’92改訂版

二見　隆著

生命保険数学

下巻

日本アクチュアリー会

生命保険数学

下巻 目次

第７章　営業保険料

§1　年払営業保険料

契約者から実際に収入する保険料を営業保険料というが、それは第４章で述べたように純保険料より常に大きく、その差額は**付加保険料**と言われる。付加保険料は、生命保険会社が保険契約を維持管理するために要する経費や、あるいは責任準備金を投資して利殖するために要する経費を賄うために契約者から収入するものがその大部分であるが、その他に、（ａ）経営上の危険に備えるための**安全割増**を含めたり、あるいは（ｂ）**確定配当**を約束してそのための負担額を含めたり、することもある。いずれにしても営業保険料の決定には、単に会社が必要とする経費のみならず、経営上あるいは販売上の要素が考慮される。

本書では純保険料の記号PおよびAの右肩に＊印をつけて P^* および A^* によって営業保険料を表わすことにする。（書物によっては P', A' によって 営業保険料 を表わしているが、 本書では前章でこの記号を使っているので、＊印を使用する）初期の頃に年払営業保険料 P^* を決定するためによく用いられた方法は

$$P^* = P(1+k) \tag{7.1.1}$$

または

$$P^* = P(1+k) + C \tag{7.1.2}$$

とするものである。 例えば（7.1.1）で $k=0.2$ とすると、純保険料

の2割増が営業保険料となる。しかしそれでは、例えば全期払込養老保険で、保険期間が短期の場合は付加保険料が極めて高くなり、反対に長期の場合はそれが安くなりすぎる。そのため保険期間によって $\boldsymbol{k}$ の値を変えたりすることが行われた。（7.1.2）もその問題を解決するための一つの手段であった。(7.1.2）は**比例および定数法**と言われる。

これに対しスプレーグ（ T. B. Sprague ）の考案に始まる方法で、経費の実際の支出形態に基づいて付加する基準を考え、それらを収支相等の保険料算式に取り入れる方法があり、現在わが国では主としてこの方法が用いられている。 短期払込養老保険で、保険料年払、保険金即時支払の場合を例にとって説明してみよう。今予想される経費として

新契約費：新契約時にのみ、保険金額1に対し α

（ 例えば $\alpha = 0.025$ ）

集金経費：保険料払込のつど、営業保険料1に対し β

（ 例えば $\beta = 0.03$ ）

維持費：(a) 保険料払込中は毎年始に保険金額1に対し γ

（ 例えば $\gamma = 0.003$ ）

(b) 保険料払済後は毎年始に保険金額1に対し γ'

（ 例えば $\gamma' = 0.002$ ）

が考えられる場合は、保険金額1に対し収支相等の原則より

$$
{}_m\overline{P}^*_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x:\overline{m}|} = \overline{A}_{x:\overline{n}|} + \alpha + \beta\,{}_m\overline{P}^*_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x:\overline{m}|} + \gamma\,\ddot{a}_{x:\overline{m}|} + \gamma'(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}) \tag{7.1.3}
$$

が成立する。これを解くと、次のような営業保険料の算式が得られる。

$$ {}_{m}\overline{P}^{*}_{x:\overline{n}|} = \frac{\overline{A}_{x:\overline{n}|} + \alpha + \gamma\,\ddot{a}_{x:\overline{m}|} + \gamma'(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{m}|})}{(1-\beta)\,\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} \tag{7.1.4} $$

$$ = \frac{1}{1-\beta}\left\{ {}_{m}\overline{P}_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} + \gamma + \gamma' \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} \right\} \tag{7.1.5} $$

全期払込の場合には$m = n$なので、γ'の項がない。また保険金が即時支払でなく年末支払の時の営業保険料　${}_{m}P^{*}_{x:\overline{n}|}$ を求めるには、(7.1.3), (7.1.4), (7.1.5) において、$\overline{A}$, $\overline{P}$ を A , P で置き換えればよい。

(7.1.5) の右辺括弧内の第1項は純保険料であり、第2項以下は各経費がどのように年払保険料中に入っているかを示している。α , β , γ , γ' を合わせて、予定死亡率、予定利率につぐ第3の計算の基礎と考え、**予定事業費率**と呼ぶ。また別個に、α を**予定新契約費率**、β を**予定集金経費率**、γ および γ' を**予定維持費率**と呼ぶ。なお (7.1.5) を見れば、この場合でも (7.1.2) と同じ

$$ P^{*} = P(1+k) + C $$

の形になっていることが分かる。

次に一時払保険料の営業保険料については、通常 β と γ がなく

$$ \overline{A}^{*}_{x:\overline{n}|} = \overline{A}_{x:\overline{n}|} + \alpha + \gamma'\ddot{a}_{x:\overline{n}|} \tag{7.1.6} $$

という式が用いられる。

この方法によれば、収支相等の式に予定事業費率をもちこむ原則さえわきまえておれば、さらに複雑な場合についても営業保険料の算式を容易に導くことができる。例えば新契約費が保険金額比例でなく、営業保険料比例で支出され、かつ新契約時のみならず、契約の継続を条件に長期にわたって支払われるとしよう。すなわち n 年満期養老保険で（ $n \geqq 10$ ）、新契約費は契約時に年払営業保険料に対し α_1（例えば 0.5）であり、さらに主として募集者に対する継続手数料支給のため、第

２年目には α_2（例えば 0.1 ）、第３年目以降第10年目までは α_3（例えば 0.03 ），第11年目以降は α_4（例えば 0.02 ）であるとする。また保険金支払経費として（β や γ 以外に）死亡あるいは満期時に保険金額の γ_1（例えば 0.005 ）が一時に必要であるとしよう。このような場合の収支相等の式は

$$\begin{aligned}\overline{P}^*_{x:\overline{n}|}\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {} & \overline{A}_{x:\overline{n}|} + \{\alpha_1 + \alpha_2(\ddot{a}_{x:\overline{2}|} - \ddot{a}_{x:\overline{1}|}) \\ & + \alpha_3(\ddot{a}_{x:\overline{10}|} - \ddot{a}_{x:\overline{2}|}) + \alpha_4(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{10}|})\}\overline{P}^*_{x:\overline{n}|} \\ & + \beta\overline{P}^*_{x:\overline{n}|}\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \gamma_1\overline{A}_{x:\overline{n}|} \end{aligned} \tag{7.1.7}$$

となり、これを解けば

$$\overline{P}^*_{x:\overline{n}|} = \frac{(1+\gamma_1)\overline{A}_{x:\overline{n}|} + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{(1-\beta-\alpha_4)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - (\alpha_3-\alpha_4)\ddot{a}_{x:\overline{10}|} - (\alpha_2-\alpha_3)\ddot{a}_{x:\overline{2}|} - (\alpha_1-\alpha_2)} \tag{7.1.8}$$

となる。定期保険等その他の保険種類についても、α あるいは γ 等の値が養老保険の場合と異なることはあっても、すべて上に述べたような原則で営業保険料が算出される。また（4.16.6）に述べたような年金保険については、年金支払開始後の維持費は通常年金額１についての割合で定められる。その上で、年金開始時点における現価を生命保険における生存保険金とみなして付加保険料を定めるような方法が用いられる。

§２　分割払営業保険料

保険料分割払の契約の営業保険料については、第４章§１７の場合と同様に、分割賦払保険料と分割払真保険料とが考えられる。

前者の場合には､もとになる年払保険料の一部が遅れて払込まれるため

の利息の損失の補填分の外に、払込回数が増えるための経費の増加も考えておかねばならない。それらを勘案してわが国でかって慣行的によく用いられたのは

$$\text{半年払：}\quad \frac{1}{2}P^{(2)*}=\frac{1.04}{2}P^{*} \tag{7.2.1}$$

$$\text{3月払：}\quad \frac{1}{4}P^{(4)*}=\frac{1.06}{4}P^{*} \tag{7.2.2}$$

$$\text{月　払：}\quad \frac{1}{12}P^{(12)*}=\frac{1}{11}P^{*} \tag{7.2.3}$$

とする方法であった。それぞれの場合の年間保険料 $P^{(k)*}$ が年払保険料 P^{*} を上回る部分は、上に述べたように利息の損失の補填分と経費の増加に充てる分とからなると考えられるが、そのうち利息の損失の補填分は（4.17.2）と同じく

$$\frac{1}{4}dP^{(2)*},\qquad \frac{3}{8}dP^{(4)*},\qquad \frac{11}{24}dP^{(12)*}$$

である。従って残余が経費の増加に充てる分と考えられる。

分割払真保険料について考える時には、例えば（7.1.3）で $\ddot{a}_{x:\overline{m|}}$ の代わりに $\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{m|}}$ を入れて考えればよい。ただしこの時の γ は各払込時点で使用される予定維持費の年総額と解する。払込済の契約の維持費については毎年始に γ' が使用されると考える。そうすると収支相等の式は

$$\begin{aligned}{}_{m}\overline{P}^{(k)*}_{x:\overline{n|}}\ \ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{m|}} &= \overline{A}_{x:\overline{n|}}+\alpha+\beta\ {}_{m}\overline{P}^{(k)*}_{x:\overline{n|}}\ \ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{m|}}\\ &\quad+\gamma\,\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{m|}}+\gamma'(\ddot{a}_{x:\overline{n|}}-\ddot{a}_{x:\overline{m|}})\end{aligned} \tag{7.2.4}$$

となり、その結果

$$ {}_{m}\overline{P}^{(k)*}_{x:\overline{n}|} = \frac{\overline{A}_{x:\overline{n}|} + \alpha + \gamma\,\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{m}|} + \gamma'(\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{m}|})}{(1-\beta)\,\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{m}|}} \tag{7.2.5} $$

$$ = \frac{1}{1-\beta}\left\{ {}_{m}\overline{P}^{(k)}_{x:\overline{m}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{m}|}} + \gamma + \gamma' \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}}{\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{m}|}} \right\} \tag{7.2.6} $$

が得られる。これは１年分の保険料を表わすから、この $\frac{1}{k}$ が毎回使用される分割払営業保険料となる。

現在わが国ではこの方式で営業保険料が計算されているが、計算要素に若干の追加があり

（１）　α の外に教育関係新契約費として年間営業保険料１に対し δ

（２）　月払基準のため β，γ の外に、保険料月払のための予定集金経費として年間営業保険料１に対し ζ

（３）　高度障害の場合に保険料払込免除をするための保険料に充当する分として年間営業保険料１に対し ε

が用いられている。従って $1-\beta$ の代わりに $1-\beta-\delta-\zeta-\varepsilon$ が用いられる。（年払および半年払の営業保険料では、この月払営業保険料を基準にして計算が行われる）

§３　高額割引

諸外国では営業保険料を算出する際、しばしば**高額割引**の制度が採用される。保険契約を維持管理するのに要する諸経費は、契約１件当たりで必要となるものが多く、保険金額に比例して必要となる経費は少ない。

一方付加保険料を定めるためにこれまでに述べた方法では予定維持費は保険金額に比例して定められるので、高額の保険契約では実際にその契約を維持するのに要する経費よりもずっと多い付加保険料を負担することになる。一般に一つの保険契約に対し実際に必要とする経費を対応

させて付加保険料を設定しようとする考え方をコスト主義と言うが、（これに対し保険契約の効用－保険による保障の種類と額－に応じて付加保険料を定めるべしという考え方を効用主義という）高額割引はコスト主義に基づいて、高額契約については、保険金額の大きさによって保険金額1に対しなにがしかを営業保険料から控除しようとするものである。同じ考え方から、保険金額が標準よりかなり低い契約では必要とする経費が付加保険料よりずっと大きくなるため、保険料割増（低額割増）をしてバランスをとることも稀にはある。

通常は保険金額を何段階かに分けて割引（割増）を行うが、例えば次のような方法が考えられる。(これは一つの例であって、実際に行われているものではない)

保険金額				100万円	未満	1.50 ‰ 増
〃	100万円	以上		1000万円	未満	通常料率
〃	1000万	〃		5000万	〃	1.00 ‰ 減
〃	5000万	〃		1 億	〃	1.50 ‰ 減
〃	1 億	〃				2.00 ‰ 減

この制度の難点はインフレに対応しにくいことである。すなわちある時点で保険金額 300万円程度の契約の付加保険料と実際経費とがバランスすると考えていても、インフレが進行すれば、固定経費が増大して保険金額 1000万円程度の契約の付加保険料でないと対応しないかもしれない。そうなると保険金額の刻み方も標準の置き方も変更しなければならないが、既契約についてはその営業保険料を変更することは不可能である。それを避けるためには、後に述べる費差益配当率を保険金額別に定めるのも一つの方法であろう。

また外国では、一件あたりコストをそのまま保険料に反映させるため、

保険金額に比例する保険料に、一件あたりの一定額を加えて営業保険料を定めている例もある。

現在わが国では個人保険については高額割引を行っていないが、団体定期保険あるいは企業年金保険では、団体の規模を考慮して保険料率を割引くことが行なわれている。

§4　保険料返還付保険の営業保険料

（4.16.4）あるいは（4.16.7）で純保険料返還付保険の純保険料を計算したが、実際問題では返還されるのは純保険料でなく営業保険料である。その場合の計算ではまず営業保険料の算式を定めておく必要がある。

本章§1で述べたように、一般に営業保険料は

$$P^{*} = P(1+k)+C \tag{7.4.1}$$

という形で与えられるが、その時に途中死亡に対しては既払営業保険料に利息をつけないで返還するような生存保険を考えると、年払純保険料を計算する収支相等の式は（4.16.3）で右辺におけるPを P^{*} でおきかえたものとなる。すなわち

$$\begin{aligned} P\,\ddot{a}_{x:\overline{n|}} &= P^{*}(IA)^{1}_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} \\ &= \{P(1+k)+C\}(IA)^{1}_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} \end{aligned}$$

となり、従って

$$P = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} + C(IA)^{1}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - (1+k)(IA)^{1}_{x:\overline{n|}}} \tag{7.4.2}$$

$$= \frac{D_{x+n} + C(R_x - R_{x+n} - nM_{x+n})}{(N_x - N_{x+n}) - (1+k)(R_x - R_{x+n} - nM_{x+n})} \tag{7.4.3}$$

となる。そして営業保険料は次のようになる。

$$P^* = P(1+k) + C$$

$$= \frac{(1+k)D_{x+n} + C(N_x - N_{x+n})}{(N_x - N_{x+n}) - (1+k)(R_x - R_{x+n} - nM_{x+n})} \qquad (7.4.4)$$

既払込営業保険料に年 j %の利息をつけて返還する契約では、収支相等の式は（4.16.6）の右辺でPのかわりに$P^* = P(1+k) + C$を用いたものであるから、（7.4.2）で右辺の $(IA)^{1}_{x:\overline{n}|}$ のかわりに $\sum_{t=1}^{n} \ddot{s}_{\overline{t}|} v^t {}_{t-1|}q_x$ を入れたものが純保険料Pを求める式となり、そうして得られたPを（7.4.1）に入れて P^* が求められる。

一時払営業保険料に年 j %の利息をつけて返還する場合も同様に計算される。この時営業保険料が

$$A^* = A(1+k) + C \qquad (7.4.5)$$

の形であるとすると、純保険料を求める収支相等の式は

$$A = \sum_{t=1}^{n} A^*(1+j)^t v^t {}_{t-1|}q_x + A_{x:\overline{n}|}^{\ 1} \qquad (7.4.6)$$

$$= \{A(1+k) + C\} \sum_{t=1}^{n} (1+j)^t v^t {}_{t-1|}q_x + A_{x:\overline{n}|}^{\ 1}$$

となり、従って

$$A = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\ 1} + C\sum_{t=1}^{n} (1+j)^t v^t {}_{t-1|}q_x}{1 - (1+k)\sum_{t=1}^{n} (1+j)^t v^t {}_{t-1|}q_x} \qquad (7.4.7)$$

$$A^* = \frac{(1+k)A_{x:\overline{n}|}^{\ 1} + C}{1 - (1+k)\sum_{t=1}^{n} (1+j)^t v^t {}_{t-1|}q_x} \qquad (7.4.8)$$

となる。$j = i$ の時には（7.4.7），（7.4.8）における $\sum$ の項がすべて $\sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q_x = {}_nq_x$ となり、計算が簡略になる。

第７章　　練習問題

（１）　計算基礎として、第５回全会社表、5.5％をとり、さらに予定事業費としては

① 新契約費および募集機関経費

a．初回保険料収入の際にその30％と保険金額の15‰

b．第２回保険料収入の際にその10％

c．第３回以後第５回までの保険料収入の際にその５％

② 集金経費

営業保険料の３％

③ 維持費

毎年始に保険金額の３‰，ただし保険料払済後は1.5‰

を用いる。35歳契約、20年払込30年満期養老保険（保険金即時支払）について、保険金額1000万円の場合の営業保険料を計算せよ。

（２）　保険金額が200万円の20年払込30年満期養老保険と、保険金額が800万円の20年定期保険とを組み合わせた保険(定期付養老保険)に、35歳男子が加入する。死亡保険金は即時支払で、保険料は20年間の月払真保険料によるとする。計算基礎には、第５回全会社表、5.5％および予定事業費として次表の率を用いる。この契約の月払営業保険料を求めよ。

	養老部分	定期部分
α	保険金額の　25‰	保険金額の　8‰
β	営業保険料の　3%	営業保険料の　3%
γ	月払保険料収入の都度賦課するとして年額で　3.50‰	月払保険料収入の都度賦課するとして年額で　2.50‰
γ'	毎年始に賦課するとして年額で　2.00‰	——

（3）　x 歳の被保険者が f 年払込で、f 年後開始の期始払 n 年有期生命年金を契約した。

(a)　年金開始後の維持費を年金年額の1%とすると、年金開始時点における**年金原資** F（即時開始年金の一時払保険料）は、年金年額1に対しいくらになるか。その式を書け。

(b)　保険料払込中の予定事業費率を、“新契約費については F の20‰, 集金経費については保険料の3%, 維持費については F の3‰”としたとき、年払保険料は年金年額1に対しいくらになるか。その式を書け。

(c)　$x=40$, $f=20$, $n=15$ として、第5回全会社表、5.5%によって（a）,（b）の値を求めよ。

（4）　年払営業保険料の算式が常に $P^*=P(1+k)+C$ で与えられるとする。今死亡指数 $(1+\alpha)\times 100$ の条件付保険契約（(4.16.8) 参照）に関し、もし被保険者が満期まで生存すれば収入した特別保険料を

返還するという契約をした。(ただし元の保険は保険金即時支払の養老保険とする) その場合の特別保険料を求めよ。((4.16.9) 参照)

(5)　x 歳の被保険者に対し、$f+n$ 年後に生存するかあるいは最後の n 年間に死亡すれば保険金を支払い、最初の f 年間に死亡すれば既払込保険料を返還する契約を結んだ。ただし支払はすべて保険年度末に行われる。保険料は最初の f 年間に払込まれるとし、年払の営業保険料は純保険料に対し

$$P^{*}=(P+C)(1+k)$$

という関係にあるとする。このとき

(a)　年払営業保険料の式を計算基数を用いて表わせ。

(b)　$f+t$ $(t<n)$ 年後の過去法および将来法による責任準備金を計算基数を用いて表わし、両者の一致することを証明せよ。

(6)　60歳の人が 即時開始、年1回期末払、年金年額1の終身年金を一時払で購入した。ただし死亡時に既払年金総額が購入金額に達していない時は、その差額が相続人に即時に支払われる。

購入価格の1割は付加保険料であるとして、第5回全会社表、5.5%によって一時払営業保険料を計算せよ。

(7)　前問において、購入する年金が年 k 回払の完全年金であればどうなるか。計算の仕方を考えよ。

第８章　実務上の責任準備金

第５章では、付加保険料を考慮せずに純保険料のみに関する数理として責任準備金を説明した。生命保険会社が営業保険料中の付加保険料で諸経費すべてを常に賄うことができれば、純保険料を本来の目的に使用することができ、責任準備金は純保険料式で積むことができる。

しかし実際には募集職員に対する支給金等のため、通常契約初年度に大きな経費が使用され、そのために設立後日の浅い会社等で見られるように保有契約に比べて新契約の割合が大きい場合には、付加保険料で経費のすべてを賄うことが困難な場合が多い。そこで最終的には支払責任を全うするものの、満期までの途中の過程では純保険料式よりも小さい責任準備金の積立方法を考えて、新契約が会社経理に与える圧迫を和らげるような方法がいろいろ考案された。

本章ではいくつかのそのような方法を説明し、併せて会社決算時に保有契約についての責任準備金を実際に計算する方法についても述べることとする。

§1　チルメル式責任準備金

純保険料式責任準備金の計算では、毎年度の純保険料は一定額の平準保険料とした。その時には当然付加保険料（＝ 営業保険料 － 純保険料）も毎年度一定額（平準）と想定されている。これに対しチルメル（A.　Zillmer）は第１年度の付加保険料を平準の場合より大きくし

（従って純保険料を小さくし)、そのかわりにそれ以後何年間かは付加保険料を平準の場合より小さくし（純保険料を大きくし)、全体として釣り合いのとれたものとするような方法を考えた。

n 年満期養老保険で、保険料年払、保険金即時支払の場合、すなわち純保険料が $\overline{P}_{x:\overline{n}|}$ である場合を例にとろう。(保険金年末支払の時も全く同様に議論ができる）上のように考えた第1年度の純保険料を P_1 とし、第2年度以降第 h 年度（$h < n$ で、例えば5年とか10年とする）までの純保険料を P_2 とすると、$P_1 < \overline{P}_{x:\overline{n}|} < P_2$ であるが、今

$$P_2 - P_1 = \alpha \tag{8.1.1}$$

としよう。(例えば $\alpha = 0.025$) このように純保険料を収入する方法を変えても、その全収入では全期間に亘り $\overline{P}_{x:\overline{n}|}$ を収入する場合と等価でなければならないから

$$\begin{aligned}\overline{P}_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x:\overline{h}|} &= P_1 + P_2(\ddot{a}_{x:\overline{h}|} - 1)\\ &= -\alpha + P_2\,\ddot{a}_{x:\overline{h}|}\end{aligned}$$

となる。従って

$$P_2 = \overline{P}_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} \tag{8.1.2}$$

$$P_1 = \overline{P}_{x:\overline{n}|} - \alpha\left(1 - \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\right) \tag{8.1.3}$$

が得られる。α を**チルメル割合**といい、h を**チルメル期間**という。α の大きさによっては P_1 は負になることもある。(8.1.2) から分かるように、第2年度以降の保険料では、純保険料は平準純保険料よりも $\dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}$ だけ大きく、従って付加保険料はそれだけ小さく考えている。今この P_1, P_2 を用いて将来法による責任準備金を考えてみよう。それを ${}_t\overline{V}^{[hz]}_{x:\overline{n}|}$ で表わす。(〔hz〕は期間 h 年のチルメル式という意味で、例えば $h=10$

