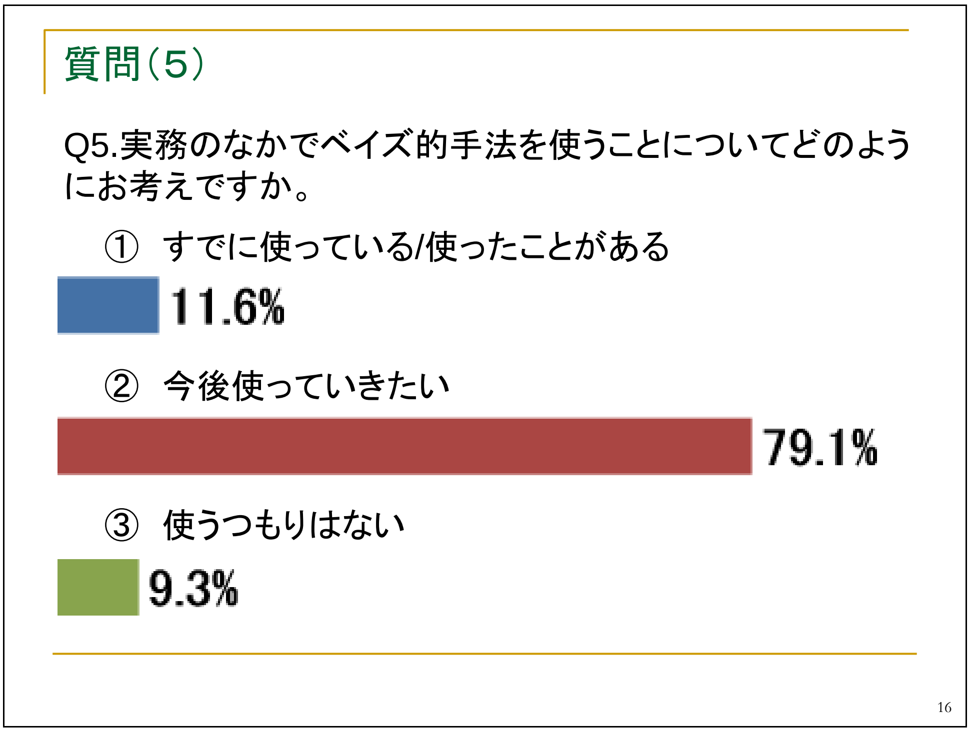
特に Stan を使っていると、やってみてぱっと結果が出て、結果をグラフにするとモデル構成の良しあしもすぐにわかるので、非常に気持ちがいい。収束していないと気持ちは悪いわけですけれども、それで新たなチャレンジは生まれます。というところで、モデリングは結構楽しいです。モデリング自体は、別にベイズでなくてもやると思うのですけれども、最尤法ならば、とっくに推定値の算出を諦めてしまうような複雑なモデリングでも、Stan や WinBUGS のようなサポートツールを使えば、何かしら解いてはくれるわけで、こちらは自由にモデルを作っていいという状態なのですね。だから、自由に遊んでくださいという状態なのです。ですから、やってみると結構遊びになって楽しいですね。

実際、皆さんが帰宅されてから MCMC なりのキーワードで検索してみると、例えばプロ野球選手の投手力の真の分布を調べたり、将棋の強さの真の分布を調べたりなど、いろいろな面白いチャレンジをやっていらっしゃる方を発見できると思います。皆さんはやはりツールで遊んでいらっしゃるというところが、よく分かるのですね。それ自体は、アクチュアリアルでもビジネスになるわけでもないとは思うのですが、何か面白い事例を皆さんで考えて、一緒に研究させていただけたらと思います。



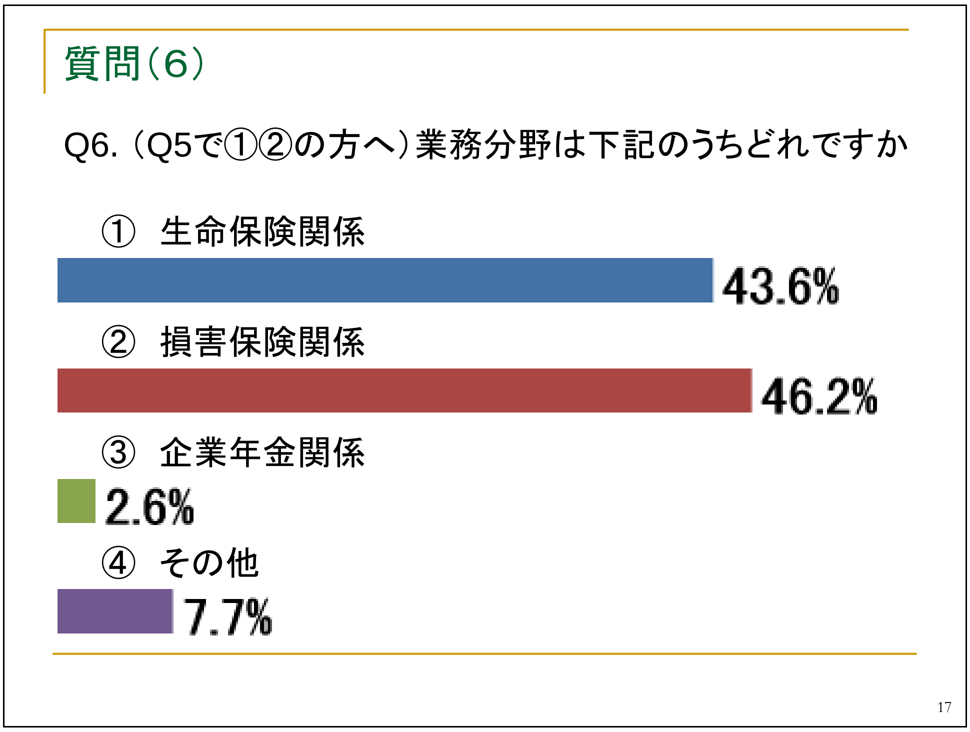
【渡辺】　ありがとうございます。そろそろ大会委員の方の視線が怖くなってきたのですけれども、最後にこれだけは聞かないと終われませんので、最後、双方向ツールを使った質問に戻らせてください。

これは、先ほどと同じ質問です。１番は、恐らく変わらないと思うのですが、②と③の割合が、どのように変わったのかというところを見たいと思います。では、ボタンを押してください。はい、ありがとうございます。増えましたね。「今後使っていきたい」、79.1%。ありがとうございます。これでこそ、やったかいがあったというものです。



（①5、②34、③4、計 43）

それでは、これで最後の質問になります。「使っていきたい」、あるいは「使ったことがある」という方で、どのような業務分野でいらっしゃるのでしょうか。はい、それでは、ボタンを押してください。



（①17、②18、③1、④3、計 39）

はい、ありがとうございます。生保の方が増えましたね。ぜひ、使ってみてください。

先ほどもお話ししましたけれども、今日の発表の中のスライドの他に、ＩＣＡの中でのワークショップの資料も大変参考になると思いますので、ぜひ皆さん、それを見て、今日のお話も踏まえて、分析にチャレンジしてみていただければと思います。どうもありがとうございました。それでは、３人のパネリストの皆さんに、もう一度拍手をお願いします。