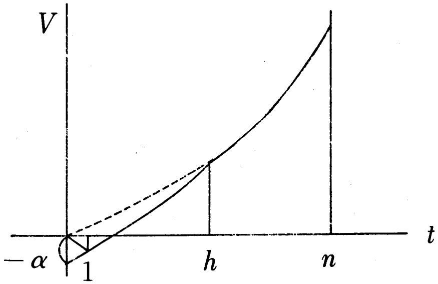
ならば ${}_t\overline{V}^{[10z]}_{x:\overline{n}|}$ と書く）そうすると $1 \leqq t \leqq h$ の場合（8.1.2）を用いて

$$
{}_t\overline{V}^{[hz]}_{x:\overline{n}|} = \overline{A}_{x+t:\overline{n-t}|} - \{ P_2\, \ddot{a}_{x+t:\overline{h-t}|} + \overline{P}_{x:\overline{n}|} (\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - \ddot{a}_{x+t:\overline{h-t}|}) \}
$$

$$
= \overline{A}_{x+t:\overline{n-t}|} - \overline{P}_{x:\overline{n}|}\, \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\, \ddot{a}_{x+t:\overline{h-t}|} \qquad (8.1.4)
$$

$$
= {}_t\overline{V}_{x:\overline{n}|} - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\, \ddot{a}_{x+t:\overline{h-t}|} \qquad (8.1.5)
$$

となる。ここで ${}_t\overline{V}_{x:\overline{n}|}$ は（5.3.4）で述べた純保険料式責任準備金である。(8.1.5）で表わされる責任準備金を**チルメル式責任準備金**という。$t \geq h$ ではチルメル式責任準備金は純保険料式に一致する。保険金年末支払のときはチルメル式責任準備金は ${}_tV^{[hz]}_{x:\overline{n}|}$ で表わされ、(8.1.2）～（8.1.5）の諸式で $\overline{P}$，$\overline{A}$ の代わりに P，A を用いて同じような式ができる。特にチルメル期間 h が保険期間 n より小さいときを**短期チルメル式**といい、$h=5$ のときを5年チルメル式、$h=10$ のときを10年チルメル式等とよぶ。これに対し $h=n$ のときを**全期チルメル式**といい、その時は h を略して ${}_tV^{[z]}_{x:\overline{n}|}$ という記号を用いる。$t=0$ の場合を考えると、チルメル式であっても本来は ${}_0V^{[hz]}_{x:\overline{n}|}=0$ であるが、今（8.1.5）で $t=0$ とすると、形式的に ${}_0V^{[hz]}_{x:\overline{n}|} = -\alpha$ となる。これは第1回の保険料の収入前に新契約費を使ったことにし、以後すべての純保険料が P_2 で入ってくる場合にあたる。チルメル式責任準備金のグラフを描くと図の実線のようになる。(点線は純保険料式）${}_0V^{[hz]}_{x:\overline{n}|}$ は0または $-\alpha$ と定義できるが、$-\alpha$ と考えた時は $t=1$ でグラフが滑らかになる。



αが大きいとかnが大きい場合には、$t=1$において（時には$t=2,3$においても）、${}_tV^{(hz)}_{x:\overline{n}|}$が負となることがある。負の責任準備金は理論的には成立するが、安易にこれを認めると新契約費の濫費を招く恐れがあり、また負のままで契約が解約されると会社は損失を被ることになるので、できるだけこれを避けるべきである。実際上は負は0として計算することが多い。

短期払込の契約の場合は、$h \leqq m$（mは払込期間）とされ、保険料払込期間中またはその終了時に純保険料式に戻る。従って$h=m$の場合を全期チルメル式という。短期払込の場合には式（8.1.4）の第2項が${}_m\overline{P}_{x:\overline{n}|}\ \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}$となる。

次に第5章§6で述べた保険料の分解をチルメル式の場合に考えてみよう。チルメル期間経過後については純保険料式の場合の分解と同じであるから、チルメル期間内のみを考える。まず$t \geqq 2$のときには、（5.6.7）を導いた時のように、（8.1.4）で与えられる${}_{t-1}\overline{V}^{(hz)}_{x:\overline{n}|}$を変形して

$${}_{t-1}\overline{V}^{(hz)}_{x:\overline{n}|}=\overline{A}_{x+t-1:\overline{n-t+1}|}-\overline{P}_{x:\overline{n}|}\ \ddot{a}_{x+t-1:\overline{n-t+1}|}-\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\ \ddot{a}_{x+t-1:\overline{h-t+1}|}$$

$$= v^{\frac{1}{2}} q_{x+t-1} + v\, p_{x+t-1}\, \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

$$-\bar{P}_{x:\overline{n}|}(1 + v\, p_{x+t-1}\, \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}) - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}(1 + v\, p_{x+t-1}\, \ddot{a}_{x+t:\overline{h-t}|})$$

とし、これを

$$v\, p_{x+t-1}\, {}_t\bar{V}^{(hz)}_{x:\overline{n}|}$$

$$= v\, p_{x+t-1}\, \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} - v\, p_{x+t-1}\, \bar{P}_{x:\overline{n}|}\, \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - v\, p_{x+t-1}\, \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\, \ddot{a}_{x+t:\overline{h-t}|}$$

から引くと

$$v\, p_{x+t-1}\, {}_t\bar{V}^{(hz)}_{x:\overline{n}|} - {}_{t-1}\bar{V}^{(hz)}_{x:\overline{n}|} = \bar{P}_{x:\overline{n}|} - v^{\frac{1}{2}} q_{x+t-1} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} \qquad (8.1.6)$$

となる。この左辺で $p_{x+t-1} = 1 - q_{x+t-1}$ とし、(8.1.2) を用いると

$$P_2 = \bar{P}_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}$$

$$= v^{\frac{1}{2}} q_{x+t-1}(1 - v^{\frac{1}{2}}\, {}_t\bar{V}^{(hz)}_{x:\overline{n}|}) + (v\, {}_t\bar{V}^{(hz)}_{x:\overline{n}|} - {}_{t-1}\bar{V}^{(hz)}_{x:\overline{n}|}) \qquad (8.1.7)$$

となるが、これを (5.6.13) と比べてみると、全く同じような形でチルメル式の保険料が危険保険料と貯蓄保険料とに分解されていることが分かる。($\bar{V}$ の代わりに $\bar{V}^{(hz)}$ となるだけ) $t = 1$ のときについても (8.1.6) を導いた過程が ${}_0\bar{V}^{(hz)}_{x:\overline{n}|} = -\alpha$ とすることによってそのまま成立するので

$$v\, p_x\, {}_1\bar{V}^{(hz)}_{x:\overline{n}|} + \alpha = \bar{P}_{x:\overline{n}|} - v^{\frac{1}{2}} q_x + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}$$

となる。この左辺で $p_x = 1 - q_x$ とし (8.1.3) を用いると

$$P_1 = \bar{P}_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} - \alpha$$

$$= v^{\frac{1}{2}} q_x \left(1 - v^{\frac{1}{2}} \, {}_1\overline{V}^{[hz]}_{x:\overline{n}|} \right) + v \, {}_1\overline{V}^{[hz]}_{x:\overline{n}|} \qquad (8.1.8)$$

が得られる。右辺の第1項が危険保険料、第2項が貯蓄保険料であり、これについても純保険料式の場合と同じ形に分解されていることが分かる。ただし ${}_1\overline{V}^{[hz]}_{x:\overline{n}|}$ が負であれば、負の貯蓄保険料というようなことが起こる。

§2　初年度定期式責任準備金

負の責任準備金は好ましくないとして、$t=1$での全期チルメル式責任準備金がちょうど0になるようなαの値を求めるとどうなるであろうか。これについてm年払込n年満期養老保険で保険金年末支払の場合の例で考えてみよう。この場合は$h=m$であるので、(8.1.4) に当たる式は

$${}^{m}_{t}V^{(z)}_{x:\overline{n}|} = A_{x+t:\overline{n-t}|} - \left({}_mP_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} \right) \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} \qquad (8.2.1)$$

となるが、$t=1$におけるこの値が0に等しいならば

$$A_{x+1:\overline{n-1}|} = \left({}_mP_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} \right) \ddot{a}_{x+1:\overline{m-1}|}$$

であり、従って

$$\alpha = \left(\frac{A_{x+1:\overline{n-1}|}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{m-1}|}} - {}_mP_{x:\overline{n}|} \right) \ddot{a}_{x:\overline{m}|}$$

$$= \left({}_{m-1}P_{x+1:\overline{n-1}|} - {}_mP_{x:\overline{n}|} \right) \ddot{a}_{x:\overline{m}|} \qquad (8.2.2)$$

となる。これを (8.1.2), (8.1.1) に入れると

$$P_2 = {}_{m-1}P_{x+1:\overline{n-1}|} \qquad (8.2.3)$$

$$P_1 = {}_{m-1}P_{x+1:\overline{n-1}|} - \left({}_{m-1}P_{x+1:\overline{n-1}|} - {}_mP_{x:\overline{n}|} \right) \ddot{a}_{x:\overline{m}|}$$

$$
\begin{aligned}
&= {}_{m}P_{x:\overline{n}|}\, \ddot{a}_{x:\overline{m}|} - {}_{m-1}P_{x+1:\overline{n-1}|}\,(\ddot{a}_{x:\overline{m}|} - 1) \\
&= A_{x:\overline{n}|} - {}_{m-1}P_{x+1:\overline{n-1}|}\, v\, p_x\, \ddot{a}_{x+1:\overline{m-1}|} \\
&= v\, q_x + v\, p_x\, A_{x+1:\overline{n-1}|} - v\, p_x\, A_{x+1:\overline{n-1}|} \\
&= v\, q_x \qquad (8.2.4)
\end{aligned}
$$

が得られる。すなわち初年度の純保険料は１年定期保険の純保険料となり、第２年度以降の純保険料は、第２年度から始まり残りの $n-1$ 年間についての $m-1$ 年払込養老保険の純保険料となる。このような α（チルメル割合）あるいは純保険料を用いたチルメル式責任準備金は**初年度定期式責任準備金**といわれ、アメリカで州の保険監督官が責任準備金積立の最低基準を定める際に考えられた。このような責任準備金を規定することによって、初年度末の責任準備金が負にならないように、いいかえれば新契約費の濫費を防ごうとしたのである。イギリスではこの積立方法を１年増法（$x+1$ method）と呼んでいる。

初年度定期式責任準備金を ${}^{m}_{t}V^{[PT]}_{x:\overline{n}|}$ で表わすことにして、改めて算式で書くと、$t \geq 1$ について

$$
\begin{aligned}
{}^{m}_{t}V^{[PT]}_{x:\overline{n}|} &= {}^{m-1}_{t-1}V_{x+1:\overline{n-1}|} \\
&= A_{x+t:\overline{n-t}|} - {}_{m-1}P_{x+1:\overline{n-1}|}\, \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} \qquad (8.2.5)
\end{aligned}
$$

である。この式はまた（8.2.2）の α を（8.2.1）に入れても得られる。さらにこの場合の α は

$$
\alpha = P_2 - P_1 = {}_{m-1}P_{x+1:\overline{n-1}|} - v\, q_x \qquad (8.2.6)
$$

と書くこともできる。この式から分かるように、初年度定期式を保険期間が短く保険料率の高い養老保険に用いると α が大きくなりすぎ、当初の目的に反してそのような保険についてはかえって新契約費が濫費される恐れがある。そのため実際にはそのような保険契約に対しては制限を

設けるような積立方法がとられているが、それを**修正初年度定期式責任準備金**と称している。これには各種の方法が考えられている（文献の〔4〕が詳しい）が、そのうちの保険監督官式責任準備金とイリノイ基準責任準備金について次に述べよう。

保険監督官式は、(8.2.5) あるいは (8.2.6) における ${}_{m-1}P_{x+1:\overline{n-1}|}$ が、同一年齢で加入した20年払込終身保険の場合のそれ、すなわち ${}_{19}P_{x+1}$ より小さい場合には、(8.2.5)をそのまま用い、大きい場合にはチルメル割合を20年払込終身保険の初年度定期式におけるチルメル割合に止どめるものである。すなわち後者については (8.2.6) から得られる

$$\alpha = {}_{19}P_{x+1} - v\,q_x$$

を用いて、(8.2.1) より

$$ {}^{m}_{t}V^{(c)}_{x:\overline{n}|} = A_{x+t:\overline{n-t}|} - \left({}_{m}P_{x:\overline{n}|} + \frac{{}_{19}P_{x+1} - v\,q_x}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} \right) \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} \qquad (8.2.7)$$

とする。

次に**イリノイ基準**では、もとの契約の平準純保険料 ${}_{m}P_{x:\overline{n}|}$ と同一年齢で加入した20年払込終身保険の平準純保険料 ${}_{20}P_x$ とを比較して、前者が後者より小さい時には初年度定期式責任準備金をそのまま用い、大きい場合には20年後（払込期間が20年より短かければ払込期間終了時）に当該保険の平準純保険料式責任準備金に合致するように、20年払込終身保険の初年度定期式責任準備金に一定額を加えて行く。その方法は、$k = min(m, 20)$ として ${}^{m}_{k}V_{x:\overline{n}|} - {}^{19}_{k-1}V_{x+1}$ を保険金とする生存保険を考え、その純保険料式責任準備金を加えるものである。従って次の式で与えられるものとなる。

$$ {}^{m}_{t}V^{(Il)}_{x:\overline{n}|} = {}^{19}_{t-1}V_{x+1} + \left({}^{m}_{k}V_{x:\overline{n}|} - {}^{19}_{k-1}V_{x+1} \right) {}_{t}V_{x:\overset{1}{\overline{k}|}} \qquad (8.2.8)$$

§3　充足保険料式責任準備金

これはヘックナー（G. Höckner）が唱えた責任準備金積立法である。

第7章§1で、事業費を第3の計算基礎に導入して営業保険料を計算する式（7.1.4）を示したが、ここでα, β, γ, γ'を安全割増や営業利益を含まない経費のみ考えたものとした時、その営業保険料を**充足保険料**と呼ぶ。そして責任準備金の算式でも第3の計算要素を導入することとし、将来法の算式において、支出面では将来の（予定）事業費支出を加えるとともに、収入面では純保険料でなく充足保険料を用いるとしてみよう。そうするとm年払込n年満期養老保険のt年経過後（$t < m$）では

$$
\begin{aligned}
\text{将来の支出の現価} &= \bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} + \beta\, {}_m\bar{P}^{*}_{x:\overline{n|}}\, \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}} \\
&\quad + \gamma\, \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}} + \gamma'\,(\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} - \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}})
\end{aligned}
$$

$$
\text{将来の収入の現価} = {}_m\bar{P}^{*}_{x:\overline{n|}}\, \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}}
$$

となるので、両者の差をとってそれを${}^{m}_{t}\bar{V}^{(A)}_{x:\overline{n|}}$で表わすと

$$
\begin{aligned}
{}^{m}_{t}\bar{V}^{(A)}_{x:\overline{n|}} &= \bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} - (1-\beta)\, {}_m\bar{P}^{*}_{x:\overline{n|}}\, \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}} \\
&\quad + \gamma\, \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}} + \gamma'\,(\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} - \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}})
\end{aligned}
\qquad (8.3.1)
$$

となる。この${}_m\bar{P}^{*}_{x:\overline{n|}}$に（7.1.5）を用い整理すると

$$
\begin{aligned}
{}^{m}_{t}\bar{V}^{(A)}_{x:\overline{n|}} &= \bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} - \left({}_m\bar{P}_{x:\overline{n|}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{m|}}}\right) \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}} \\
&\quad + \gamma'\left(\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} - \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{m|}}}\, \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}}\right)
\end{aligned}
\qquad (8.3.2)
$$

が得られる。また$t \geqq m$すなわち保険料払込済後では、将来収入がなく、一方支出はγ'に関するもののみなので

$$ {}_t^m\overline{V}_{x:\overline{n}|}^{[A]} = \overline{A}_{x+t:\overline{n-t}|} + \gamma' \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \tag{8.3.3} $$

となる。このような責任準備金を**充足保険料式責任準備金**という。

全期払込の養老保険（$m = n$）では、$\gamma' = 0$であるので${}_t\overline{V}_{x:\overline{n}|}^{[A]}$の算式（8.3.2）は${}_t\overline{V}_{x:\overline{n}|}^{[z]}$の算式（8.1.4）で$h = n$としたものに一致する。すなわち充足保険料式責任準備金はチルメル割合αの全期チルメル式責任準備金と同じになる。ただし短期払込の場合は、γ'の項があるので充足保険料式はm年チルメル式より大きく、特に保険料払済後では純保険料式よりも大きくなる。

充足保険料式における保険料の分解もチルメル式の場合と同様である。（8.1.4）から（8.1.6）を導いた時と同じ手続きを（8.3.2）から出発して行うと

$$ v\,p_{x+t-1}\,{}_t^m\overline{V}_{x:\overline{n}|}^{[A]} - {}_{t-1}^{\,m}\overline{V}_{x:\overline{n}|}^{[A]} $$

$$ = {}_m\overline{P}_{x:\overline{n}|} - v^{\frac{1}{2}} q_{x+t-1} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} - \gamma'\left(1 - \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}\right) $$

となり、従って$p_{x+t-1} = 1 - q_{x+t-1}$とすると

$$ {}_m\overline{P}_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} + \gamma' \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} $$

$$ = v^{\frac{1}{2}} q_{x+t-1}\left(1 - v^{\frac{1}{2}}\,{}_t^m\overline{V}_{x:\overline{n}|}^{[A]}\right) + \left(v\,{}_t^m\overline{V}_{x:\overline{n}|}^{[A]} - {}_{t-1}^{\,m}\overline{V}_{x:\overline{n}|}^{[A]}\right) \tag{8.3.4} $$

が得られる。この式で左辺が（8.1.7）の P_2 すなわちこの場合の純保険料に当たるものであり、右辺がその危険保険料と貯蓄保険料への分解を示す。初年度では（8.1.8）と同じく

$$P_1 = P_2 - \alpha = v^{\frac{1}{2}} q_x (1 - v^{\frac{1}{2}}\ {}^{m}_{1}\overline{V}^{(A)}_{x:\overline{n}|}) + v\ {}^{m}_{1}\overline{V}^{(A)}_{x:\overline{n}|} \tag{8.3.5}$$

という分解になる。

次にγと γ' の部分のみ考えて将来法による責任準備金を書いてみよう。その時用いられる保険料は（7.1.4）で$\alpha=0$，$\beta=0$ としたもので、これを**調整純保険料**とよぶことにし $\overline{P}^{(I)}$ で表わすと（7.1.5）より

$$ {}_{m}\overline{P}^{(I)}_{x:\overline{n}|} = {}_{m}\overline{P}_{x:\overline{n}|} + P^{(\gamma)} \tag{8.3.6}$$

$$P^{(\gamma)} = \gamma + \gamma' \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} \tag{8.3.7}$$

である。将来収入を計算する時にこの保険料を用い、将来支出の計算でもγと γ' の部分のみ考慮することにすると、それは（8.3.2）で$\alpha=0$としたものに当たるから、$t<m$ で

$$\begin{aligned} {}^{m}_{t}\overline{V}^{(I)}_{x:\overline{n}|} &= \overline{A}_{x+t:\overline{n-t}|} - {}_{m}\overline{P}_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} \\ &\quad + \gamma' (\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}) \end{aligned} \tag{8.3.8}$$

となり、$t \geqq m$ では

$$ {}^{m}_{t}\overline{V}^{(I)}_{x:\overline{n}|} = \overline{A}_{x+t:\overline{n-t}|} + \gamma' \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \tag{8.3.9}$$

となる。今γと γ' の部分だけを考え、その将来支出から $P^{(\gamma)}$ の将来収入を引いたものを**事業費責任準備金**と呼び、${}^{m}_{t}V^{(\gamma)}_{x:\overline{n}|}$ で表わすと、$t<m$ では（8.3.7）を用いて

$$ {}^{m}_{t}V^{(\gamma)}_{x:\overline{n}|} = \gamma \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} + \gamma' (\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}) - P^{(\gamma)} \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}$$

$$= \gamma' \left(\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} \right)$$

となり、$t \geqq m$ では

$${}^{m}_{t}V^{(\gamma)}_{x:\overline{n}|} = \gamma' \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

となる。すなわちそれぞれ（8.3.8）の右辺第3項および（8.3.9）の右辺第2項に一致する。従ってこのような事業費責任準備金を用いると

$${}^{m}_{t}\overline{V}^{(I)}_{x:\overline{n}|} = {}^{m}_{t}\overline{V}_{x:\overline{n}|} + {}^{m}_{t}V^{(\gamma)}_{x:\overline{n}|} \qquad (8.3.10)$$

と書くことができる。${}^{m}_{t}\overline{V}^{(I)}_{x:\overline{n}|}$ を**調整純保険料式責任準備金**と呼ぶが、わが国で現在純保険料式と称しているものはこれに当たる。

§4　端数経過の場合の責任準備金

これまでは t が整数の場合、すなわち契約時から整数年数が経過した時の責任準備金を考えたが、t に端数がつく場合にはどう考えればよいであろうか。まず保険料年払、保険金即時支払の時の純保険料式責任準備金について考えてみよう。

保険者の立場で考えると、ある保険年度末に保有していた責任準備金に対し翌年度始めに保険料収入があったことで、契約者に対する負債を表わす責任準備金はその分その時点で急に増加する。第 t 保険年度末の純保険料式責任準備金を ${}_{t}V$ とし、第 $t+1$ 年度始めの保険料収入直後のそれを ${}_{t+0}V$ とすれば、P を純保険料として

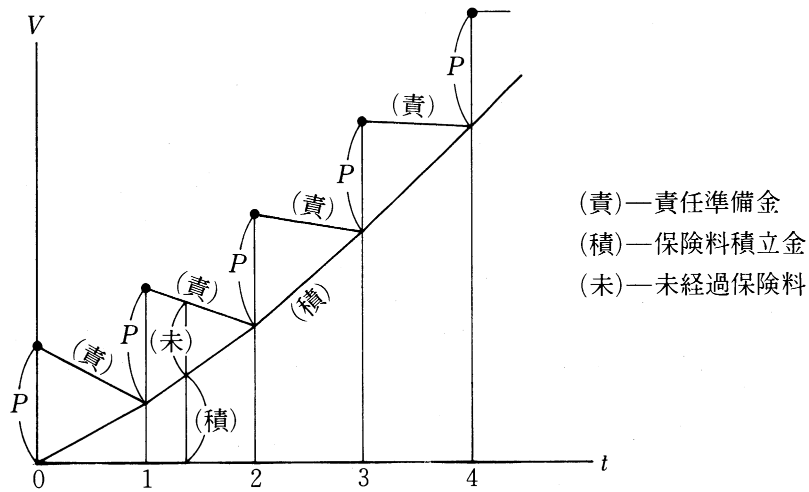
$${}_{t+0}V = {}_{t}V + P$$

である。契約後 $t+s$（$0 < s < 1$）という端数経過については、この

${}_{t+0}V$ がその後利息による増加と保険金支払による減少とを繰り返しながら年間を通じて一様に減少し、年末に ${}_{t+1}V$ になるものと考える。すなわち

$$
\begin{aligned}
{}_{t+s}V &= {}_{t+0}V + s\,({}_{t+1}V - {}_{t+0}V) \\
&= \{{}_{t}V + s\,({}_{t+1}V - {}_{t}V)\} + (1-s)P \qquad (8.4.1)
\end{aligned}
$$

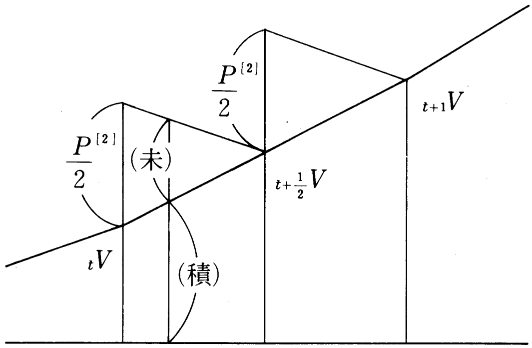
と考える。この式の右辺第1項を**保険料積立金**といい、第2項 $(1-s)P$ はその年度の残余期間すなわち未経過期間に対する純保険料とみられるので**未経過保険料**という。このような考え方に立って責任準備金の時間的経過を図示すると次の図のようになる。



保険料計算に当たって保険金年末支払とされる場合でも、実務上では保険金は即時に支払われ、中間時点ではそれまでの死亡契約の保険金支払義務は既に免れているので、上に示した即時支払の図で示されるような保険料積立金および未経過保険料が妥当である。

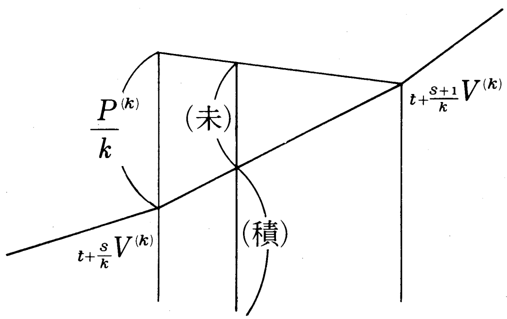
次に保険料分割払（分割賦払とする）についても上の年払の時と同じ

ように考えると、例えば半年の賦払では、${}_tV$ と ${}_{t+\frac{1}{2}}V$ の二つの時点の直後で半年払保険料 $\dfrac{P^{(2)}}{2}$ だけ急に責任準備金が増加する。従って次のような図が描かれる。



3月払や月払についても同様で、急に増加する時点が4回あるいは 12 回となり、そこで $\dfrac{P^{(4)}}{4}$ あるいは $\dfrac{P^{(12)}}{12}$ だけ増える。従って未経過保険料を表わす折れ線が低くて頻繁になり鋸の刃のようになる。保険料積立金を表わす折れ線は年払と同じである。

分割払真保険料の時は、$t+\dfrac{s}{k}$ の時点のそれぞれが一つの保険年度末のようになり、次の図のような関係で保険料積立金と未経過保険料が定められる。



なお、保険料払込済後は未経過保険料はなく保険料積立金のみとなる。

次に純保険料式でなくチルメル式で責任準備金を積立てる場合を見よう。年払についてだけ考える。（分割払については純保険料式の時と同じように考えればよい）　チルメル期間内では（8.1.1）の P_1 と P_2 を用いると、責任準備金は ${}_0V=0$ の直後に $P_1=P_2-\alpha$ だけ急に増え、またその他の整数経過 t における ${}_tV$ ではその直後に P_2 だけ急に増える。初年度での（時には第2年度以降でも）保険料積立金が負になることもある。チルメル期間経過後は純保険料式と同じである。

充足保険料式では、充足保険料から保険料収入時点で直ちに費消されると考えられる経費を差し引いた分だけが急に増えると考える。直ちに費消される経費は、時点0における新契約費αと、払込期間中のすべての $t\,(\geqq 0)$ における集金経費 $\beta\overline{P}^*$ と、維持費γから1年を通じて一様に費消すると考えられる γ' （払込済後の維持費）を控除した $\gamma-\gamma'$である。営業保険料は（7.1.5）で表わされるから、第2年度以降の場合は（7.1.5）から $\beta\,{}_m\overline{P}^*_{x:\overline{n}|}+(\gamma-\gamma')$ を引いて、${}_tV$ の直後に増える額は

$$P_2={}_m\overline{P}_{x:\overline{n}|}+\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}+\gamma'\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}$$

である。第1年度については、チルメル式と同じく ${}_0V=0$ からその時点で $P_1=P_2-\alpha$ だけ急に増えると考える。

調整純保険料式では$\alpha=0$と考えるので、P_1 と P_2 の区別がなく、${}_0V=0$ から出発して整数時点で ${}_m\overline{P}_{x:\overline{n}|}+\gamma'\dfrac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}$ だけ責任準備金が急に増加すると考える。

§5　事業年度末における責任準備金の計算

生命保険会社が事業年度末に決算を行う時、負債の大部分は責任準備金であるので、その計算方法によって剰余金は大きな影響を受ける。（第10章§1参照）

事業年度末に全保有契約について責任準備金を計算するにあたっては、会社はまず､純保険料式あるいは§1～§3で述べた積立方法のなかからどの方式を採用するかを定める。それは法律で許されている範囲内のものであるべきは当然であるが、わが国では主務官庁から承認を受けた方法によらねばならない。積立方式が定まれば、例えばある一つの契約について決算日現在で契約時点からの経過年数が $t+s$（tは整数で、$0<s<1$）であり、その保険料払込方法が年払であると、(8.4.1) に従って

$$\text{保険料積立金は}\quad {}_tV+s\,({}_{t+1}V-{}_tV)$$

$$\text{未経過保険料は}\quad (1-s)P$$

として責任準備金を計算することができる。また保険料分割払込の時は、保険料積立金は変わらないが未経過保険料が変わり、最終払込時点からの経過を $s'\,(0<s'<\frac{1}{k})$ として

$$\left(\frac{1}{k}-s'\right)P$$

が未経過保険料となる。

以上のようにして得られた個々の契約の責任準備金を全保有契約について合計すれば、決算にあたり会社の計上する責任準備金となるが、実際には会社の保有する契約は1,000万件にもおよぶことがあり、その場合はコンピューターをもってしても計算にかなりの時間を要する。そこで通常は条件の似通った契約を一まとめにして保険金額を合計しておき、

そうしてできた群団毎に責任準備金を計算する方法がとられる。

群団をつくるには、例えば同一事業年度に契約された、同一保険種類、同一保険期間および保険料払込期間、同一払込方法（年払、月払等の別)、同一契約年齢の契約を一まとめにする。その上で保険料積立金については、その群団に属する契約はすべて当該事業年度の中央で契約されたものとし（従って決算日は保険年度の中央となる)、

$$s=\frac{1}{2}\qquad \text{として}\qquad \frac{{}_tV+{}_{t+1}V}{2}$$

を群団の総保険金額に掛けてこれを計算する。また未経過保険料については、その群団に属する契約の最終の保険料払込から決算日までがすべて払込期間の半分まで経過しているとして、

$$s'=\frac{1}{2k}\qquad \text{として}\qquad \frac{1}{2k}P$$

を群団の総保険金額に掛けてこれを計算する。どちらの計算においても個々の契約の場合を平均すれば全部について期間の中央と考えてよいとしているのであるが、こうすれば現在のコンピューターの能力で計算が可能となり、この方法が主に用いられている。

以前は計算機械の能力が低かったので、年満期契約についてはさらに契約年齢を５歳毎に一まとめにして、中央の年齢に基づいて責任準備金を計算した。またもっと大きな契約群団をつくり平均的に計算する方法（大群団計算）も種々考案された。これらの方法は計算技術として興味深いが、コンピューターの発達した現在では利用価値を失ったのでここでは割愛する。(文献〔１〕に詳しく紹介されている)

決算時の責任準備金に関する一つの問題は、最終の払込期日に払込まれるべき保険料がまだ払込まれていないのに、約款上の猶予期間内であ

るため、あるいは事務処理上の都合のため、その契約の失効処理をせずに有効契約中に含めているものがあることである。その場合責任準備金についても含めて計算してしまうと、会社の負債である責任準備金が過大計上となる。その対策の一つは、払込期日が経過しても未収になっている保険料をすべて保険料収入にあげ（すなわち一応入ったものとして）責任準備金は全有効契約について計算するが、一方で未収になっている保険料の合計額を**未収保険料**という勘定科目で資産に計上する方法である。これは未収保険料という資産で負債の過大見積もりの見返りとするものである。

あるいは未収保険料を計上せずに、その分責任準備金から控除してもよい。わが国では現在この方法によっているが、未収期間中も死亡危険の負担はしたのだからという理由で、未収期間に応ずる危険保険料は控除分から除くことになっている。

なお諸外国の例では、未収保険料のほかに**繰延保険料**という勘定科目が資産に計上されている場合がある。これは契約をすべて年払と考えて責任準備金を計算し、そのかわりに分割払契約の当該保険年度に属する保険料で払込期日が翌事業年度になるものを収入されたものと考えて資産勘定に計上したものである。

第8章　練習問題

（1）　第5回全会社表，5.5％ によって次の責任準備金を計算せよ。

$${}^{20}_{5}\overline{V}_{40:\overline{25|}}\ ,\quad {}^{20}_{5}\overline{V}^{[10z]}_{40:\overline{25|}}\ ,\quad {}^{20}_{5}\overline{V}^{[z]}_{40:\overline{25|}}\ ,\quad {}^{20}_{5}\overline{V}^{[PT]}_{40:\overline{25|}}\ ,\quad {}^{20}_{5}\overline{V}^{[A]}_{40:\overline{25|}}\ ,\quad {}^{20}_{5}\overline{V}^{[I]}_{40:\overline{25|}}$$

ただし $\alpha = 25‰$， $\gamma' = 1.50‰$ とする。

（2）　保険金即時支払、保険料全期払込の養老保険の場合に、チルメル割合 α 、チルメル期間 h 年のチルメル式責任準備金の過去法による式を書け。またそれが将来法の式と一致することを証明せよ。(純保険料式で両者が一致することを前提として)

（3）　40歳契約、25年満期で保険金年末支払の養老保険の営業保険料が、第5回全会社表，5.5％，$\alpha = 25‰$，$\beta = 3\%$，$\gamma = 2.5‰$　で計算されている。この契約の責任準備金をチルメル割合20‰の10年チルメル式で積むとしたとき

(a)　P_1 および P_2 を計算せよ。

(b)　第1年度、第4年度、第12年度における危険保険料、貯蓄保険料および付加保険料を計算せよ。

（4）　保険金即時支払の養老保険に関して全期チルメル式責任準備金を考える際、初年度純保険料が初年度の定期保険料 $v^{\frac{1}{2}} q_x$ に等しくなるようにチルメル割合 α を定めよ。

またこの α による全期チルメル式責任準備金は、 $t \geqq 1$ において純保

険料式責任準備金 ${}_{t-1}\overline{V}_{x+1:\overline{n-1|}}$ に等しくなることを証明せよ。

（５） 保険金年末支払の養老保険の充足保険料式責任準備金に関し、次の再帰式を証明せよ。

（a） ${}_{t}V_{x:\overline{n|}}^{[A]} + (1-\beta)P^{*}_{x:\overline{n|}} - \gamma - v\,q_{x+t} = v\,p_{x+t}\ {}_{t+1}V_{x:\overline{n|}}^{[A]}$

ただし ${}_{0}V_{x:\overline{n|}}^{[A]} = -\alpha$ とする。

（b）

$$1 - {}_{t+1}V_{x:\overline{n|}}^{[A]}$$

$$= \frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}}\left[(1 - {}_{t}V_{x:\overline{n|}}^{[A]}) - \{(1-\beta)P^{*}_{x:\overline{n|}} - \gamma + d\} \right]$$

（第５章 練習問題（２）の（４）の類似）

（６） 保険期間の途中で生存給付金を支払うような養老保険を考える。第 t 年度末に生存給付金 E_t を支払うとして、第 $t+1$ 年度における保険料積立金と未経過保険料について考えよ。

第９章　解約その他諸変更に伴う計算

§1　解約返戻金

契約者が生命保険に加入して何年か経過したところで、何等かの理由により保険料の払込が困難になったり、あるいは保険の必要がなくなった場合に、まず考えられるのは解約である。契約者は保険期間の途中でいつでも解約を申し出ることができるので、解約に際しどれ位の金額が保険者から契約者に返還されるかを、契約の時点で明確に定めておかねばならない。その約定価格を**解約返戻金**という。約定であるから極端な場合として解約返戻金は常に０であるとしても、契約者が了承して加入しているのであれば何等差し支えない。しかしそれではあまりにも保険者側に一方的に有利な契約になるので、例えば米国では保険法で**不没収給付**という名称で解約返戻金の最低限が定められている。それは法定の最低責任準備金からなにがしかの控除を行う方法である。わが国でも主務官庁により最低限に関する指導が行われており、生命保険会社はそれに基づいた解約返戻金の算式を主務官庁に示して認可を受けている。その方法は同じように責任準備金から一定の控除を行うものである。

責任準備金を基準とするのは、それが貯蓄保険料の累積額として契約者の持ち分を表わすと考えられるからである。責任準備金から控除する額を**解約控除**というが、控除する理由は主として“新契約費の償却”である。すなわち新契約時に使用される費用は通常初年度の付加保険料よりずっと大きいため、会社は初年度の損失を後年の剰余で補って償却

するが、解約があると未償却分が回収されずに終わるので、その分を解約者に負担させるのである。

そのほか、解約は会社の経営上に次のような不利益を与えると考えられ、場合によってはこれらも無視できない。

- 経費の増加――　解約処理には経費を要する。さらに残存の契約群団が小さくなれば１件当たりの経費率が高くなる可能性がある。
- 逆選択――　解約者には強健者が多いので、残存の契約群団は死亡率が悪くなる恐れがある。
- 数学的危険の増大――　解約によって残存の契約群団が小さくなれば、群団の死亡率の安定性が小さくなる。（死差損を出す確率が高くなる）従って一時に大量の解約が発生すれば、残存群団について再保険することや危険準備金の積み増しを考慮する必要が生じる。
- 投資面の不利益――　解約が頻繁に行われると、会社では常に多額の現金を準備して支払に備えねばならず、有利な投資の機会が減少する。

現在わが国では調整純保険料式責任準備金を基準にして、t 年後の解約返戻金 ${}_tW$ を

$$ {}_tW = \begin{cases} {}_tV - \sigma \dfrac{10-t}{10} & (t < 10) \\ {}_tV & (t \geq 10) \end{cases} \tag{9.1.1} $$

という式で定めている。σ は通常保険料計算に用いられる予定新契約費 α などを参考にして定められる。

なお保険契約に基づいて、契約者は保険期間の途中で申し出て、将来の保険料を減額し、同時に同じ割合で保険金額も減額して、残余の保険金額で保険契約を継続することができる。この措置を**減額**というが、こ

の場合は減額した分だけの解約があったものとされ、その分の解約返戻金が支払われる。

§2　保険料振替貸付

契約者が一時的に保険料の払込が困難になった場合には、ある期間会社が保険料を立て替えて契約を有効に存続させ、保険による保障を継続することがある。この措置を**保険料振替貸付**といい、保険約款に適用しうる場合と適用の方法が規定されている。契約者から申し出があった場合のみ貸付が行われることもあるが、一般には契約時に契約者の了承を得ておいて保険料の払込遅延があれば自動的に貸付が行われることになっている。

貸付が可能か否かは、その契約者に対する貸付総額が契約の解約返戻金を超過しないという条件で判定される。貸付金の中には既往の振替貸付金残高のほかに、契約者が解約返戻金の範囲内で融資を受けるいわゆる**契約貸付**の金額も含まれる。いま払込遅延があった時点での既往の貸付金総額を ${}_tL$ ，年払保険料をP，貸付金に対する利率を i'（保険料計算に用いられた予定利率 i と同じである必要はない）とすると

$$({}_tL+P)(1+i')\leq {}_{t+1}W \tag{9.2.1}$$

が満足されるかぎり、貸付が可能である。

貸付があった後に死亡、満期あるいは解約があれば、支払金から貸付金が差し引かれる。(9.2.1) の不等式が逆になって貸付が不能である場合には、契約は**失効**として**処理**される。また貸付金については通常1年単位で利息が元金に繰り入れられる。この貸付金は会社の経理上は資産に計上される。

§3　払済保険

保険料払込が困難になった契約者は、会社の同意を得て、保険金額を減額することを条件に、保険金の支払条件や保険期間を変更せずに以後の払込を中止することができる。変更後のそのような保険を**払済保険**という。払済保険の保険金額を定めるには、変更時の元の保険の責任準備金で残余期間の一時払保険を購入すると考える。

例えば元の保険が養老保険でその責任準備金が純保険料式で積立てられている場合に、 t 年経過後に払済保険への変更申し出があれば、

$$ {}_t\overline{V}_{x:\overline{n}|} = S\,\overline{A}_{x+t:\overline{n-t}|} $$

によって新しい保険金額Sが定められる。

ただし契約からあまり経過しておらず新契約費の償却が十分に行われていない期間では、変更の時点で償却を済ます意味もあり、${}_t\overline{V}_{x:\overline{n}|}$ の代わりにチルメル式責任準備金や解約返戻金を用いることが多い。また右辺の一時払保険料についても、純保険料ではなく払済後の維持費を入れたものが通常用いられるので

$$ {}_tW = S\,(\,\overline{A}_{x+t:\overline{n-t}|} + \gamma'\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}\,) $$

によって払済保険金額Sが定められる。すなわち

$$ S = \frac{{}_tW}{\overline{A}_{x+t:\overline{n-t}|} + \gamma'\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}} \tag{9.3.1} $$

となる。変更の時点で振替貸付金や契約貸付金がある場合には、その元利合計 ${}_tL$ を解約返戻金から差し引いておく。従って上式において ${}_tW$ の代わりに ${}_tW - {}_tL$ を用いる。養老保険以外の保険種類についても、同じ原則で計算する。

§4　延長保険

払済保険では保険金額を減額したが、保険金額はもとのままとし変更後の保険をある定められた期間の定期保険として契約を継続する方法がある。変更後のそのような保険を**延長保険**といい、延長保険の有効な期間を延長期間という。次に延長期間の定め方を述べよう。

払済保険の場合と同様に解約返戻金を変更後の保険の一時払保険料（維持費を入れたもの）に充当して、保険期間T年の定期保険が可能であるとすると

$$_tW = \bar{A}^{\,1}_{x+t:\overline{T|}} + \gamma'^{(1)}\ddot{a}_{x+t:\overline{T|}} \tag{9.4.1}$$

という式が成立するので、これによってTを定めればよい。（ただし$\gamma'^{(1)}$はγ'中の死亡保険に対応する部分と考える）ただ右辺はTの整数値に対してのみ計算ができるので、月単位までTを求めるには$_tW$をはさむ二つの整数値T_1, T_2を定め、一次補間によってそれを求める。もし$T > n-t$となるならば、すなわち

$$_tW > \bar{A}^{\,1}_{x+t:\overline{n-t|}} + \gamma'^{(1)}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}$$

となるならば、延長期間を$n-t$に止どめて元の契約の満期の日までとし、それに必要な一時払保険料を超過する解約返戻金の部分は、満期日に支払う生存保険金の一時払保険料に充当する。生存保険金額をS'とし、またγ'中の生存保険に対応する分を$\gamma'^{(2)}$（$\gamma' = \gamma'^{(1)} + \gamma'^{(2)}$である）とすれば、収支相等の原則から

$$_tW - (\bar{A}^{\,1}_{x+t:\overline{n-t|}} + \gamma'^{(1)}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}) = S'(A_{x+t:\overset{\,1}{\overline{n-t|}}} + \gamma'^{(2)}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}})$$

となるべきであるから

$$S' = \frac{_tW - (\bar{A}^{\,1}_{x+t:\overline{n-t|}} + \gamma'^{(1)}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}})}{A_{x+t:\overset{\,1}{\overline{n-t|}}} + \gamma'^{(2)}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}} \tag{9.4.2}$$

によって S' が定められる。

払済保険の場合と同様に、契約上の貸付金がある場合には、それを変更時点で回収する意味で ${}_tW - {}_tL$ を用いて (9.4.1) および (9.4.2) の計算を行う。

また貸付金がある場合の別の方法として、保険金額を変更し $1 - {}_tL$ を変更後の定期保険金額とすることがある。(先の方法では、貸付金のある場合に死亡直前に延長保険に変更すれば、結果的に返済を免れることになるので、それを避けるためである) その場合には

$${}_tW - {}_tL$$

と

$$(1 - {}_tL)(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}}^{1} + \gamma'^{(1)}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}})$$

の両者を比較し、前者が小さければ

$${}_tW - {}_tL = (1 - {}_tL)(\bar{A}_{x+t:\overline{T|}}^{1} + \gamma'^{(1)}\ddot{a}_{x+t:\overline{T|}}) \tag{9.4.3}$$

によって延長期間 T を定め、また前者が大きければ

$$S' = \frac{({}_tW - {}_tL) - (1 - {}_tL)(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}}^{1} + \gamma'^{(1)}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}})}{A_{x+t:\overset{1}{\overline{n-t|}}} + \gamma'^{(2)}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}} \tag{9.4.4}$$

によって生存保険金額 S' を定める。

§5　保険期間の変更および保険種類の変更

保険契約の継続中に、保険契約者の申し出により保険期間の変更あるいは保険種類の変更を会社が承認する場合がある。その際例えば保険期間の短縮や、終身保険から養老保険への変更のように、保険料率の低い契約から高い契約への変更については逆選択は考えられないが、料率の高い契約から低い契約への変更についてはその恐れがあるので、会社では始めからこれを認めないか、あるいは何らかの条件をつけて認めるこ

とになる。

このような変更の場合に最も普通に用いられる処理の方法は、変更時の旧契約と新契約との責任準備金の差額を授受して、すなわち契約当初から新契約であった状態にして、以後の保険料を新契約のものに改めることである。例えばn年満期養老保険からm年満期（$n > m$）への変更が、t年経過後に申し込まれた時には、${}_t\overline{V}_{x:\overline{m}|} - {}_t\overline{V}_{x:\overline{n}|}$ を契約者から収入し、以後の保険料を $\overline{P}^*_{x:\overline{m}|}$ に改める。

これに対する一つの代替方法として、責任準備金の差額を一時に収入することはせず、満期までに等分して収入することが考えられる。その場合の以後の保険料は、例えば上例の場合では

$$\overline{P}^*_{x:\overline{m}|} + \frac{{}_t\overline{V}_{x:\overline{m}|} - {}_t\overline{V}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}} \qquad (9.5.1)$$

となる。また別の代替方法として次のようなものもある。すなわち変更の時点で$x+t$歳契約、$m-t$年満期養老保険に加入するものとし、一方元の契約の責任準備金で$m-t$年の生命年金を購入して毎年支払を受ける年金は保険料の一部に充当して行くと考える。そうすると以後の保険料は

$$\overline{P}^*_{x+t:\overline{m-t}|} - \frac{{}_t\overline{V}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}} \qquad (9.5.2)$$

である。（9.5.1）と（9.5.2）は一般には等しくならないが、$\overline{P}^*$ の代わりに純保険料$\overline{P}$を用い、$\overline{V}$として純保険料式責任準備金を用いれば、両者が等しくなることが証明される。(本章 練習問題の（２）参照)

§6　転換

転換とは、契約者が元の保険契約を購入した時点ではまだ販売されて

いなかった新しい保険種類に、元の契約を無駄にすることなく加入できるようにした制度である。あるいは契約者の生活環境が変化し、元の保険契約では充分な保障が行えない時にも、この制度が用いられる。無駄にしないとは元の契約の責任準備金を新しい契約の購入価格に利用することであるが、それには二つの方法が考えられる。

（１）　元の契約の責任準備金（解約返戻金ではない）を用いて新しい契約と同一の保険期間の払済保険を購入し、新契約の保険料は、新保険金額から払済保険金額を差し引いた金額に対して計算する。

（２）　元の契約の責任準備金を利用して新しい契約の保険料の一部に充当し、その分新しい契約の保険料を減らす。

現在わが国では（１）の方法が多く用いられているが、その時責任準備金で購入できる新しい契約の払済保険金額は、(9.3.1) における ${}_tW$ を ${}_tV$ でおきかえた

$$\frac{{}_t\overline{V}}{\overline{A}_{x:\overline{n}|} + \gamma' \ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{9.6.1}$$

である。ただしここで　t は元の契約の経過年数、x および n は新しい契約の契約年齢および保険期間である。従って元の保険金額１に対し新しい保険金額を S とすれば

$$\overline{P}^{*}_{x:\overline{n}|}\left(S - \frac{{}_t\overline{V}}{\overline{A}_{x:\overline{n}|} + \gamma' \ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \right) \tag{9.6.2}$$

が以後の営業保険料である。

この場合転換後の経過年数 s における責任準備金は

①　転換後の保険種類で保険金額が (9.6.2) の括弧内である時の経過 s における責任準備金と

②　(9.6.1) を保険金額とする払済保険の経過 s における責任準備金との和である。

（２）の方法では、転換時の旧契約の責任準備金を用いて新しい保険期間中与えられる生命年金を購入し、支払われた年金を保険料の一部に充当すると考える。すなわち

$$\overline{P}^{*}_{x:\overline{n}|}\,S - \frac{{}_t\overline{V}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{9.6.3}$$

が以後の営業保険料となる。

この場合転換後の経過年数 s における責任準備金は

①　転換後の保険種類で保険金額 S の時の経過 s における責任準備金と

②　年金年額が $\dfrac{{}_t\overline{V}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$ である生命年金の残余期間に対する年金現価すなわち

$$\frac{{}_t\overline{V}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\ \ddot{a}_{x+s:\overline{n-s}|}$$

との和である。

なお営業保険料のかわりに純保険料を用い、責任準備金を純保険料式とすると、(9.6.2) と (9.6.3) が同じになることが証明できる。（本章 練習問題の（５）参照）それ以外の場合は、一般には両式は一致しない。

第9章　練習問題

（1）　年払保険料率が ${}_{20}\overline{P}^{*}_{40:\overline{25}|}$ である短期払込養老保険がある。保険金額は1000万円とする。計算基礎を第5回全会社表，5.5％，$\sigma = 25‰$ ，$\gamma' = 1.50‰$ として、$t = 3$ および $t = 15$ について次の保険価格を計算せよ。

（a）　算式（9.1.1）に基づく解約返戻金

（b）　上記解約返戻金に基づく払済保険金額

（c）　同じく延長保険期間および延長保険の生存保険金額

（2）　（9.5.1）および（9.5.2）の両式で $\overline{P}^{*}$ の代わりに純保険料 $\overline{P}$ を用い、$\overline{V}$として純保険料式責任準備金を用いれば、両式が等しくなることを証明せよ。

（3）　充足保険料および充足保険料式責任準備金が使用されているとする。m年払込n年満期養老保険を契約からt年後（$t < m$）に、同一保険金額の m' 年払込 n' 年満期養老保険に変更した。変更時に責任準備金差額を授受することをせず、将来の保険料でその分を調整することとした場合、妥当と思われる将来の保険料の式を示せ。((9.5.1）に当たるものと（9.5.2）に当たるものを考え、両者が同一であることを証明する)

（4）　x歳契約、n年払込n年満期の養老保険に加入している人が、t年（$t < m$）経過後に保険金額および保険期間を変更することなく払

込期間をm年（$m<n$）に短縮したいと申し出た。以後の保険料をいくらにすればよいか。

（5）（9.6.2）および（9.6.3）の両式で $\overline{P}^*$ の代わりに純保険料 $\overline{P}$ を用い、かつ$\gamma'=0$とした時には、両式が等しくなることを証明せよ。

（6）満期保険金額1、死亡保険金額2、x歳契約、n年満期の定期付養老保険を、t年経過後に、満期保険金額2、死亡保険金額4の同一保険期間の保険に転換する。(9.6.2）の考え方をとって

（a）旧契約の責任準備金の全額を養老保険の保険料の割引に利用する場合と

（b）旧契約の責任準備金のうち養老部分および定期部分のそれぞれを、以後の養老保険および定期保険の保険料の割引に利用する場合

の二とおりについて転換後の保険料を求めよ。ただし保険料および責任準備金は純保険料式のものとする。また

（c）二つの場合の保険料が等しくなることを証明せよ。

第10章　剰余の分析

§1　決算報告

生命保険会社は毎年一定の日（わが国では現在３月３１日）に、帳簿を締め切って決算を行い、その事業に関して法律で定められた各種の決算報告書を作成する。報告書の中心となるものは**貸借対照表**と**損益計算書**である。前者は決算日現在の資産と負債を評価して対比し、会社の財政状態を明らかにしたものであるが、負債返済能力その他の観点から会社の現況を判断する資料とされる。後者は過去１年間の収支損益を計算して剰余金（または利益金）を算出したもので、剰余金がどのように出てきたかを示し、会社の収益力はどうか等を判断する資料とされる。

わが国では保険業法施行規則の付録で、生命保険会社に関するそれらの様式が定められているが、それは次頁のようなものである。(一部小分類科目を省略した)

ただしこれらは株式会社の場合の書式で、相互会社の場合は勘定科目を次のように改める。

（貸借対照表）

保険契約者配当準備金	→	社員配当準備金
資本金	→	基金
資本準備金	→	基金積立金
利益準備金	→	損失塡補準備金
当期未処分利益金	→	当期未処分剰余金
当期利益	→	当期剰余

（損益計算書）

保険契約者配当金積立利息繰入額 → 社員配当金積立利息繰入額
税引前当期利益 → 税引前当期剰余
当期利益 → 当期剰余
前期繰越利益金 → 前期繰越剰余金
当期未処分利益金 → 当期未処分剰余金
保険契約者配当準備金繰入額 → （剰余金処分によるので
ここには記載せず）

貸　借　対　照　表

年度（　　年　　月　　日現在）

科　目	金　額	科　目	金　額
（資産の部）		（負債の部）	
現金及び預貯金		保険契約準備金	
現金		支払備金	
預貯金		責任準備金	
コールローン		保険契約者配当準備金	
買入金銭債権		代理店借	
金銭の信託		再保険借	
有価証券		その他負債	
国債		…………	
地方債		…………	
社債		…………	
株式			
外国証券		貸倒引当金	
その他の証券		退職給与引当金	
貸付有価証券		保険業法第86条準備金	
貸付金		負債の部合計	
保険約款貸付		（資本の部）	
一般貸付		資本金	
不動産及び動産		法定準備金	
土地		資本準備金	
建物		利益準備金	
動産		剰余金（又は欠損金）	
建設仮勘定		任意積立金	
代理店貸		…………	
再保険貸		当期未処分利益金	
その他資産		（又は当期未処理損失金）	
…………		当期利益	
…………		（又は当期損失）	
…………		資本の部合計	
資産の部合計		負債及び資本の部合計	

損益計算書

年度（　年　月　日から / 　年　月　日まで）

	科目	金額
経常損益の部	経常収益	
	保険料等収入	
	保険料	
	再保険収入	
	資産運用収益	
	利息及び配当金等収入	
	金銭の信託運用益	
	有価証券売却益	
	有価証券償還益	
	為替差益	
	その他運用収益	
	その他経常収益	
	年金特約取扱受入金	
	保険金据置受入金	
	その他の経常収益	
	経常費用	
	保険金等支払金	
	保険金	
	年金	
	給付金	
	解約返戻金	
	その他返戻金	
	再保険料	
	責任準備金等繰入額	
	支払準備金繰入額	
	責任準備金繰入額	
	保険契約者配当金積立利息繰入額	
	資産運用費用	
	支払利息	
	有価証券売却損	
	有価証券評価損	
	有価証券償還損	
	為替差損	
	貸倒引当金繰入額	
	貸付金償却	
	賃貸用不動産等減価償却費	
	その他運用費用	
	事業費	
	その他経常費用	
	保険金据置支払金	
	税金	
	減価償却費	
	退職給与引当金繰入額	
	その他の経常費用	
	経常利益(又は経常損失)	
特別損益の部	特別利益	
	不動産動産等処分益	
	保険業法第84条評価益	
	その他特別利益	
	特別損失	
	不動産動産等処分損	
	保険業法第86条準備金繰入額	
	不動産圧縮損	
	その他特別損失	
	保険契約者配当準備金繰入額	
	税引前当期利益（又は税引前当期損失）	
	法人税及び住民税額	
	当期利益（又は当期損失）	
	前期繰越利益金（又は前期繰越損失金）	
	・・・積立金取崩額	
	当期未処分利益金（又は当期未処理損失金）	

二つの決算報告書に掲載されている各項目（勘定科目）についての一々の説明は生命保険会計のテキストに譲ることにして、ここでは生命保険に固有の項目について若干説明することにする。

（１）　支払備金

年度末までに保険金あるいは給付金の支払事由が発生したがそれらの支払が未了である場合、あるいは解約、失効等が発生したが年度末までに解約返戻金の支払が未了である場合に、それらの金額を負債として計上したものである。

（２）　責任準備金

既に第８章§５で年度末における責任準備金は保険料積立金と未経過保険料に分けて計算されること、およびその計算の実行にあたっての幾つかの問題点につき説明した。実際にはさらに（a）払込期日が翌事業年度以降に属する保険料で前納されたものがあれば、それを前納未経過保険料として責任準備金に加え、（b）予定死亡率等の保険事故に関連する予定率の異常な変動に備えるための**危険準備金**もこれに加えている。

貸借対照表における負債の金額の大部分は責任準備金、すなわち将来法でいえば契約者に対する将来の保険金支払のため準備する金額であるので、貸借対照表は保険金支払のために十分な資産があるかどうかを見る重要な報告書である。

（３）　保険契約者配当準備金

生命保険会社の利益の大部分は保険契約者配当準備金（相互会社では社員配当準備金であるが、両者に共通という意味で今後は単に配当準備金ということにする）に繰入れられる。会社はその中から個人個人の契約者に対する割当額を決定し（次章 参照）、次年度において次回の保険

料と相殺したり、配当金を利用して追加の保険を購入する原資にあてたりして分配するが、そのように使用した後の残額が次年度末の配当準備金となる。(例えば月払契約の配当金の分配を次年度の契約応当日から開始し、12等分して毎月の保険料と相殺するならば、事業年度末には未払いの残額が発生する）配当金を会社に留めて利殖する積立配当の元利合計額もこの配当準備金に入れられる。配当準備金中に割当額合計を超過して繰り入れられることが起こる場合もあるが、それは配当の対象とする期間と決算期間のずれ(例えば3年目配当の場合）等を勘案して配当財源として留保すべきものであったり、あるいは将来の剰余金の変動に備えて留保しているものであったりする。

次に損益計算書におけるこれらの関連項目について述べよう。

（1）　経常費用中の支払備金繰入額は、その年度の貸借対照表の支払備金から前年度のそれを差し引いた額で、その年度に新たに発生した事故に基づく保険金等の未支払額から、その年度において支払備金を取り崩して支払にあてた額を差し引いたものとなる。

（2）　経常費用中の責任準備金繰入額は、その年度の年度末に有効な契約に対し既に述べた方法で計算した責任準備金から、前年度末のそれを差し引いたものである。毎期洗替え計算（毎期末に保有契約について新たな計算を行ない前期末の結果と入れ換えること）を行うのが会計上の責任準備金の特徴である。

（3）　配当金積立利息繰入額は、配当金を会社に留めて利殖する積立配当契約に対しこの年度に付与する利息部分である。この利息部分は配当準備金に繰り入れられ、元本である配当金部分とあわせて配当準備金で管理される。

なお生命保険会社では通常支払配当金も多額の支出となるが、これは剰余金から積立てられた配当準備金をとり崩して支払われるものであり、その年度の損益に関係しないものとして貸借対照表の注記に止どめられている。配当準備金は相互会社の場合次のような移動を経て貸借対照表に記載される。

前年度末配当準備金 ＋ 前年度剰余金からの繰入金
＋ 配当金積立利息繰入額 － 配当金支払額 ＝ 当年度末配当準備金

会社は全保有契約に関する損益計算書を作成して損益を確かめる外に、例えば個人保険部門、団体保険部門、団体年金保険部門等に分けてそれぞれの部門毎に損益を見ておく必要がある。その時は各部門別に損益計算書を作らねばならないが、その際保険契約関係の項目例えば保険料、責任準備金繰入額等については各部門別にその実数が把握できるのに対し、その他の多くの項目例えば利息及び配当金等収入や事業費、税金等については、それを部門別に分離することは一般に困難である。その場合には、例えば部門毎の責任準備金、収入保険料、契約件数等適当な基準に比例してその項目の数字を按分し、その部門に割当てる。

§2　利益の源泉

前節で述べた損益計算書は、ある事業年度につき収支の各項目のどのような数字に基づいて剰余金が発生したかを示している。しかしこれは会計的な表現に留まっており、生命保険会社の場合はこの報告のみから損益の原因と原因別の大きさを読み取ることはできない。

既に述べたように、生命保険会社では予定死亡率、予定利率、予定事業費率を選定する際、それらの将来の変動によって会社に損失が発生し

支払不能に陥ることのないよう、通常いずれの計算の基礎についてもそれを安全めに設定している。そのため会社の実際の経験では利益のでる場合が多い。（次節で述べるように利益は大部分が契約者に還元される）また解約控除に基づく利益がでる場合もあり、それらが総合されて経常損益となっている。次にこれらの利益の源泉（略して利源という）について説明してみよう。

（1）　死差損益

死亡保険（定期保険、養老保険等）では、実際の死亡率が予定死亡率より低いとそれだけ保険金支払が少なくて済み、利益が生じる。これを**死差益**という。（実際が予定より高いと死差損）　新契約に際して被保険者を選択したことによる効果があるために、予定死亡率が選択表によるものでないかぎりは、この利源は契約の初期に大きい。

純粋の生存保険や生命年金では、逆に実際の死亡率が予定死亡率より低いと、生存者が多くなって支払が増えるために損失を生じる。従ってこのような保険あるいは年金では、予定死亡率を低いめすなわち生存率を高いめに設定して安全を図らねばならない。

入院給付特約のような諸種の付随的契約についても、実際の事故発生率が予定の事故発生率より低ければ、それだけ支払が少なくて済み利益が生じる。

（2）　利差損益

責任準備金に対応して保有する資産の運用利回りが予定利率よりも高ければ、責任準備金増加にあてるよう予定した利息を超過する利息部分が生じ、利益が発生する。これを**利差益**という。（実際が予定より低い

と利差損）　養老保険の場合は経過年数の長い契約ほど責任準備金が大きくなるので、通常は経過年数とともに利差益が大きくなる。

（３）　費差損益

収入した付加保険料総額よりも使用した事業費の方が少なければ、その差額は**費差益**となる。（大きければ費差損）ただしこの時の付加保険料は営業保険料計算の際に使用したものでなく、責任準備金計算に使用する保険料(valuation premium)を営業保険料から引いた差額である。

例えばチルメル式責任準備金が使用されている場合の第１年度の付加保険料は、第２年度以降に比べてチルメル割合αだけ大きい。また充足保険料式の場合は、営業保険料に含まれる予定経費のほかに、保険料払込済後の契約についてはその予定維持費が責任準備金中に積立てられているので、そのうち当該事業年度に属する分は取り崩して付加保険料に加える。

（４）　解約損益

その事業年度に解約または失効となった契約について、解約・失効時の責任準備金から解約返戻金を引いたものが**解約益**となる。しかしこの利益は解約・失効によって会社が実質上の利益を得たことを表わすものではない。第９章§１で述べたように解約控除は新契約費の未償却分等に充当されるもので、新契約当時に費差損として計上されたものの回収に当たる。契約後１～２年の契約で責任準備金から解約控除をするとマイナスとなる場合には、解約があると新契約費に基づく費差損の一部分が未回収となり、むしろ会社に対して実質上の損失をもたらす。

以上の主要な利源のほかに、業法86条関係損益等若干の雑損益がある。例えば危険準備金を責任準備金中に新たに積立てるための損失（取崩せば利益）、責任準備金に対応する資産を超過する資産部分を運用して得られる収益（通常は利差益に含める）、未収未払に起因する損益等があるが、通常はそのうち重要なもののみ取り出して考える。

次節以下で、上記の利源のどれからどれ位の利益が発生して損益計算書の剰余金となるかを分析する方法、すなわち**利源分析**について述べることとする。ただし費差損益の項で述べたように、利源分析にあたって採用した責任準備金の積立方式により付加保険料がかなり異なり、従って費差損益も変わってくるので、利源分析にあたっては何式の責任準備金を採用しているかをまず明確にしておかねばならない。

§3　モデルケースの利源分析

最も単純なモデルとして、x 歳契約、n 年満期養老保険、保険金年末支払の契約が多数あり、その契約日はすべて4月1日であるとする。（すなわち保険年度と事業年度が一致する場合）　ある事業年度の始めに $t-1$ 年経過のそのような契約が l_{x+t-1} 件あったとし、それらの責任準備金は純保険料式で積立てられているとする。この契約群団に関しては、予定利率と予定死亡率を用いると（5.6.4）により

$$l_{x+t-1}({}_{t-1}V+P)(1+i)-d_{x+t-1}$$

$$-(l_{x+t-1}-d_{x+t-1})\,{}_tV=0 \qquad (10.3.1)$$

が成立する。しかしこの式は群団の死亡数および責任準備金利回りが予

定どおりであった場合に成立するもので、もし予定どおりでなく死亡数が d'_{x+t-1}（通常は d_{x+t-1} より小さい）、利回りが i'（通常は i より大きい）であると、右辺は 0 でなくて剰余金 G となる。すなわち

$$l_{x+t-1}({}_{t-1}V+P)(1+i')-d'_{x+t-1} \\ -(l_{x+t-1}-d'_{x+t-1})\,{}_tV=G \qquad (10.3.2)$$

となるが、(10.3.2) から (10.3.1) を引くと

$$G=l_{x+t-1}({}_{t-1}V+P)(i'-i) \\ +(d_{x+t-1}-d'_{x+t-1})(1-{}_tV) \qquad (10.3.3)$$

となる。この式で右辺第１項は年始における責任準備金に（実際利回り － 予定利回り）を掛けたもので、利差益を表わす。第２項は（予定死亡数 － 実際死亡数）に危険保険金を掛けたもので、死差益を表わす。死差益はまた“年初に収入した危険保険料総額を予定利率で年末まで利殖した金額から、実際に支払った危険保険金総額を引いたもの”と表現することもできる。何故ならば上式右辺第２項を書き直すと

$$d_{x+t-1}(1-{}_tV)-d'_{x+t-1}(1-{}_tV) \\ =l_{x+t-1}\,vq_{x+t-1}(1-{}_tV)(1+i)-d'_{x+t-1}(1-{}_tV) \qquad (10.3.4)$$

となり、この式の右辺第１項は (5.6.10) より危険保険料に $l_{x+t-1}(1+i)$ を掛けたものであるからである。

さらに次のように死差益を表現する方法もある。(10.3.3) の右辺第１項の利差益を、剰余を表わす (10.3.2) の左辺から引くと

$$l_{x+t-1}({}_{t-1}V+P)(1+i)-d'_{x+t-1}-(l_{x+t-1}-d'_{x+t-1})\,{}_tV \qquad (10.3.5)$$

が死差益となるが、これより“年始の責任準備金を予定利率で利殖した額から、実際死亡数に対する保険金を支払い、さらに実際生存者に対す

る年度末責任準備金を引いた額が死差益である”ということができる。

次に付加保険料総額 $l_{x+t-1}P^e$ に対し、事業費が年初に総額Eだけ使われたとすると

$$(l_{x+t-1}P^e - E)(1+i') \tag{10.3.6}$$

が年末に残っているはずであり、また事業費が1年を通じて一様にEだけ使われたとすると

$$l_{x+t-1}P^e(1+i') - E(1+i')^{\frac{1}{2}}$$

が年末に残っているはずである。これが費差益を表わす。

さらに年末に解約者が w_{x+t-1} 人あったとし、彼らに解約返戻金 ${}_tW$ が支払われたとすると

$$w_{x+t-1}({}_tV - {}_tW) \tag{10.3.7}$$

が会社に残るはずであるが、これが解約益である。

このようなモデルの場合の会社の損益計算書は

収入の部

前年度末責任準備金	$l_{x+t-1}\ {}_{t-1}V$
収入保険料	$l_{x+t-1}(P+P^e)$
利息収入	I

支出の部

保険金	d'_{x+t-1}
解約返戻金	$w_{x+t-1}\ {}_tW$
事業費	E
当年度末責任準備金	$(l_{x+t-1} - d'_{x+t-1} - w_{x+t-1})\,{}_tV$

剰余金　　$\tilde{G}$ ＝（収入合計 － 支出合計）

となる。ただしここでは支出の部に責任準備金繰入額をあげる代わりに、収入の部に前年度末責任準備金を入れ支出の部に当年度末責任準備金を入れて、同じことを表わしている。この剰余金 $\tilde{G}$ が（10.3.3）の G（死差益と利差益の和）に費差益と解約益を加えたものであることは、次のようにして証明される。すなわち事業費が年始に支払われるとすると

$$I = l_{x+t-1}({}_{t-1}V + P)i' + (l_{x+t-1}P^e - E)i' \tag{10.3.8}$$

であるので、これを収入の部に入れると

$$\begin{aligned}\tilde{G} &= l_{x+t-1}({}_{t-1}V + P)(1 + i') + l_{x+t-1}P^e(1 + i') - Ei' \\ &\quad - d'_{x+t-1} + w_{x+t-1}({}_tV - {}_tW) - E - (l_{x+t-1} - d'_{x+t-1})\,{}_tV \\ &= \{ l_{x+t-1}({}_{t-1}V + P)(1 + i') - d'_{x+t-1} - (l_{x+t-1} - d'_{x+t-1})\,{}_tV \} \\ &\quad + (l_{x+t-1}P^e - E)(1 + i') + w_{x+t-1}({}_tV - {}_tW)\end{aligned} \tag{10.3.9}$$

となる。（10.3.9）の第１項｛　　　｝の中は（10.3.2）の G であるので、これで証明が終わる。

（10.3.9）の右辺のような $\tilde{G}$ の分解を行うためには、損益計算書を次のように分解・変形しておくと理解しやすい。

収入の部	支出の部
前年度末責任準備金 $l_{x+t-1}\ {}_{t-1}V$ 収入純保険料　$l_{x+t-1}\ P$ 予定利息　$l_{x+t-1}({}_{t-1}V+P)i$	保険金　d'_{x+t-1} 解約契約責任準備金 $w_{x+t-1}\ {}_{t}V$ 当年度末責任準備金 $(l_{x+t-1}-d'_{x+t-1}-w_{x+t-1})\,{}_{t}V$
利息収入A　$l_{x+t-1}({}_{t-1}V+P)i'$	予定利息　$l_{x+t-1}({}_{t-1}V+P)i$
収入付加保険料　$l_{x+t-1}\ P^e$ 利息収入B　$(l_{x+t-1}P^e-E)i'$	事業費　E
解約契約責任準備金 $w_{x+t-1}\ {}_{t}V$	解約返戻金　$w_{x+t-1}\ {}_{t}W$

この表で、① 収入純保険料と収入付加保険料を加えると収入保険料となり、② 収入の部と支出の部の両方に計上されている予定利息および解約契約責任準備金を相殺し、③ 利息収入Aと利息収入Bを加えたものが（10.3.8）によりIであることを見れば、この表が前頁のモデル損益計算書を分解・変形したものであることが分かる。そして第1ブロックの「収入 － 支出」は（10.3.5）により死差益を表わし、また第2ブロックのそれは（10.3.3）右辺第1項で利差益を、第3ブロックのそれは（10.3.6）により費差益を、第4ブロックのそれは（10.3.7）により解約益を表わす。このような表を**利源分析表**という。

次に上記モデルで保険金即時支払の場合を考えてみよう。さらに解約返戻金は年末でなく1年を通じて一様に支払われると仮定する。その時は（5.6.7）の両辺に $l_{x+t-1}(1+i)$ を掛けると

$$l_{x+t-1}({}_{t-1}\bar{V}+\bar{P})(1+i)-d_{x+t-1}(1+i)^{\frac{1}{2}}$$
$$-(l_{x+t-1}-d_{x+t-1})\,{}_t\bar{V}=0 \qquad (10.3.10)$$

となり、ここで i, d の代わりに i', d' を用いると剰余金として

$$l_{x+t-1}({}_{t-1}\bar{V}+\bar{P})(1+i')-d'_{x+t-1}(1+i')^{\frac{1}{2}}$$
$$-(l_{x+t-1}-d'_{x+t-1})\,{}_t\bar{V}=G \qquad (10.3.11)$$

が得られる。（10.3.11）から（10.3.10）を引くと

$$G=l_{x+t-1}({}_{t-1}\bar{V}+\bar{P})(i'-i)-(d'_{x+t-1}\frac{i'}{2}-d_{x+t-1}\frac{i}{2})$$
$$+(d_{x+t-1}-d'_{x+t-1})(1-{}_t\bar{V}) \qquad (10.3.12)$$

とも書けるが、この式の右辺第1項と第2項の和が利差益を表わし、第3項が死差益を表わす。（5.6.13）の危険保険料を用いると

$$l_{x+t-1}(1+i)v^{\frac{1}{2}}q_{x+t-1}(1-v^{\frac{1}{2}}\,{}_t\bar{V})=d_{x+t-1}(1-{}_t\bar{V}+\frac{i}{2})$$

であるので、死差益に関しては（10.3.4）に対応するものとして

$$d_{x+t-1}(1-{}_t\bar{V})-d'_{x+t-1}(1-{}_t\bar{V})$$
$$=l_{x+t-1}v^{\frac{1}{2}}q_{x+t-1}(1-v^{\frac{1}{2}}\,{}_t\bar{V})(1+i)$$
$$-d_{x+t-1}\frac{i}{2}-d'_{x+t-1}(1-{}_t\bar{V}) \qquad (10.3.13)$$

という表現もできる。また（10.3.5）に対応する死差益の表現としては、（10.3.12）の右辺第1項および第2項を、（10.3.11）から引いて

$$l_{x+t-1}\left({}_{t-1}\bar{V}+\bar{P}\right)(1+i)-d_{x+t-1}\,\frac{i}{2}$$

$$-d'_{x+t-1}-\left(l_{x+t-1}-d'_{x+t-1}\right){}_{t}\bar{V} \qquad (10.3.14)$$

が得られる。（ただし $(1+i')^{\frac{1}{2}}=1+\dfrac{i'}{2}$ とする）

一方この場合のモデル損益計算書は

収入の部

前年度末責任準備金	$l_{x+t-1}\ {}_{t-1}\bar{V}$
収入保険料	$l_{x+t-1}(\bar{P}+P^{e})$
利息収入	I

支出の部

保険金	d'_{x+t-1}
解約返戻金	$w_{x+t-1}\ {}_{t}W$
事業費	E
当年度末責任準備金	$(l_{x+t-1}-d'_{x+t-1}-w_{x+t-1})\,{}_{t}\bar{V}$

剰余金　　$\tilde{G}=$（収入合計 － 支出合計）

となり、この場合の I は（10.3.8）と異なり

$$I=l_{x+t-1}\left({}_{t-1}\bar{V}+\bar{P}\right)i'-d'_{x+t-1}\,\frac{i'}{2}$$

$$-w_{x+t-1}\ {}_{t}W\,\frac{i'}{2}+\left(l_{x+t-1}\,P^{e}-E\right)i' \qquad (10.3.15)$$

である。この $\tilde{G}$ が死差益と利差益の和である（10.3.11）と

費差益　　$(l_{x+t-1}\,P^{e}-E)(1+i')$ 　　(10.3.16)

解約益　　$w_{x+t-1}\left\{{}_{t}\bar{V}-{}_{t}\bar{W}\left(1+\dfrac{i'}{2}\right)\right\}$ 　　(10.3.17)

との和となることは容易に確かめられる。

また損益計算書を分解・変形した利源分析表は次のようになる。

収入の部	支出の部
前年度末責任準備金 $l_{x+t-1}\ {}_{t-1}\bar{V}$ 収入純保険料 $l_{x+t-1}\ \bar{P}$ 予定利息 $l_{x+t-1}({}_{t-1}\bar{V}+\bar{P})\,i-d_{x+t-1}\dfrac{i}{2}$	保険金 d'_{x+t-1} 解約契約責任準備金 $w_{x+t-1}\ {}_{t}\bar{V}$ 当年度末責任準備金 $(\,l_{x+t-1}-d'_{x+t-1}-w_{x+t-1}\,)\,{}_{t}\bar{V}$
利息収入A $l_{x+t-1}({}_{t-1}\bar{V}+\bar{P})\,i'-d'_{x+t-1}\dfrac{i'}{2}$	予定利息 $l_{x+t-1}({}_{t-1}\bar{V}+\bar{P})\,i-d_{x+t-1}\dfrac{i}{2}$
収入付加保険料 $l_{x+t-1}\ P^{e}$ 利息収入B $(\,l_{x+t-1}\ P^{e}-E\,)\,i'$	事業費 E
解約契約責任準備金 $w_{x+t-1}\ {}_{t}\bar{V}$ 利息収入C $-w_{x+t-1}\ {}_{t}W\dfrac{i'}{2}$	解約返戻金 $w_{x+t-1}\ {}_{t}W$

各ブロックでの「収入 － 支出」が、上から順に死差益、利差益、費差益、解約益を表わす。第１ブロックが死差益を表わすことは（10.3.14）による。

なお ①責任準備金が純保険料式以外で積立てられている時は、その積立方法に応ずるように営業保険料を純保険料と付加保険料に分け、その純保険料を用いて（10.3.1）から以下と同じ議論ができる。 ②払込済契約が充足保険料式で積立てられている場合のように責任準備金中に維持費のための積立部分がある場合は、そこから当保険年度分として使用しうる部分を、収入付加保険料に代わる予定維持費として利源分析表の収入の部に用いる。 ③対象とする契約群団がまちまちの年齢の者を含んでいても、それは同一年齢者の群団の合計であるから、利源分析表の各項目ごとにその群団の値が計算できれば群団全体についての利源分析が可能である。

§4　事業年度についての利源分析

前節では事業年度と保険年度とが一致する極めて特殊なケースの利源分析を示したが、実際にある事業年度につき利源分析を行う場合には契約日の異なる多くの契約が混在しているので、前節の議論をそのまま適用しようとしても複雑で困難である。特に複雑となる原因は、事業年度と保険年度がずれているために年始および年末の責任準備金中に未経過保険料が含まれ、年始の未経過保険料はその事業年度の始めから契約応当日までの期間の利源分析の対象となり、また収入保険料から年末の未経過保険料を引いたものが契約応当日から年末までの期間の利源分析の対象となることである。

しかしながら前節の結果から類推して次のような利源分析を行うことができる。すなわち損益計算書に前節と類似の分解を施し

収入の部	支出の部
前年度末責任準備金 （前年度末危険準備金を除く） 収入保険料 （予定事業費を除く） 予定利息	保険金 解約契約責任準備金 当年度末責任準備金 （当年度末危険準備金を除く）
収入利息	予定利息
予定事業費	事業費
解約契約責任準備金	解約返戻金
前年度末危険準備金ほか	当年度末危険準備金ほか

とする。ここでは前節の利息収入Ｂに当たるものは計算完了後に考えることとして挙げていない。また責任準備金中には危険準備金が含まれているとして、それは別に取り出すこととした。さらに貸借対照表の上では純保険料式責任準備金を計上しているのに、利源分析は５年チルメル式責任準備金を基準として行うというような特殊な場合もありうるが、その場合には両者の差額も危険準備金と同様に取り扱う。表中で“危険準備金ほか”としたのはその意味である。

この表の中の予定利息、予定事業費、解約契約責任準備金を何らかの方法で計算することができれば、上記のような分析表をつくることが可能であり、その時上のブロックから順に収支の差が死差益、利差益、費差益、解約益、責任準備金関係益（実際はマイナスが多い）となる。もし死差益、費差益、解約益が１年を通じて一様に発生していると考える時は、平均の発生時点が年央であるとして、各々の益に $\frac{i'}{2}$（i'が分か

らない時は i ）を掛けたものだけ各々の益を増やし、その分利差益を減じておく。

問題は予定事業費、予定利息、解約契約責任準備金をどのようにして算出するかである。次にごくおおざっぱに算出の方法を述べてみよう。予定事業費については、まず収入保険料中の付加保険料を推算するが、それは営業保険料の計算に使用したものではなく、利源分析の基準とした責任準備金積立方式から定まる付加保険料である。従って例えば5年チルメル式を基準として利源分析を行う時には、収入保険料は第1年度のもの、第2～第5年度のもの、第6年度以降のものに分けて把握する必要がある。次に保険料払込済契約に対する維持費の準備が責任準備金に含まれている場合（例えば充足保険料式責任準備金を基準とする場合）には、年始責任準備金に含まれる維持費のための準備金から当年度に使用しうる予定維持費を抽出し、さらに当年度中に払込済となった契約からの同様の予定維持費を算出して、それらを先に推算した付加保険料に加える。

予定利息については、全契約を予定利率の異なる契約群団に分けておき、それぞれにおいて未経過保険料も含めた年始および年末の責任準備金 A および B を用いて、(1.4.1) のハーディの公式から導かれる

$$I = \frac{(A+B)i}{2+i} \qquad (i\text{は予定利率})$$

によって予定利息を定める。

解約契約責任準備金については、個々の解約契約について解約時における利源分析上の責任準備金の値を求めておき、それらの和をとる。個々の契約についての把握が困難であれば近似的に算定する。

なお特定の契約群団についてある年度の死差益を求めようとすることがよくある。その場合その群団について上記のような損益計算書中の死差益ブロックを作成するのも一つの方法であるが、ほかに危険保険料から計算する方法もある。契約群団の危険保険料総額と支払危険保険金総額が分かっていれば、(10.3.4) あるいは (10.3.13) の右辺によって死差益を求めることができる。　さらに x, t について各種の組み合わせが群団中にあっても、各契約の危険保険料と死亡契約の危険保険金を把握することができれば、群団の死差益が計算できる。

第１０章　練習問題

（１）　第８章練習問題の（３）で述べたような 40歳契約 25年満期の養老保険が同一日に多数契約されており、保険金額はすべて 100万円である。この契約群団に対し責任準備金は同所で述べたようなチルメル式が採用されており、また保険金および解約返戻金は保険年度末に支払われるとする。今この契約群団について、次のような実際経験があった場合の各保険年度における利源分析を行え。（同練習問題の解答中にある諸保険価格の値を利用する）

	第１保険年度	第４保険年度	第12保険年度
年始契約件数	100,000件	84,500件	78,000件
年間死亡数	90件	150件	310件
年間解約数	9,500件	1,250件	390件
解約返戻金率	0	${}_{4}V^{[10z]}-6‰$	${}_{12}V^{[10z]}$
年間利息収入	9百万円	530百万円	2,034百万円
年間事業費	2,500百万円	195百万円	180百万円

（２）　x 歳契約で、一時払の即時開始終身年金が多数あり、すべて同一日に契約されている。第 t 保険年度年始にそのような契約が l_{x+t-1} 件あったとし、またその年度の実際死亡率 q'_{x+t-1} は予定死亡率 q_{x+t-1} より小さかったとする。その時

(a) (10.3.1) ～ (10.3.3) にならって利差益と死差損を表わす式を

書け。

(b) 実際利回りが予定利回りをどの位超過すれば、死差損を解消して剰余金が出るか。その条件を調べよ。

第11章　剰余の還元

§1　配当方法の比較

前章では損益計算書から得られる剰余金およびその発生原因を調べる利源分析について述べたが、生命保険相互会社はもちろん株式会社であっても、その剰余金または利益の大部分は個々の契約（無配当保険を除く）の契約者に配分し、分配しなければならない。剰余金の大部分は計算の基礎を安全めに設定したために発生したと考えられるからである。この分配金を相互会社の場合は社員配当金というが、株式会社の場合は株主配当金と区別して契約者配当金という。（以下本章では単に配当金と称することとする）

ただ無配当保険については、計算の基礎を実際に経験するであろうものに近く設定して（すなわち安全性を小さくして）、保険料率を低く定めるので、剰余金は発生しても通常はごく僅かであり、ここでは考えない。

配当を実施するに当たっては、まず次の4項目について方針を決定しなければならない。

（１）　配当の開始時点

現在わが国では通常契約日から1年もしくは2年経過した時点から配当を開始するが、過去の例や外国の例ではもっと遅い時点から開始しているものも少なくない。また場合によっては契約消滅時に一括して支払う消滅時配当や、満期契約のみに支払う配当も考えられる。

米国でかって行われた**配当繰延方式**は、契約から一定期間後（例えば20年後）に残存する契約にだけその期間中に生じた剰余金を分配する方法で、**半トンチン配当**ともいわれるが、残存者のみが大きな配当を受けることになる。さらに**トンチン配当**とは、途中解約した契約の解約返戻金もすべて没収して配当金に加えるもので、残存者の受ける配当金は極めて大きいが、途中解約した者には極めて厳しい取扱である。現在では両者とも不公平にすぎるとして行われていない。

（２）　配当の支払間隔と対象契約

配当の支払を毎年行うのか、数年の間隔を置いて行うのかを定め、また対象となる残存契約以外に、期中の死亡・満期等の消滅契約に対しても分配するのかを定めなければならない。数年の間隔を置いて配当する時に途中の死亡契約に対して配当する場合は**中間配当**と称され、通常は残存契約に対する配当よりも低率が適用される。

（３）　配当金算定の基準

配当金は何を基準として計算するかを定めなければならない。すなわち単純比例配当方式として、保険金額比例、営業保険料（年額）比例、既払込保険料総額比例、責任準備金比例等があるが、その他に２以上の要素を組合わせる方式（例えば次節の利源別配当方法）もある。

わが国で戦前よく行われた**累加配当**方式は、契約応当日に残存する契約に対し、その一定年数前（例えば 4年前）までに払い込んだ既払込営業保険料総額に比例して配当するものである。

（４）　配当金の分配方法

配当金は、それを現金で支払うのか、次回払込む保険料と相殺するのか、それを用いて保険金増額をするのか、あるいは一定の利息をつけて会社が預かり運用するのか、といったこともあらかじめ定めておかねば

ならない。

保険金増額は通常配当金を一時払保険料に充当して残余期間についての養老保険あるいは終身保険を購入する形で行われる。従って契約の継続とともに小額の一時払保険が累積されて行く。

また以上の4項目の決定に当たっては、次の原則を考慮しつつ、これを行わねばならない。

Ⅰ．公平性

配当に関しては、契約者間に生ずる配当金の大小が誰が見ても妥当と納得されるようなものであること、あるいは特定の契約者が不当に利得したり損失を被ったりしないことが、何よりも重要である。しかし現実には何をもって公平の基準とするかは難しい問題である。いろいろな基準が考えられるであろうが、大別して二つの考えかたがある。一つは各契約が剰余金に寄与した割合に応じて配当するのがよいとするものであり、他の一つは、保険団体中に長く存続した長期継続契約をより優遇すべきであるとするものである。

Ⅱ．簡明性

配当方法は公平性が大きく損なわれないかぎり簡潔明瞭であることが望ましい。契約者にも理解が容易であり、事務上の手数や費用が少なくて済むからである。ただし理解が容易なために簡単に他社との比較ができて、競争のあまり実力以上の無理な配当をする危険がある。特にかつての累加配当では、将来の配当金が急激に増大することが簡単に計算されるためこのような弊害が大きかった。

Ⅲ．継続性

理論上は剰余金の大きさを反映して配当金が毎年変動しても差し支え

ないが、実際問題として、配当額が大きく変動したり、特にその金額が前年より低下することは契約者の理解を得ることが難しい。また毎年配当率を変更することは、費用もかかるし、契約者にも喜ばれない。従って特殊な保険商品を除き、通常の保険契約（特に長期のもの）では配当方法および配当率は、できるだけ安定的に継続して使用しうるものであることが望ましい。

ここで二つの配当方法について簡単にふれておこう。英国では古くから**保険金均等増額方式**がよく用いられているが、これは毎年あるいは3年とか5年ごとに死亡保険金を一定割合ずつ増額するものである。満期保険金は最終年度の死亡保険金と同額とされる。ただこの場合増額される保険金は剰余金の出方を見てから定められるものではなく、契約時にあらかじめ増額率が約束されているものである。（確定配当）　従って配当付保険とはいっても、いわば保険金逓増保険である。ただ剰余金のあまり出ない無配当保険と同じ計算基礎を用いて増額分も含めて保険料が計算されている。すなわちそのように計算した高保険料種類が配当付であると考えられている。均等とは保険種類、契約年齢に関係なく増額率が同じであることを意味する。またこれには毎期の増額の基準となる保険金を原保険金のままとする単式と、原保険金にそれまでの増額保険金総額を加えたものとする複式とがある。さらに真の意味の配当を消滅時配当として付加する場合もある。

米国ではホーマンズ（ S. Homans ）によって 1863年に始められた**利源別配当**が現在最も普及しているが、わが国では昭和15年（1940年）に日本生命がこの配当方式を初めて導入し、戦後はすべての会社が殆どすべての保険種類についてこの方式を用いるようになった。これは公平

性に重点をおき、各契約が剰余に寄与した割合に応じて配当することを忠実に実行しようとするものであるが、そのため簡明性にやや欠ける。次節でこれについて述べることとする。

§2　利源別配当

前章で述べたように生命保険会社の剰余は主として利差益、死差益、費差益からなるので、これらの益を各契約がそれに寄与した割合に応じて配分しようというのがこの配当方法の趣旨である。（10.3.3）と（10.3.6）で、同一保険種類、同一契約年齢の契約群団についてある保険年度における各差益を表わす式を示したが、これを l_{x+t-1} で割れば1件あたりの各差益となる。それは

$$g=({}_{t-1}V+P)(i'-i)+(q_{x+t-1}-q'_{x+t-1})(1-{}_tV)+(P^e-e)(1+i') \qquad (11.2.1)$$

であるが、ここで

$$q'_{x+t-1}=\frac{d'_{x+t-1}}{l_{x+t-1}}$$ は実際死亡率

$$e=\frac{E}{l_{x+t-1}}$$ はこの契約に対する事業費の割当額

である。そこで利源別配当方法では通常

利差益配当：${}_{t-1}V+P$に近似するものとして ${}_tV$ を用い、それに利差益配当率 $\triangle i=i'-i$ を掛ける。

死差益配当：危険保険金 $1-{}_tV$ に年齢別に定められる死差益配当率 $\triangle q_{x+t-1}=q_{x+t-1}-q'_{x+t-1}$ を掛ける。

費差益配当：保険金額に比例するものとし、単位保険金額に対する費差益配当率 $\triangle e$をそれに掛ける。

という方法で各契約に対する配当金を定める。i'は会社の総資産利回り（第１章 §4 参照）を参考に、またq'は会社の年齢別死亡統計を参考に決定される。費差益配当は、付加保険料が保険金額に比例して定められているため、保険金額比例とされることが多い。ただし第７章 §3 で述べたように、実際に支出される経費の中には保険金額比例でなく契約１件あたりで支出されるものが少なからずあることを考慮し、高額契約ほど付加保険料に剰余が多く出ると考えた場合には、金額別配当を導入することもある。

利源別配当方法は前節で述べた公平性を最も重視した方法である。また利差益要素が大きい時には長期に継続した契約ほど配当額が大きくなり、自然に長期契約に報いることができる。ただし簡明性からみると難解な方法といえよう。継続性は配当率の定め方の問題であり、毎年の細かな変動をそのまま配当率（$\triangle i, \triangle q, \triangle e$）に反映させずに、ある程度長い目で見て判断することが望ましい。

例えば$i'(= i + \triangle i)$が会社の実際利回りよりも低い時には、配当割当外の剰余金ができるが、それは実際利回りがi'より低くなった時にも配当率を継続するために留保されたものと考える。i'をやや低めに設定したため長期間にわたり割当外の剰余金が蓄積されるような場合には、次節で述べる消滅時配当として契約者に還元することも考えられる。

§3　消滅時配当

保険契約が消滅するまでの途中では配当金を一切支払わず、契約後一定年数以上経過した契約が消滅した時に一括して支払う方法があり、それを**消滅時配当**という。さらに前節で述べたように、利源別配当をとっていても、利差益配当率等をやや押さえめに設定した時には、長期間の

うちにはなにがしかの額が会社に留保されるので、消滅時にその分を契約者に還元することがある。このような配当も消滅時配当と言われる。

会社に留保された額（あるいはされるであろう額）を算定して消滅時配当の大きさを確認するため用いられる手法として、**アセット シェア**とよばれるものがある。これはシミュレーションによって一つの保険契約が会社に保有している資産(それは責任準備金に上述の留保分を加えたものとされる)を推定しようとするものである。

今同一期日に同一の内容で締結された契約からなる一つの保険契約群団を考え、次のようにしてこの群団の各年度末における収支残を推定する。すなわち

R_t：第 t 年度末の収支残

P_t：第 t 年度の収入保険料

E_t：第 t 年度の事業費

S_t：実際死亡率に基づく第 t 年度の支払保険金

W_t：実際解約失効率に基づく第 t 年度の支払解約返戻金

D_t：第 t 年度の支払配当金

i'　：実際利回り

とすると、各年度の収支残は

$$R_1 = (P_1 - E_1 - S_1 - W_1)(1 + \frac{i'}{2})$$

$$R_2 = R_1(1 + i') + (P_2 - E_2 - S_2 - W_2 - D_2)(1 + \frac{i'}{2})$$

一般に $t \geq 2$ で

$$R_t = R_{t-1}(1 + i') + (P_t - E_t - S_t - W_t - D_t)(1 + \frac{i'}{2})$$

という関係によって定まる。ただしここでは保険料月払の契約群団を考えており、P, E, S, W, D については、平均して年度の中央で入出金

があるものとして半年分の利息を加えた。この保険契約群団の各年度の異動状況および R_t 以外の各記号の数値について、会社の現況等を参考にそれらを定めておくと、第１式から出発して順次に R_t が定まる。

R_t はこの契約群団の保有する資産であるが、それを群団の第 t 年度末残存者に割り振った場合の一契約あたりの資産がアセット シェアである。アセット シェアから第 t 年度末の責任準備金を引いたものがその時点の留保金で、それは次の年度に支払う配当金（消滅時配当があれば、それも含む）の財源となる。各年度の留保金を算出して次の年度の配当金および消滅時配当金と比較することにより、各年度の配当率ならびに消滅時配当率の検証を行うことができる。

なお経済の動きが激しく、会社の保有資産が値上がりしてゆく傾向のある時に、会社が評価益を計上しない会計方法をとっていると、契約者にとっては上記アセット シェアで述べた留保分以外に、値上り分という持ち分ができることが考えられる。（ただし値上り益も含めた運用利回りを用いて、アセット シェアを計算する方法もある） わが国では現在利源別配当に基づく通常配当のほかに特別配当という名称で一種の消滅時配当が行われているが、これには消滅時点における未精算留保分の還元とこのようなキャピタルゲインの還元という二つの要素が含まれるものと考えられている。

§4　変額保険

通常の定額保険では、毎年の配当および消滅時配当を通じ、その契約に帰属する利益を消滅時までに還元しようという考え方に基づいて配当が実施されているが、利益（主としては利差益、あるいは評価益を含む資産の運用益）を即時に利用して死亡保険金額あるいは満期保険金額を

増額しようとするのが**変額保険**である。

変額保険には種々のタイプが考えられているが、現在わが国で実施されているものは概略次の要領で行われている。

(1) 特別勘定

ある会社の変額保険契約全体で一つの独立した契約群団をつくり、その群団の資産のみを管理する**特別勘定**を設定する。（特別勘定に対し従来からの勘定を**一般勘定**という）

ただし契約者と会社との間の金銭の授受はすべて一般勘定を通じて行われる。一般勘定から特別勘定への払込、あるいはその逆は月末・月初に当月分を一括して行う。

(2) 保険料

① 契約者は保険種類と**基本保険金額**を定め、それに基づいた保険料を一般勘定に振込む。(保険料一時払の契約もある)

② 一般勘定は契約者から受け入れた保険料のうち純保険料を特別勘定に支払う。

③ 特別勘定は、次に定める変動保険金額に応ずる分も含め、危険保険料を一般勘定に支払い、貯蓄保険料は特別勘定に留どめる。

(3) 保険金額の変動

① 毎月末に契約ごとに**「積立金」**CV_t を計算し、その積立金と加入時に約定した基本保険金額に基づく予定責任準備金 V_t との差額（超過資産）により、**変動保険金額**を計算する。例えば終身型の場合のそれは次式によって定められる。

$$\text{変動保険金額} = \frac{CV_t - V_t}{\bar{A}_{x+t} + \gamma' \ddot{a}_{x+t}}$$

② 変動保険金額は毎月1日に更新（洗い替え）され、基本保険金額

および変動保険金額に対する危険保険料の1ヶ月分が特別勘定から一般勘定に支払われる。被保険者の死亡があれば、

基本保険金額 ＋ 死亡日の属する月の変動保険金額

が死亡保険金額として一般勘定から契約者に支払われる。ただし変動保険金額が負値の場合には、基本保険金額を死亡保険金額として支払う。

③ 積立金を計算するには、特別勘定資産について評価損益を含む増減を反映させた Index(特別勘定指数) を毎日算出し、そのIndexの増減率に基づいて次のように行う。すなわち

$$\text{当日 Index} = \text{前日 Index}$$

$$\times\left(\frac{\text{当日末の特別勘定資産価格}}{\text{当日始の特別勘定資産価格}} - \begin{matrix}\text{特別勘定運営費・}\\ \text{最低保証コスト}\end{matrix}\right)$$

によってIndexを定めた上、個々の契約に対しては

$$\text{当日末}\,CV = \text{当日始}\,CV \times \frac{\text{当日Index}}{\text{前日Index}}$$

によって毎日の積立金を計算する。

なお特別勘定資産は、月末においては、その日に行われた一般勘定との取引を加減したものが翌日(翌月)始の値となる。個々の契約の積立金についても同じことが言える。

(4) 保険金・解約返戻金

保険金および解約返戻金は一般勘定から支払われる。当該契約に係る積立金は、請求のあった月末に特別勘定から一般勘定に移す。

(5) 配当

特別勘定では利差益が直ちに還元される形になっているので、この契約に対する利差益配当はない。死差益および費差益の配当については、

定額保険と同じである。配当金は一般勘定から特別勘定に支払われ、当該契約の積立金に加えられる。

以上のとおりであるが、積立金は常に増加するものとは限らず、それが減少する場合にはマイナス超過となり保険金額や解約返戻金が減額されることがある（ただし死亡保険金額については最低保証が行われている）。契約者はそのリスクを理解した上で加入しなければならない。

また変額保険では以上のような複雑な計算を毎日繰り返して行うので、個々の契約および契約群団の管理にはコンピューターの利用に関するノーハウが不可欠のものとなる。（文献〔2〕には変額保険の数理がさらに詳しく述べられている。）

第１１章　　練習問題

（１）　将来実現するであろうと思われる予定利率、予定死亡率および予定事業費率（すなわち安全性を考慮していない率で、これらを**第2種の計算基礎**とよぶことがある）を用い、次のような k 年後配当開始、年 r ％の累加配当保険に必要な営業保険料 P^* を計算せよ。

予定死亡率としては選択生命表が用いられ、予定事業費率は $\alpha-\beta-\gamma$ 方式で与えられるとして、x 歳契約 n 年満期養老保険で、k 年経過後に rP^*, $k+1$ 年経過後に $2rP^*$, 以後１年増す毎に rP^* ずつ増加して、満期時には $(n-k+1)rP^*$ を累加配当金として支払うもの。

（２）　前題の累加配当保険で実際の営業保険料が π であるとする。（必ずしも P^* と同じでない）　契約から t 年後の責任準備金を考える際、公表された累加配当も考慮に入れ、第２種の計算基礎によって必要な総積立額を与える式を書け。（この必要額が責任準備金、もしくは責任準備金と配当準備金の中に含まれていれば妥当であると考えられる）

（３）x 歳契約、n 年満期養老保険で、配当率 b の単式保険金均等増額配当を行う場合の営業保険料の式を示せ。（予定事業費率は $\alpha-\beta-\gamma$ 方式で与えられるとする）

またこの場合に複式保険金均等増額配当とすれば、営業保険料はどうなるか。

（４）　契約時から５年毎に年 b の配当率による単式保険金均等増額を行い、かつ年 b' の配当率による中間配当も行うものとする。 n は５の倍数として、 x 歳契約、 n 年満期養老保険の年払純保険料を与える式を書け。

（５）　保険料年払で、配当金は払込保険料と相殺する契約群団について、アセット シェアを計算する式を考えよ。ただし各年度の事業費は年始に全額が使用されるものとする。

第12章　連合生命に関する生命保険および年金

夫と妻、親と子というような2人以上の組合わせを考え、組合わせの構成員の生死を同時に考えることとした場合に、これを**連合生命**あるいは略して**連生**という。これに対してこれまで述べてきたような1人だけの生死を考える場合を特に区別して言うときには**単生命**という。本章ではこの連合生命に関する種々の生命保険および年金をとりあげる。

§1　連生生命確率（2人の場合）

まず連生についてどのような生命関数が考えられ、それらがどのように計算されるかを §1～§3 で述べる。なお記述を簡略にするため今後は x 歳の被保険者という代わりに (x) という記号を用いることとする。

被保険者 (x) の属する生命表が $\{l_x\}$ であり，(y) の属する生命表が $\{l'_y\}$ であり、かつ (x) と (y) の死亡は互いに独立に発生するとする。例えば (x) が50歳の男子、(y) が45歳の女子というように、$\{l_x\}$ と $\{l'_y\}$ は必ずしも同一の生命表である必要はない。

さて (x) と (y) の組合わせを考えると、彼らの死亡が独立に発生することから、1年後に両者とも生存する確率は

$$p_x p'_y = \frac{l_{x+1}}{l_x} \frac{l'_{y+1}}{l'_y}$$

であるが、この右辺を次のように解釈することもできる。すなわち (x) が l_x 人おり (y) が l'_y 人いると、その組合わせの総数は $l_x l'_y$ 組である

が、１年経過後には組合わせの総数は $l_{x+1}\,l'_{y+1}$ 組になっている。この差は１年間の間に(x)，(y)のどちらかが死亡したことにより消滅した組合わせである。従って数列

$$\{\,l_{x+t,\,y+t}\,\}=\{\,l_{x+t}\,l'_{y+t}\,\} \qquad t=0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ \cdots\cdots\cdots$$

を考えると、これは組合わせ被保険者集団の存続を表わすような一つの脱退残存表である。（第３章 §１参照）　これを**連生生命表**（または連合生命生命表）というが、この集団は (x) の死亡もしくは (y) の死亡という二つの要因で減少する。この２人組合わせを一つの構成員とみた被保険者集団を主集団とすれば、 副集団は二つできて、 (x) が死亡して (y) のみ生存している集団と、(y) が死亡して (x) のみ生存している集団である。この場合には、第３章§２における q_x^{A*} が q_x に、q_x^{B*} が q'_y に当たると考えられるので、２重脱退表を作成するには、(3.2.6) より得られる

$$\overline{q}_x=q_x\left(1-\frac{1}{2}\,q'_y\right),\qquad \overline{q}_y=q'_y\left(1-\frac{1}{2}\,q_x\right)$$

を l_{xy} に掛けて、(x) 死亡による減少数と (y) 死亡による減少数を求めることができる。（後に（12.3.4）で述べる $q_{\overset{1}{x}y},\,q_{x\overset{1}{y}}$ を用いてもよい）

しかし主集団のみに注目する時は、(x) と (y) の共存をあたかも単一生命表における生存のごとく考え、どちらかの死亡を単一生命表における死亡のごとく考えることもできる。そしてその場合の生存や死亡に関する確率は、以下に示すように(x)，(y)に関する単一の確率に結びつけて表わすことができる。なお (y) に関して異なった生命表が用いられている時は、正しくは生命関数を l'_{y+t}，${}_tp'_y$ 等といちいちダッシュをつけて (x) の生命表と異なることを表わすべきであるが、煩わしいので今後はそのことは暗に了解されていることとし、ダッシュは省略する。

（１）　(x) と (y) が t 年後に共存である確率は

$$ {}_tp_{xy} = \frac{l_{x+t,\,y+t}}{l_{xy}} = \frac{l_{x+t}}{l_x}\,\frac{l_{y+t}}{l_y} $$

$$ = {}_tp_x\,{}_tp_y \qquad (12.1.1) $$

であり、特に $t=1$ の時は

$$ p_{xy} = p_x\,p_y \qquad (12.1.2) $$

である。容易に分かるようにこれについては次式が成立する。

$$ {}_{s+t}p_{xy} = {}_sp_{xy}\;{}_tp_{x+s,\,y+s} \qquad (12.1.3) $$

（２）　t 年内に共存でなくなる確率、すなわち (x) と (y) のうち少なくとも１人が t 年内に死亡する確率は

$$ {}_tq_{xy} = 1 - {}_tp_{xy} $$

$$ = 1 - {}_tp_x\,{}_tp_y \qquad (12.1.4) $$

であり、特に $t=1$ の時は次式が得られる。

$$ p_{xy} + q_{xy} = 1 \qquad (12.1.5) $$

（３）　期間〔$t, t+1$〕で初めてどちらかの死亡が起こる確率、すなわち共存でなくなる確率は

$$ {}_{t|}q_{xy} = \frac{l_{x+t,\,y+t} - l_{x+t+1,\,y+t+1}}{l_{xy}} $$

$$ = {}_tp_{xy} - {}_{t+1}p_{xy} \qquad (12.1.6) $$

となる。これについては次式が成立する。

$$ {}_tq_{xy} = q_{xy} + {}_{1|}q_{xy} + \cdots\cdots\cdots + {}_{t-1|}q_{xy} \qquad (12.1.7) $$

（１）～（３）で用いられた右下の添字 xy は (x) と (y) の共存を意

味している。被保険者が３人以上でも、この記号 xyz ……… は全員の共存を意味する。

次に (x) と (y) のどちらか一方が生存している（どちらかが主集団か副集団に属している）ことをあたかも単生命の生存のように考え、両者とも死亡することを単生命の死亡に当たると考える場合も、よく利用されるが、その時には次の確率が用いられる。

（４）　(x)，(y) の２人とも t 年内に死亡する確率は

$${}_tq_{\overline{xy}} = {}_tq_x\,{}_tq_y = (1 - {}_tp_x)(1 - {}_tp_y) \tag{12.1.8}$$

であり、特に $t = 1$ の時は次式となる。

$$q_{\overline{xy}} = (1 - p_x)(1 - p_y) \tag{12.1.9}$$

（５）　(x) と (y) のうち少なくとも１人が t 年間生存する確率は

$$\begin{aligned} {}_tp_{\overline{xy}} &= 1 - {}_tq_{\overline{xy}} = 1 - (1 - {}_tp_x)(1 - {}_tp_y) \\ &= {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{xy} \end{aligned} \tag{12.1.10}$$

であり、特に $t = 1$ ならば

$$p_{\overline{xy}} = p_x + p_y - p_{xy} \tag{12.1.11}$$

となる。この場合 ${}_tp_{\overline{xy}} + {}_tq_{\overline{xy}} = 1$ は成立するが、${}_{s+t}p_{\overline{xy}} = {}_sp_{\overline{xy}}\ {}_tp_{\overline{x+s,\ y+s}}$ とはならない。$p_{\overline{xy}}$ の意味を分解して考えると

$$p_{\overline{xy}} = p_xq_y + q_xp_y + p_{xy} \tag{12.1.12}$$

であり、（この右辺が（12.1.11）の右辺に等しいことは容易に証明できる）またこれと同じように考えると

$${}_{s+t}p_{\overline{xy}} = {}_sp_x\,{}_sq_y\,{}_tp_{x+s} + {}_sq_x\,{}_sp_y\,{}_tp_{y+s} + {}_sp_x\,{}_sp_y\,{}_tp_{\overline{x+s,\ y+s}} \tag{12.1.13}$$

である。（右辺第３項に（12.1.10）を用いて両辺の等しいことを証明せよ）

（６）　(x)，(y)のうちの生残者が〔$t, t+1$〕で死亡する確率、すなわち〔$t, t+1$〕で初めて２人ともいなくなる確率は

$$ {}_{t|}q_{\overline{xy}} = {}_{t}p_{\overline{xy}} - {}_{t+1}p_{\overline{xy}} \tag{12.1.14}$$

$$ = {}_{t|}q_{x} + {}_{t|}q_{y} - {}_{t|}q_{xy} \tag{12.1.15}$$

である。$t = 0$とすると再び（12.1.9）が得られる。(12.1.14)を用いると

$$\sum_{s=0}^{t-1} {}_{s|}q_{\overline{xy}} = \sum_{s=0}^{t-1} ({}_{s}p_{\overline{xy}} - {}_{s+1}p_{\overline{xy}})$$

$$ = 1 - {}_{t}p_{\overline{xy}} = {}_{t}q_{\overline{xy}}$$

であるので、(12.1.7) と同様の

$$ {}_{t}q_{\overline{xy}} = q_{\overline{xy}} + {}_{1|}q_{\overline{xy}} + \cdots\cdots + {}_{t-1|}q_{\overline{xy}} \tag{12.1.16}$$

も成立する。またこれより ${}_{t}q_{\overline{xy}}$ についても（12.1.15）と同様の次式が得られる。

$$ {}_{t}q_{\overline{xy}} = {}_{t}q_{x} + {}_{t}q_{y} - {}_{t}q_{xy} \tag{12.1.17}$$

（４）～（６）で用いられた右下の添字 $\overline{xy}$ は (x)と (y)の最終生存者を意味している。被保険者が３人以上でも、この記号 $\overline{xyz\cdots\cdots\cdots}$ は全員についての最終生存者を意味する。

（７）　t 年後に１人だけが生存している確率は

$$ {}_{t}p_{\overline{xy}}^{[1]} = {}_{t}p_{x}(1 - {}_{t}p_{y}) + {}_{t}p_{y}(1 - {}_{t}p_{x})$$

$$ = {}_{t}p_{x} + {}_{x}p_{y} - 2{}_{t}p_{xy} \tag{12.1.18}$$

となる。(記号については次節の（12.2.11）を参照)

（８）　期間〔$t, t+1$〕で (x) が死亡し、$t+1$ 年後に (y) が生存している確率は

$$ {}_tp_{xy}\, q_{x+t}\, p_{y+t} = {}_{t|}q_x\, {}_{t+1}p_y $$

である。

次に第２章§４で述べた死力に当たるものを定義しよう。(*x*)と(*y*)の共存を考える場合は

$$ \mu_{x+t\,,\,y+t} = -\frac{1}{l_{x+t\,,\,y+t}}\frac{d\,l_{x+t\,,\,y+t}}{dt} \tag{12.1.19} $$

$$ = -\frac{1}{{}_tp_{xy}}\frac{d\,{}_tp_{xy}}{dt} \tag{12.1.20} $$

がそれである。(2.4.14) を得たのと同様の仮定をすれば

$$ \mu_{x+t\,,\,y+t} \fallingdotseq \frac{l_{x+t-1\,,\,y+t-1} - l_{x+t+1\,,\,y+t+1}}{2\,l_{x+t\,,\,y+t}} \tag{12.1.21} $$

が得られる。また (12.1.9) の右辺で $l_{x+t,y+t} = l_{x+t}\, l_{y+t}$ としてみれば

$$ \mu_{x+t\,,\,y+t} = \mu_{x+t} + \mu_{x+t} \tag{12.1.22} $$

となることが証明される。この $\mu_{x+t\,,\,y+t}$ を用いれば、(2.4.6), (2.4.7) と同様に次式が得られる。

$$ {}_{t|}q_{xy} = \int_t^{t+1} {}_sp_{xy}\, \mu_{x+s\,,\,y+s}\, ds \tag{12.1.23} $$

$$ {}_tq_{xy} = \int_0^t {}_sp_{xy}\, \mu_{x+s\,,\,y+s}\, ds \tag{12.1.24} $$

次に(*x*)と(*y*)の最終生存者を考える場合には

$$ \mu_{\overline{x+t\,,\,y+t}} = -\frac{1}{{}_tp_{\overline{xy}}}\frac{d\,{}_tp_{\overline{xy}}}{dt} \tag{12.1.25} $$

と定義できる。(12.1.10), (2.4.9), (12.1.20), (12.1.22) を用いるとこの式より

$${}_{t}p_{\overline{xy}}\ \mu_{\overline{x+t,\,y+t}} = {}_{t}q_{y}\ {}_{t}p_{x}\ \mu_{x+t} + {}_{t}q_{x}\ {}_{t}p_{y}\ \mu_{y+t} \tag{12.1.26}$$

が得られる。両辺が等しくなることは各項の意味からも理解されよう。またこの μ を用いて次式が得られる。

$${}_{t|}q_{\overline{xy}} = \int_{t}^{t+1} {}_{s}p_{\overline{xy}}\ \mu_{\overline{x+s,\,y+s}}\ ds \tag{12.1.27}$$

$${}_{t}q_{\overline{xy}} = \int_{0}^{t} {}_{s}p_{\overline{xy}}\ \mu_{\overline{x+s,\,y+s}}\ ds \tag{12.1.28}$$

最後に単生命の平均余命に当たるものを考えてみよう。(x)と(y)の共存の継続を考える場合には、第2章§5と全く同様に

$$e_{xy} = \frac{1}{l_{xy}} \sum_{t=1}^{\infty} l_{x+t\,,\,y+t} \tag{12.1.29}$$

$$= \sum_{t=1}^{\infty} {}_{t}p_{xy} \tag{12.1.30}$$

$$\mathring{e}_{xy} = \frac{1}{l_{xy}} \int_{0}^{\infty} l_{x+s,\,y+s}\,ds \tag{12.1.31}$$

$$= \int_{0}^{\infty} {}_{s}p_{xy}\,ds \tag{12.1.32}$$

$$\mathring{e}_{xy} \doteqdot e_{xy} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\mu_{xy} \tag{12.1.33}$$

となる。(（12.1.33）を証明するには $l_{x+t\,,\,y+t}$ を（2.3.5）のような3次式で近似して（2.5.11）を得た過程を繰り返す)

また (x) と (y) のうちの最終生存者の死亡までを考える場合には次式が得られる。

$$e_{\overline{xy}} = \sum_{t=1}^{\infty} {}_{t}p_{\overline{xy}} \tag{12.1.34}$$

$$\mathring{e}_{\overline{xy}} = \int_{0}^{\infty} {}_{s}p_{\overline{xy}}\ ds \tag{12.1.35}$$

$$\mathring{e}_{\overline{xy}} \doteqdot e_{\overline{xy}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\mu_{\overline{xy}} \tag{12.1.36}$$

特に (x) と (y) が同じ生命表に従い、かつその生命表がメーカムの法則で表わされるものである時には、均等年齢という考え方を導入して計算を簡単に行うことができる。この場合には（2.7.7）より

$$_tp_x = s^t g^{c^x(c^t-1)}, \qquad _tp_y = s^t g^{c^y(c^t-1)}$$

である（ s, g, c はメ-カム定数）が、今

$$c^w + c^w = c^x + c^y \tag{12.1.37}$$

となるような2人の同一年齢者 (w), (w) をとると

$$\begin{aligned} _tp_{xy} &= {_tp_x}\,{_tp_y} = s^{2t} g^{(c^x+c^y)(c^t-1)} \\ &= s^{2t} g^{(c^w+c^w)(c^t-1)} = {_tp_{ww}} \end{aligned} \tag{12.1.38}$$

となる。すなわち共存確率が同一年齢者の共存確率に書き換えられる。このような w を x と y の**均等年齢**と呼ぶ。(12.1.37）の両辺を c^x で割ると

$$2c^{w-x} = 1 + c^{y-x} \tag{12.1.39}$$

となるので、$x < y$ とすれば、均等年齢と低い方の年齢 x との差は $y - x$ のみから定まることが分かる。従ってこの式から $y - x$ に対応する $w - x$ を定めておけば、年齢差 $y - x$ だけから年齢 x に関係なく均等年齢を求めることができる。均等年齢を用いれば、(12.1.30）と（12.1.32）に（12.1.38）を用いて

$$e_{xy} = e_{ww}, \qquad \mathring{e}_{xy} = \mathring{e}_{ww} \tag{12.1.40}$$

が直ちに得られるし、また後に述べるように連生に関する年金の計算を簡単に行うことができる。さらに（2.7.5）の $\mu_x = A + Bc^x$ を用いると、(12.1.37）から次式が証明される。

$$2\mu_w = \mu_x + \mu_y \tag{12.1.41}$$

§2　連生生命確率（3人以上の場合）

(x)，(y) 2人の組合わせでなく、(x)，(y)，(z) ………とm人の組合わせを考える時も、2人の時と同様のことが言える場合が多い。簡単のためにm人とも同じ死亡表に従うとしておくと、次のようなことが言える。

（1）　(x)，(y)，(z)，……… のm人がt年後に全部生存する確率は

$$ {}_tp_{xyz\cdots\cdots(m)} = {}_tp_x\,{}_tp_y\,{}_tp_z\cdots\cdots \qquad (12.2.1)$$

であり、特に $t=1$ の時は

$$ p_{xyz\cdots\cdots(m)} = p_x\,p_y\,p_z\cdots\cdots \qquad (12.2.2)$$

（2）　t年内に共存でなくなる確率、すなわちm人のうち少なくとも1人がt年内に死亡する確率は

$$ \begin{aligned} {}_tq_{xyz\cdots\cdots(m)} &= 1 - {}_tp_{xyz\cdots\cdots(m)} \\ &= 1 - {}_tp_x\,{}_tp_y\,{}_tp_z\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (12.2.3)$$

であり、特に $t=1$ の時は

$$ q_{xyz\cdots\cdots(m)} = 1 - p_{xyz\cdots\cdots(m)} \qquad (12.2.4)$$

（3）　期間$[t, t+1]$で初めて誰かの死亡が起こる確率は

$$ {}_{t|}q_{xyz\cdots\cdots(m)} = {}_tp_{xyz\cdots\cdots(m)} - {}_{t+1}p_{xyz\cdots\cdots(m)} \qquad (12.2.5)$$

（4）　(x)，(y)，(z)，………… のm人がt年内に全部死亡する確率は

$$ \begin{aligned} {}_tq_{\overline{xyz\cdots\cdots(m)}} &= {}_tq_x\,{}_tq_y\,{}_tq_z\cdots\cdots \\ &= (1-{}_tp_x)(1-{}_tp_y)(1-{}_tp_z)\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (12.2.6)$$

であり、特に $t=1$ の時は

$$q_{\overline{xyz\cdots\cdots\cdots(m)}}=(1-p_x)(1-p_y)(1-p_z)\cdots\cdots\cdots \quad (12.2.7)$$

（５）　(x)，(y)，(z)，………… のうち少なくとも１人が t 年後に生存する確率は

$$\begin{aligned} {}_tp_{\overline{xyz\cdots\cdots\cdots(m)}} &= 1-{}_tq_{\overline{xyz\cdots\cdots\cdots(m)}} \\ &= 1-(1-{}_tp_x)(1-{}_tp_y)(1-{}_tp_z)\cdots\cdots \end{aligned} \quad (12.2.8)$$

であり、特に $t=1$ ならば

$$p_{\overline{xyz\cdots\cdots\cdots(m)}}=1-(1-p_x)(1-p_y)(1-p_z)\cdots\cdots\cdots \quad (12.2.9)$$

（６）　(x)，(y)，(z)，………… の最後の生存者が〔t，$t+1$〕で死亡する確率は

$${}_{t|}q_{\overline{xyz\cdots\cdots\cdots(m)}}={}_tp_{\overline{xyz\cdots\cdots\cdots(m)}}-{}_{t+1}p_{\overline{xyz\cdots\cdots\cdots(m)}} \quad (12.2.10)$$

（７）　m 人中 r 人が t 年後に生存し、残りの $m-r$ 人が t 年内に死亡する確率は

$${}_tp^{[r]}_{\overline{xyz\cdots\cdots\cdots(m)}}=\sum {}_tp_{xy\cdots\cdots\cdots(r)}\,{}_tq_{\overline{zw\cdots\cdots\cdots(m-r)}} \quad (12.2.11)$$

である。　ただし $\sum$ は m 人中の r 人の組合わせのすべてについての和である。特に $r=1$ の時は t 年後に１人だけが生存する確率で

$${}_tp^{[1]}_{\overline{xyz\cdots\cdots\cdots(m)}}=\sum {}_tp_x\,{}_tq_{\overline{yz\cdots\cdots\cdots(m-1)}} \quad (12.2.12)$$

となる。例えば (x)，(y)，(z) の３人中２人が t 年後に生存する確率は

$${}_tp^{[2]}_{\overline{xyz}}={}_tp_{xy}(1-{}_tp_z)+{}_tp_{xz}(1-{}_tp_y)+{}_tp_{yz}(1-{}_tp_x)$$

$$= {}_tp_{xy} + {}_tp_{xz} + {}_tp_{yz} - 3\,{}_tp_{xyz} \qquad (12.2.13)$$

となる。このように具体的な問題では（12.2.11）の右辺の q を（12.2.6）によって展開して、いくつかの連生共存確率の加減で表わすことができる。

（8）　m 人中少なくとも r 人が t 年後に生存する確率は

$${}_tp_{\overset{r}{\overline{xyz\cdots\cdots(m)}}} = \sum_{i=r}^{m} {}_tp_{\overset{[i]}{\overline{xyz\cdots\cdots(m)}}} \qquad (12.2.14)$$

である。例えば3人中少なくとも2人が t 年後に生存する確率は（12.2.13）を用いて次のようになる。

$$\begin{aligned} {}_tp_{\overset{2}{\overline{xyz}}} &= {}_tp_{\overset{[2]}{\overline{xyz}}} + {}_tp_{xyz} \\ &= {}_tp_{xy} + {}_tp_{xz} + {}_tp_{yz} - 2\,{}_tp_{xyz} \end{aligned} \qquad (12.2.15)$$

（9）　(x), (y), (z), ………… のうち第 r 番目の死亡が〔$t, t+1$〕で起こる確率は

$${}_tp_{\overset{m-r+1}{\overline{xyz\cdots\cdots(m)}}} - {}_{t+1}p_{\overset{m-r+1}{\overline{xyz\cdots\cdots(m)}}} \qquad (12.2.16)$$

である。例えば3人中第2番目の死亡が〔$t, t+1$〕で起こる確率は（12.2.15）と（12.2.5）を用いて次のようになる。

$$\begin{aligned} &{}_tp_{\overset{2}{\overline{xyz}}} - {}_{t+1}p_{\overset{2}{\overline{xyz}}} \\ &\quad = {}_{t|}q_{xy} + {}_{t|}q_{xz} + {}_{t|}q_{yz} - 2\,{}_{t|}q_{xyz} \end{aligned} \qquad (12.2.17)$$

(x), (y), (z), ………… という m 人の共存に関する死力とそれに関連する式については、（12.1.19）～（12.1.24）を拡張した式ができ

るし、またこのm人のうちの最終生存者に関する死力とそれに関連する式については、(12.1.25) ～ (12.1.28) を拡張した式ができる。　さらに両方の場合の平均余命についても (12.1.29) ～ (12.1.36) を拡張した式ができるが、ここではいずれも省略する。読者で試みられたい。

また (12.1.37) ～ (12.1.41) で述べた均等年齢の考え方も3人以上の場合に拡張することができるが、それもここでは省略する。

3人以上の場合には、例えば(y)，(z)のどちらかと (x)が共存する場合というように、共存と最終生存との組合わせを考えることがある。この例の場合には右下の添字は $x,\overline{yz}$ とするが、例えば

$${}_tp_{x,\overline{yz}} = {}_tp_x\,{}_tp_{\overline{yz}} \tag{12.2.18}$$

である。(12.1.10) を用いると

$${}_tp_{x,\overline{yz}} = {}_tp_{xy} + {}_tp_{xz} - {}_tp_{xyz} \tag{12.2.19}$$

と書くことができる。また

$${}_tq_{x,\overline{yz}} = 1 - {}_tp_{x,\overline{yz}} \tag{12.2.20}$$

$${}_{t|}q_{x,\overline{yz}} = {}_tp_{x,\overline{yz}} - {}_{t+1}p_{x,\overline{yz}} \tag{12.2.21}$$

となる。この式の右辺に (12.2.19) を入れ、(12.2.5) を用いると次式が得られる。

$${}_{t|}q_{x,\overline{yz}} = {}_{t|}q_{xy} + {}_{t|}q_{xz} - {}_{t|}q_{xyz} \tag{12.2.22}$$

§3　連生の条件付生命確率

2人以上の連合生命について死亡の順序に関係して定まるような確率を条件付生命確率という。§1の（8）は死亡に順序がある場合を年度単位で見た時の確率の一例であるが、ここでは同一年度内の場合も含め (x) が (y) に先立って死亡する確率等について考える。

（１）　(x) が期間〔$t, t+1$〕の間に死亡し、かつその瞬間に (y) が生存している確率は

$$ {}_{t|}q_{\overset{1}{x}y} = \int_t^{t+1} {}_sp_{xy}\,\mu_{x+s}\,ds \tag{12.3.1} $$

である。x の上に乗せた符号１は、(x) の死亡が１番目でありかつ観察期間内に起こることを表わしている。(12.1.1) を用いると

$$ {}_{t|}q_{\overset{1}{x}y} = \int_t^{t+1} {}_sp_y\,{}_sp_x\,\mu_{x+s}\,ds \tag{12.3.2} $$

とも書ける。また (12.1.23) と (12.1.22) を用いると

$$ {}_{t|}q_{xy} = {}_{t|}q_{\overset{1}{x}y} + {}_{t|}q_{x\overset{1}{y}} \tag{12.3.3} $$

が得られる。(12.3.2) を実際に計算するには、第２章§３の（４）を利用する。すなわち (2.3.6) を用いると

$$ \int_t^{t+1} {}_sp_y\,{}_sp_x\,\mu_{x+s}\,ds \fallingdotseq {}_{t+\frac{1}{2}}p_y \int_t^{t+1} {}_sp_x\,\mu_{x+s}\,ds $$

であるので

$$ {}_{t|}q_{\overset{1}{x}y} \fallingdotseq {}_{t+\frac{1}{2}}p_y\ {}_{t|}q_x \tag{12.3.4} $$

となる。 ${}_{t+\frac{1}{2}}p_y$ は $\dfrac{{}_tp_y + {}_{t+1}p_y}{2}$ で近似できるが、さらによい近似を求めるならば第２章 練習問題(１)の（１３）で述べた式を用いることもできる。

特に $t=0$ の時は $q_{\overset{1}{x}y} = {}_{\frac{1}{2}}p_y\,q_x$ であるが、(3.2.6) から得られる $q_{\overset{1}{x}y} = q_x(1-\dfrac{1}{2}q_y)$ も一つの近似式である。(${}_{\frac{1}{2}}p_y \fallingdotseq \dfrac{1+p_y}{2}$ としてもこの式が得られる)

（２）　(x) が t 年内に死亡しかつその瞬間に (y) が生存している確率

は、（1）の場合の和として

$$ {}_{t}q_{\overset{1}{x}y} = \sum_{f=0}^{t-1} {}_{f|}q_{\overset{1}{x}y} \tag{12.3.5}$$

$$ = \int_0^t {}_{s}p_{xy}\,\mu_{x+s}\,ds \tag{12.3.6}$$

となる。積分による表現は t が整数でない場合にも用いることができる。（12.3.3）と同じく、この場合も次式が成立する。

$$ {}_{t}q_{xy} = {}_{t}q_{\overset{1}{x}y} + {}_{t}q_{x\overset{1}{y}} \tag{12.3.7}$$

（3）　（12.3.6）で $t \to \infty$ とすれば、(x) が (y) に先立って死亡する確率

$$ {}_{\infty}q_{\overset{1}{x}y} = \int_0^{\infty} {}_{s}p_{xy}\,\mu_{x+s}\,ds \tag{12.3.8}$$

が得られ、この時（12.3.7）に当たる式は次のようになる。

$$ 1 = {}_{\infty}q_{\overset{1}{x}y} + {}_{\infty}q_{x\overset{1}{y}} \tag{12.3.9}$$

（4）　被保険者が (x)，(y)，(z)，………… と m 人である時に最初に (x) が死亡する確率はこれまでと同様に書くことができる。例として 3 人の場合をとると次のような式になる。

$$ {}_{t|}q_{\overset{1}{x}yz} = \int_t^{t+1} {}_{s}p_{xyz}\,\mu_{x+s}\,ds \tag{12.3.10}$$

$$ \fallingdotseq {}_{t+\frac{1}{2}}p_{yz}\ {}_{t|}q_{x} \tag{12.3.11}$$

$$ {}_{t|}q_{xyz} = {}_{t|}q_{\overset{1}{x}yz} + {}_{t}q_{x\overset{1}{y}z} + {}_{t}q_{xy\overset{1}{z}} \tag{12.3.12}$$

$$ {}_{t}q_{\overset{1}{x}yz} = \sum_{f=0}^{t-1} {}_{f|}q_{\overset{1}{x}yz} \tag{12.3.13}$$

$$= \int_0^t {}_sp_{xyz}\,\mu_{x+s}\,ds \qquad (12.3.14)$$

$$ {}_tq_{xyz} = {}_tq_{\overset{1}{x}yz} + {}_tq_{x\overset{1}{y}z} + {}_tq_{xy\overset{1}{z}} \qquad (12.3.15)$$

（5）　(*x*) が期間〔 t , $t+1$ 〕の間に死亡しかつ (*y*) がそれ以前に死亡している確率は

$$ {}_{t|}q_{\overset{2}{x}y} = \int_t^{t+1} {}_sq_y\ {}_sp_x\,\mu_{x+s}\,ds \qquad (12.3.16)$$

であるが、${}_sq_y = 1 - {}_sp_y$ とすると

$$ {}_{t|}q_{\overset{2}{x}y} = {}_{t|}q_x - {}_{t|}q_{\overset{1}{x}y} \qquad (12.3.17)$$

となる。この式は両辺の意味からも理解できるところである。またこの式より、t 年内に (*x*) が死亡しかつ (*y*) がそれ以前に死亡している確率は

$$ {}_tq_{\overset{2}{x}y} = \sum_{f=0}^{t-1} {}_{f|}q_{\overset{2}{x}y} \qquad (12.3.18)$$

$$= {}_tq_x - {}_tq_{\overset{1}{x}y} \qquad (12.3.19)$$

となる。(12.3.16) は (*x*) の死亡に着目して式をつくっているが、(*y*) の死亡に着目して、t 年内に (*x*) が2番目に死亡する確率の別の表現を求めると

$$ {}_tq_{\overset{2}{x}y} = \int_0^t {}_sp_{xy}\,\mu_{y+s}\ {}_{t-s}q_{x+s}\,ds$$

となる。ここで ${}_{t-s}q_{x+s} = 1 - {}_{t-s}p_{x+s}$ とすると

$$ {}_tq_{\overset{2}{x}y} = {}_tq_{x\overset{1}{y}} - {}_tp_x\ {}_tq_y \qquad (12.3.20)$$

という計算式もできる。（ (12.3.7) と (12.1.4) を (12.3.20) の右辺

に用い、(12.3.19) の右辺に等しくなることを直接証明することもできる) (12.3.20)も両辺の意味を考えれば理解できよう。ここで t の代わりに $t+1$ とした式をつくり、それからもとの式を引くと (12.3.17) とは別の表現の次式が得られる。

$$ {}_{t|}q_{\overset{2}{x}y} = {}_{t|}q_{x\overset{1}{y}} + {}_{t}p_{x}\,{}_{t}q_{y} - {}_{t+1}p_{x}\,{}_{t+1}q_{y} \tag{12.3.21} $$

以下では被保険者が3人以上の場合を考えるが、この場合にも、(12.3.12) から (12.3.15) が、あるいは (12.3.17) から (12.3.19) が導かれたように、${}_{t|}q$ に関する式から ${}_{t}q$ に関する式が導かれることが多い。 今後は簡略に記述するため ${}_{t|}q$ に関する式のみあげて、同じ関係が ${}_{t}q$ についても成立する場合には式の番号の右に※印を付しておくこととする。

(6)　(5) と (1) の組合わせであるが、(x), (y), (z) 3人の場合で、(y) が期間〔$t, t+1$〕の間に死亡し、かつ (x) はその時点以前に既に死亡しており、(z) はその時点で生存している確率は

$$ {}_{t|}q_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} = \int_{t}^{t+1} {}_{s}q_{x}\,{}_{s}p_{yz}\,\mu_{y+s}\,ds \tag{12.3.22} $$

となる。x の下に書いた符号1は、(x) の死亡が1番目ではあるが観察期間の外でもよいことを表わしている。${}_{s}q_{x} = 1 - {}_{s}p_{x}$ を用いると

$$ {}_{t|}q_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} = {}_{t|}q_{\overset{1}{y}z} - {}_{t|}q_{x\overset{1}{y}z} \qquad (12.3.23)※ $$

となる。この関係は被保険者が4人以上でも同じように成立する。

(7)　(x), (y), (z) の順で死亡が起こり、かつ (z) の死亡が期間〔$t, t+1$〕の間に起こる確率は

$$ {}_{t|}q_{\underset{1}{x}\underset{2}{y}\overset{3}{z}} = \int_t^{t+1} {}_sq_{x\overset{2}{y}}\ {}_sp_z\ \mu_{z+s}\ ds \qquad (12.3.24) $$

である。被積分関数に ${}_sq_{x\overset{2}{y}}$ がある場合の積分は一般に困難であるが、(y) の死亡に着目して（12.3.20),（12.3.21）を導いた方法をここでも用いることができる。すなわち

$$ {}_tq_{\underset{1}{x}\underset{2}{y}\overset{3}{z}} = \int_0^t {}_sq_x\ {}_sp_{yz}\ \mu_{y+s}\ {}_{t-s}q_{z+s}\ ds $$

とし、　${}_sq_x = 1 - {}_sp_x$,　${}_{t-s}q_{z+s} = 1 - {}_{t-s}p_{z+s}$　を入れると

$$ {}_tq_{\underset{1}{x}\underset{2}{y}\overset{3}{z}} = \int_0^t ({}_sp_{yz} - {}_sp_{xyz} - {}_sp_y\ {}_tp_z + {}_sp_{xy}\ {}_tp_z)\mu_{y+s}\ ds $$

$$ = {}_tq_{\overset{1}{y}z} - {}_tq_{x\overset{1}{y}z} - {}_tq_y\ {}_tp_z + {}_tq_{x\overset{1}{y}}\ {}_tp_z $$

となるが、さらにこれに（12.3.23)※ と（12.3.19）を用いると

$$ {}_tq_{\underset{1}{x}\underset{2}{y}\overset{3}{z}} = {}_tq_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} - {}_tq_{x\overset{2}{y}}\ {}_tp_z \qquad (12.3.25) $$

となる。この式で t の代わりに $t+1$ とした式からもとの式を引くと次式が得られる。

$$ {}_{t|}q_{\underset{1}{x}\overset{2:3}{y}z} = {}_{t|}q_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} + {}_tq_{x\overset{2}{y}}\ {}_tp_z - {}_{t+1}q_{x\overset{2}{y}}\ {}_{t+1}p_z \qquad (12.3.26) $$

（８）　(x), (y), (z)のうち (y) の死亡が期間〔$t, t+1$〕内で起こり、(x) はそれ以前に死亡しているが、(z) の死亡は (x) より後ではあるが (y) より先でも後でもよいとすると、その確率は

$$ {}_{t|}q_{\underset{1}{x}\overset{2:3}{y}z} = {}_{t|}q_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} + {}_{t|}q_{\underset{1}{x}\overset{3}{y}\underset{2}{z}} \qquad (12.3.27)※ $$

となる。(符号 2:3 は 2 or 3 の意味である)

（９）　一般に m 人の被保険者 (x), (y), (z), ………… のなかで (x) が〔$t, t+1$〕内で死亡し、かつ (x) の死亡が第 r 番目（$r < m$）である

確率を求めよう。

(x) がある時点 s で死亡する確率は $p_x\,\mu_{x+s}\,ds$ であり、その時点で残り $m-1$ 人中 $r-1$ 人が既に死亡しており、$m-r$ 人が生存していることが条件であるから、(12.2.11) の記号を用いて

$$ {}_{t|}q^{r}_{xyz\cdots\cdots(m)} = \int_t^{t+1} {}_sp_{\overline{yz\cdots\cdots(m-1)}}^{[m-r]}\ {}_sp_x\,\mu_{x+s}\,ds \qquad (12.3.28) $$

となる。また t 年内に (x) が死亡し、それが第 r 番目である確率は

$$ {}_{t}q^{r}_{xyz\cdots\cdots(m)} = \sum_{f=0}^{t-1} {}_{f|}q^{r}_{xyz\cdots\cdots(m)} \qquad (12.3.29) $$

である。例として (x), (y), (z) のうち (x) の死亡が2番目である確率を求めると、(12.2.12) を用いて次式が得られる。

$$ {}_{t|}q^{2}_{xyz} = \int_t^{t+1} {}_sp_{\overline{yz}}^{[1]}\ {}_sp_x\,\mu_{x+s}\,ds $$

$$ = \int_t^{t+1} (\,{}_sp_y\ {}_sq_z + {}_sq_y\ {}_sp_z\,)\,{}_sp_x\,\mu_{x+s}\,ds $$

$$ = {}_{t|}q^{2}_{xy\underset{1}{z}} + {}_{t|}q^{2}_{x\underset{1}{y}z} \qquad (12.3.30)※ $$

（１０）　期間〔t, $t+1$〕内で (x) が死亡し、その時点で (y), (z) のうちの最終生存者が生存している確率は

$$ {}_{t|}q^{1}_{x,\overline{yz}} = \int_t^{t+1} {}_sp_x\ {}_sp_{\overline{yz}}\,\mu_{x+s}\,ds \qquad (12.3.31) $$

である。${}_sp_{\overline{yz}}$ に (12.1.10) を用いると次式が得られる。

$$ {}_{t|}q^{1}_{x,\overline{yz}} = \int_t^{t+1} {}_sp_x\,(\,{}_sp_y + {}_sp_z - {}_sp_{yz}\,)\,\mu_{x+s}\,ds $$

$$ = {}_{t|}q^{1}_{xy} + {}_{t|}q^{1}_{xz} - {}_{t|}q^{1}_{xyz} \qquad (12.3.32)※ $$

（１１）　同じく期間〔$t, t+1$〕内で (x) が死亡し、その時点で (y)，(z) のうちの最終生存者が既に死亡している確率は

$$
\begin{aligned}
{}_{t|}q^{2}_{x,\overline{yz}} &= \int_t^{t+1} (1 - {}_s p_{\overline{yz}})\, {}_s p_x\, \mu_{x+s}\, ds \\
&= {}_{t|}q_x - {}_{t|}q^{1}_{x,\overline{yz}} \qquad (12.3.33)※
\end{aligned}
$$

となる。（これは ${}_{t|}q^{3}_{xyz}$ と同じである）

（１２）　(x)，(y)のうちの最終生存者が〔$t, t+1$〕内で死亡し、かつその時点で (z) が生存している確率は

$$
{}_{t|}q^{1}_{\overline{xy},z} = \int_t^{t+1} {}_s p_{\overline{xy}}\ {}_s p_z\, \mu_{\overline{x+s,\, y+s}}\, ds \qquad (12.3.34)
$$

となるが、(12.1.26) を用いると次式が得られる。

$$
\begin{aligned}
{}_{t|}q^{1}_{\overline{xy},z} &= \int_t^{t+1} {}_s p_z ({}_s q_y\ {}_s p_x\, \mu_{x+s} + {}_s q_x\ {}_s p_y\, \mu_{y+s})\, ds \\
&= {}_{t|}q_{\overset{2}{x}\underset{1}{y}z} + {}_{t|}q_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} \qquad (12.3.35)※
\end{aligned}
$$

（１３）　期間〔$t, t+1$〕内で始めて(x)，(y)のどちらかが死亡し（共存でなくなり）、その時点で (z) が生存している確率は

$$
{}_{t|}q^{1}_{\overparen{xy},z} = \int_t^{t+1} {}_s p_{xy}\ {}_s p_z\, \mu_{x+s,\, y+s}\, ds \qquad (12.3.36)
$$

である。記号 ⌒ は多数の被保険者中(x)，(y)についてのみ共存を考えることを意味する。(12.1.22) より $\mu_{x+s,\,y+s} = \mu_{x+s} + \mu_{y+s}$ とし、(12.3.10) を用いると次式が得られる。

$$
{}_{t|}q^{1}_{\overparen{xy},z} = {}_{t|}q_{\overset{1}{x}yz} + {}_{t|}q_{x\overset{1}{y}z} \qquad (12.3.37)※
$$

第１２章　　練習問題（１）

（１）　父、母、子の３人が20年以内に死亡する確率はそれぞれ 0.25, 0.10, 0.02 である。次の確率を計算せよ。

（a）その期間内に３人が全部死亡する

（b）３人全部が生存する

（c）少なくとも１人は死亡する

（d）少なくとも１人は生存する

（２）　20人の (x) について次の確率を q_x または p_x を用いて表わせ。

（a）特定の５人のみが１年以内に死亡する

（b）少なくとも特定の５人が１年以内に死亡する

（c）ちょうど５人が１年以内に死亡する

（d）５人以下が１年以内に死亡する

（３）　４人の (x) のうち特定の者Ａが1年以内に、かつ最初に死亡する確率を q_x を用いて表わせ。

（４）　$l_{20}=9,360$ および $\mu_x=\dfrac{2x-3}{9,700+3x-x^2}$ より l_x を決定し、それを用いて(53),(54)の両人中の最終生存者が現在から20年以内に死亡する確率を計算せよ。

（５）　３人の (x) がいる。次の事象が今から $t\sim t+1$ 年後の間に起こる確率を求めよ。

（a）第1死亡　　（b）第2死亡　　（c）第3死亡

（6）　次式を証明せよ。

（a）$_tp_{\overline{xyzw}}^{[2]}=(_tp_{xy}+{}_tp_{xz}+{}_tp_{xw}+{}_tp_{yz}+{}_tp_{yw}+{}_tp_{zw})$

$-3(_tp_{xyz}+{}_tp_{xyw}+{}_tp_{xzw}+{}_tp_{yzw})+6\,{}_tp_{xyzw}$

（b）$_tp_{\overline{xyzw}}^{\,3}={}_tp_{xyz}+{}_tp_{xyw}+{}_tp_{xzw}+{}_tp_{yzw}-3\,{}_tp_{xyzw}$

（7）　A, B, Cは同一年齢xである。m年後から$m+n$年後までの期間内に次の事象が起こる確率を求めよ。

（a）この間にA, Bが死亡し、Cが$m+n$年後に生存する

（b）A, B, Cの順に全員が死亡する

（c）少なくとも1人が死亡する

（8）　第5回全会社表を用い、24歳の男子と22歳の女子について次の事象の起こる確率を計算せよ。

（a）少なくとも1人が40歳到達前に死亡する

（b）一方が40歳までに死亡し、他方が40歳と41歳の間で死亡する

（c）最終生存者が40歳と41歳の間で死亡する

（9）　tの区間〔0, n〕において$_tp_x\,\mu_{x+t}$がtの1次関数で表わされ

$$_tp_x\,\mu_{x+t}=a+bt$$

となるとき、$n-1$年以内に(x)が$(x+1)$に先立って死亡する確率はどうなるか。（第2章 練習問題（1）の（19）の解答を利用する）

（１０）　(20)が(40)より先に死亡する確率は 0.2697，(20)が 10年以内に死亡する確率は 0.0735，(30)が10年以内に死亡する確率は 0.1005 である。(20)と(30)が相互に10年以内の期間を隔てて死亡する確率を計算せよ。

（１１）　次式を証明せよ。(ただし第１の等式は積分によること)

(a)　$${}_{t}q_{xy} = {}_{t}q_{\overset{1}{x}y} + {}_{t}q_{x\overset{1}{y}}$$
$$= {}_{t}q_{x} + {}_{t}q_{y} - {}_{t}q_{x}\,{}_{t}q_{y}$$

(b)　$${}_{t}q_{\overline{xy}} = {}_{t}q_{\overset{2}{x}y} + {}_{t}q_{x\overset{2}{y}}$$
$$= {}_{t}q_{x} + {}_{t}q_{y} - {}_{t}q_{xy}$$

（１２）　次式の左辺を積分を用いて表わし、右辺に等しいことを証明せよ。

(a)　$${}_{t|}q_{\overset{3}{x}yz} = {}_{t|}q_{\overset{3}{x}\underset{2}{y}\underset{1}{z}} + {}_{t|}q_{\overset{3}{x}\underset{1}{y}\underset{2}{z}}$$

(b)　$${}_{t|}q_{\overset{2}{\overline{xy}}z} = {}_{t|}q_{\overset{3}{x}yz} + {}_{t|}q_{\overset{3}{x}yz}$$

(c)　$${}_{t|}q_{\overset{1}{x}y\overline{zw}} = {}_{t|}q_{\overset{1}{x}yz} + {}_{t|}q_{\overset{1}{x}yw} - {}_{t|}q_{\overset{1}{x}yzw}$$

(d)　$${}_{t|}q_{\overset{2}{x}y\underset{1}{\overline{zw}}} = {}_{t|}q_{\overset{1}{x}y} - {}_{t|}q_{\overset{1}{x}y\overline{zw}}$$

(e)　$${}_{t|}q_{\overset{3}{x}yzw} = {}_{t|}q_{\overset{2}{x}y\underset{1}{\overline{zw}}} + {}_{t|}q_{\overset{2}{x}z\underset{1}{\overline{yw}}} + {}_{t|}q_{\overset{2}{x}w\underset{1}{\overline{yz}}}$$

(f)　$${}_{t}q_{\overset{3:4}{x}y\underset{2}{z}\underset{1}{w}} = {}_{t}q_{xy\overset{2}{z}\underset{1}{w}} - {}_{t}p_{x}\,{}_{t}q_{y\overset{2}{z}\underset{1}{w}}$$

（１３）　(x)，(y)，(z)，(w)　４人について、(x)，(y)および〔(z)，(w)のうちの最終生存者〕の順で死亡が起こり、かつ (x) は (y) よりも５年以上早く、〔(z)，(w)のうちの最終生存者〕は (y) よりも５年以上遅く死亡し、さらにすべての死亡が現在から20年以内に起こる確率を積分を用いて表わせ。

（14）　(a) ${}_tq^{3}_{xy\underset{2}{z}\underset{1}{w}}$ を積分の形で表わせ。

(b) ${}_tq^{4}_{x\underset{3}{y}\underset{2}{z}\underset{1}{w}}$ および ${}_tq^{2:3}_{xyz\underset{1}{w}}$ を ${}_tq^{3}_{xy\underset{2}{z}\underset{1}{w}}$ が入った式に変形せよ。

§4　連生保険および連生年金

2人以上の被保険者を結合してその生死を関連させた一定の条件を定め、その条件が実現したときに保険金を支払う保険を**（広義の）連生保険**という。（年金ならば**（広義の）連生年金**）　2人以上の保険を同時に扱っても、被保険者それぞれの生死が相互に関係することなく保険金が支払われる場合は連生保険ではない。例えば保険料集金の便宜のため多くの保険契約を一まとめにした集団扱保険や、後章で述べる団体定期保険などは連生保険ではない。

（広義の）連生保険あるいは連生年金では、本章の始めに述べた連合生命を被保険者とし、前節までに述べた諸種の生命確率を利用して保険料や責任準備金の計算を行う。

まず本節では§1の始めに述べた連生生命表を用いる保険および年金を取り上げるが、簡単に記述するため最もよく応用される2生命の場合を考える。§1の始めに述べたように、この時は数列

$$l_{xy}\ ,\ l_{x+1,\,y+1}\ ,\ l_{x+2,\,y+2}\ ,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

によって脱退残存表が表わされるが、このような脱退残存表を使用する保険を**（狭義の）連生保険**という。（年金ならば**（狭義の）連生年金**）

（狭義の）連生保険の保険種類については単生命の場合と類似のものが考えられ、また保険料および責任準備金の計算式も単生命の場合と類似している。証明は一々行わないが、第4章以下の単生命の場合を参考に読者で試みられたい。

（1）　(x), (y)ともn年間生存した場合に保険金1を支払う**連生生存保険**の一時払保険料は

$$A_{xy:\overset{1}{\overline{n|}}} = v^n\,{}_np_{xy} \tag{12.4.1}$$

（２）　(x)，(y)が共存する限り支払う**連生有期年金**の現価は

$$\text{期末払：}\quad a_{xy:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t \, {}_tp_{xy} \tag{12.4.2}$$

$$\text{期始払：}\quad \ddot{a}_{xy:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \, {}_tp_{xy} \tag{12.4.3}$$

である。ここで　$n = \infty$ とすれば終身年金に当る a_{xy} および $\ddot{a}_{xy}$ となる。また据置年金等についても第４章§３と全く同様の式がつくられる。

（３）　分割払年金、連続年金についても類似の式ができる。第４章§４の終わりで述べたように、(4.4.3) の類似として

$$\ddot{a}^{(k)}_{xy:\overline{n}|} = \frac{1}{k}\sum_{t=0}^{nk-1} v^{\frac{t}{k}} \, {}_{\frac{t}{k}}p_{xy} \tag{12.4.4}$$

$$\fallingdotseq \ddot{a}_{xy:\overline{n}|} - \frac{k-1}{2k}(1 - v^n \, {}_np_{xy}) - \beta \tag{12.4.5}$$

$$\beta = \frac{k^2-1}{12k^2}\{\delta(1 - v^n \, {}_np_{xy}) + (\mu_{xy} - v^n \, {}_np_{xy}\,\mu_{x+n,y+n})\}$$

が得られる。ただし $\mu_{x+t,y+t}$ は (12.1.19) で定義されるものである。また (4.4.4) ～ (4.5.7) についてもすべて類似の式が得られるが、(4.5.2) の類似式のみあげてみると

$$\bar{a}_{xy:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \, {}_tp_{xy}\, dt \tag{12.4.6}$$

$$\fallingdotseq \ddot{a}_{xy:\overline{n}|} - \frac{1}{2}(1 - v^n \, {}_np_{xy}) - \bar{\beta} \tag{12.4.7}$$

$$\bar{\beta} = \frac{1}{12}\{\delta(1 - v^n \, {}_np_{xy}) + (\mu_{xy} - v^n \, {}_np_{xy}\,\mu_{x+n,y+n})\}$$

（4）　一定の期間内に最初の死亡が起こった場合、すなわち共存でなくなった場合に保険金を支払う保険を**連生定期保険**という。保険金年末支払の一時払純保険料を $A_{\overset{1}{\widehat{xy}}:\overline{n|}}$ で表わすと、(4.6.4), (4.6.10), (4.6.11) と同様に

$$A_{\overset{1}{\widehat{xy}}:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\ {}_{t|}q_{xy} \qquad (12.4.8)$$

$$= v\,\ddot{a}_{xy:\overline{n|}} - a_{xy:\overline{n|}} \qquad (12.4.9)$$

$$= 1 - d\,\ddot{a}_{xy:\overline{n|}} - v^n\ {}_np_{xy} \qquad (12.4.10)$$

が得られる。(記号 $\overset{1}{\widehat{xy}}$ は (x), (y)の共存が先に消滅する意味である。次節の $\overset{1}{xy}$ と区別するため異なった記号が使われる)

保険金分割支払の時は (4.7.1), (4.7.2), (4.7.3) と同様の式が得られ、即時支払の時は (4.8.1), (4.8.2), (4.8.3) と同様の式が得られるが、後者のみ書いておくと

$$\bar{A}_{\overset{1}{\widehat{xy}}:\overline{n|}} = \int_0^n v^t\ {}_tp_{xy}\ \mu_{x+t,\,y+t}\ dt \qquad (12.4.11)$$

$$= 1 - \delta\,\bar{a}_{xy:\overline{n|}} - v^n\ {}_np_{xy} \qquad (12.4.12)$$

$$\fallingdotseq (1+i)^{\frac{1}{2}} A_{\overset{1}{\widehat{xy}}:\overline{n|}} \qquad (12.4.13)$$

（5）　一定の期間内に共存でなくなった場合、もしくは満期まで共存であった場合に保険金を支払う保険を**連生養老保険**という。その一時払純保険料は第 4 章§ 9 の諸式と同様に

$$A_{xy:\overline{n|}} = A_{\overset{1}{\widehat{xy}}:\overline{n|}} + A_{xy:\overset{1}{\overline{n|}}} \qquad (12.4.14)$$

$$= 1 - d\,\ddot{a}_{xy:\overline{n|}} \qquad (12.4.15)$$

$$= v\,\ddot{a}_{xy:\overline{n|}} - a_{xy:\overline{n-1|}} \qquad (12.4.16)$$

$$A^{(k)}_{xy:\overline{n|}} = A^{(k)}_{\overset{1}{\widehat{xy}}:\overline{n|}} + A_{xy:\overset{1}{\overline{n|}}} \qquad (12.4.17)$$

$$= 1 - d^{(k)}\,\ddot{a}^{(k)}_{xy:\overline{n}|} \qquad (12.4.18)$$

$$\fallingdotseq A_{xy:\overline{n}|} + \frac{k-1}{2k}\, i\, A_{\overset{1}{xy}:\overline{n}|} \qquad (12.4.19)$$

$$\overline{A}_{xy:\overline{n}|} = \overline{A}_{\overset{1}{xy}:\overline{n}|} + A_{xy:\overset{1}{\overline{n}|}} \qquad (12.4.20)$$

$$= 1 - \delta\,\overline{a}_{xy:\overline{n}|} \qquad (12.4.21)$$

$$\fallingdotseq A_{xy:\overline{n}|} + \frac{i}{2} A_{\overset{1}{xy}:\overline{n}|} \qquad (12.4.22)$$

となる。さらに第4章§１１～§１３で述べた多くの事項、例えば $(IA)_{\overset{1}{xy}:\overline{n}|}$ の定義や完全年金 $\mathring{a}^{(k)}_{xy:\overline{n}|}$ に関する議論がここでも全く平行的に述べられるが、冗長になるので省略する。読者で試みられたい。

（６）　年払保険料についても第4章§１４と同様に計算ができる。例えば養老保険の年払平準保険料については、第4章§１４（６）と同様に

$$P_{xy:\overline{n}|} = \frac{A_{xy:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}} \qquad (12.4.23)$$

$$= P_{\overset{1}{xy}:\overline{n}|} + P_{xy:\overset{1}{\overline{n}|}} \qquad (12.4.24)$$

$$= \frac{1}{\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}} - d \qquad (12.4.25)$$

となる。保険金即時支払ならば

$$\overline{P}_{xy:\overline{n}|} = \frac{\overline{A}_{xy:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}} \qquad (12.4.26)$$

なお年払保険料計算の際の分子には連生生命確率が用いられないが、分母には $\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}$ を用いる場合があり、そのような保険も連生保険とよんでいる。例えば x 歳のこどもの n 年生存保険をとり、(4.16.1) の分子のような給付を行うが、さらに y 歳の父が保険期間の途中で死亡すれば以後の保険料の払込を免除する（すなわち (x) と (y) の共存期間に限り

保険料が払込まれる)とすると、年払保険料は

$$P=\frac{\frac{1}{n}(IA)^{\;1}_{x:\overline{n}|}+A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}}{\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}} \tag{12.4.27}$$

(子と親を組合せた連生保険を**子供保険**と総称する。)

（７）　分割払保険料および連続払保険料については、(4.17.3), (4.17.4), (4.17.5), (4.17.9), (4.17.10) と同様の式ができるが、ここでは省略する。

（８）　保険金年末支払の養老保険の純保険料式責任準備金は第５章§３と同様に

$${}_tV_{xy:\overline{n}|}=A_{x+t,\,y+t:\overline{n-t}|}-P_{xy:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x+t,\,y+t:\overline{n-t}|} \tag{12.4.28}$$

$$=1-\frac{\ddot{a}_{x+t,\,y+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}} \tag{12.4.29}$$

となる。保険金即時支払では

$${}_t\overline{V}_{xy:\overline{n}|}=\overline{A}_{x+t,\,y+t:\overline{n-t}|}-\overline{P}_{xy:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x+t,\,y+t:\overline{n-t}|} \tag{12.4.30}$$

となる。なお (12.4.27) のような保険の責任準備金については、保険料払込中と、父が死亡して払込免除になった場合とに分けて計算しなければならない。

（９）　**計算基数**については第４章§１０で述べたものを修正して定義し、それらをあらかじめ計算しておくと、連生保険の保険価格が簡明に表現されかつ数値計算も早くできる。すなわち

$$D_{xy}=v^{\frac{1}{2}(x+y)}\,l_{xy}$$

$$N_{xy} = D_{xy} + D_{x+1,\,y+1} + \cdots\cdots\cdots$$

$$C_{xy} = v^{\frac{1}{2}(x+y)+1}\, d_{xy}$$

$$M_{xy} = C_{xy} + C_{x+1,\,y+1} + \cdots\cdots\cdots$$

$$\bar{C}_{xy} = v^{\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}}\, d_{xy}$$

$$\bar{M}_{xy} = \bar{C}_{xy} + \bar{C}_{x+1,\,y+1} + \cdots\cdots\cdots$$

としておけば、例えば次のように計算しやすい式ができる。

$$\ddot{a}_{xy:\overline{n|}} = \frac{N_{xy} - N_{x+n,\,y+n}}{D_{xy}}$$

$$A_{xy:\overline{n|}} = \frac{M_{xy} - M_{x+n,\,y+n} + D_{x+n,\,y+n}}{D_{xy}}$$

$${}_m\bar{P}_{xy:\overline{n|}} = \frac{\bar{M}_{xy} - \bar{M}_{x+n,\,y+n} + D_{x+n,\,y+n}}{N_{xy} - N_{x+m,y+m}}$$

（１０）　第３章§３の終わりに述べた均等年齢が用いられる場合には、(x)，(y)に対する均等年齢(w)，(w)を用いると、（12.1.38）により ${}_tp_{xy} = {}_tp_{ww}$ であるから、これを（12.4.3）に入れて

$$\ddot{a}_{xy:\overline{n|}} = \ddot{a}_{ww:\overline{n|}} \qquad (12.4.31)$$

となる。従って（12.4.15）や（12.4.25）のように $\ddot{a}$ のみで定まる保険価格についても、均等年齢の組合わせの場合の保険価格に等しくなる。これによってすべての x,y の組合わせについて保険価格を計算せずとも、均等年齢の組合わせについての保険価格さえ計算しておけばよいことになる。

３生命以上の共存を考える場合も全く２生命の場合と同様に $\ddot{a}_{xyz:\overline{n|}}$，$A_{\overset{1}{\overline{xyzw}}:\overline{n|}}$ 等の算式が与えられ、それらの間に類似の関係ができる。

§5　最終生存者連生保険および最終生存者連生年金

本節では、本章§1の（4）以下で述べたような場合、すなわち連合生命のうちの誰か1人が生存していることを単生命死亡表における生存に当たるとみる場合の保険および年金を取りあげる。これらは**最終生存者連生保険**および**最終生存者連生年金**と言われる。この時は前節で用いた ${}_tp_{xy}$ を ${}_tp_{\overline{xy}}$ で、また ${}_{t|}q_{xy}$ を ${}_{t|}q_{\overline{xy}}$ で置き換えてたいていの結果が得られるが、次に2生命から始めて重要と思われるものを挙げておく。

（1）　**最終生存者連生生存保険**の一時払保険料は

$$A_{\overline{xy}:\overset{1}{\overline{n|}}} = v^n\,{}_np_{\overline{xy}} \tag{12.5.1}$$

（2）　**最終生存者連生有期年金**の現価は、期末払のとき

$$a_{\overline{xy}:\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} v^t\,{}_tp_{\overline{xy}} \tag{12.5.2}$$

である。${}_tp_{\overline{xy}}$ に（12.1.10）を用いると

$$a_{\overline{xy}:\overline{n|}} = a_{x:\overline{n|}} + a_{y:\overline{n|}} - a_{xy:\overline{n|}} \tag{12.5.3}$$

となる。期始払年金であれば

$$\ddot{a}_{\overline{xy}:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t\,{}_tp_{\overline{xy}} \tag{12.5.4}$$

$$= \ddot{a}_{x:\overline{n|}} + \ddot{a}_{y:\overline{n|}} - \ddot{a}_{xy:\overline{n|}} \tag{12.5.5}$$

である。(12.5.3) あるいは (12.5.5) の関係は分割払年金や連続年金でも成立する。また (12.4.4) ～ (12.4.7) に類似の式もできる。(右辺で ${}_tp_{xy}$ 等を ${}_tp_{\overline{xy}}$ 等に置き換える)

（3）　**最終生存者連生定期保険**、すなわち2生命のうちの最終生存者が死亡した場合に保険金を支払う定期保険では、保険金年末支払のとき

の一時払保険料は

$$A_{\overset{1}{\overline{xy}}:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\ {}_{t|}q_{\overline{xy}} \tag{12.5.6}$$

となるが、${}_{t|}q_{\overline{xy}}$ に（12.1.15）を用いると

$$A_{\overset{1}{\overline{xy}}:\overline{n|}} = A_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} + A_{\overset{1}{y}:\overline{n|}} - A_{\overset{1}{xy}:\overline{n|}} \tag{12.5.7}$$

となる。保険金分割支払については

$$A^{(k)}_{\overset{1}{\overline{xy}}:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{nk-1} v^{\frac{t+1}{k}} \left({}_{\frac{t}{k}}p_{\overline{xy}} - {}_{\frac{t+1}{k}}p_{\overline{xy}} \right)$$

であるから、（12.1.10）を用いて（12.5.7）と同じような関係が証明でき、またそこで $k = \infty$ とすれば保険金即時支払の $\bar{A}_{\overset{1}{\overline{xy}}:\overline{n|}}$ についても同じような関係が証明できる。さらに（12.4.9），（12.4.10）の類似も可能であり

$$A_{\overset{1}{\overline{xy}}:\overline{n|}} = v\,\ddot{a}_{\overline{xy}:\overline{n|}} - a_{\overline{xy}:\overline{n|}} \tag{12.5.8}$$

$$= 1 - d\,\ddot{a}_{\overline{xy}:\overline{n|}} - v^{n}\,{}_{n}p_{\overline{xy}} \tag{12.5.9}$$

が証明される。（12.4.12），（12.4.15）の類似式の証明、あるいはまた（12.4.13）のような近似計算も可能である。

（４）　**最終生存者連生養老保険**、すなわち２生命のうちの最終生存者が死亡した場合もしくは満期まで生存した場合に保険金を支払う保険では、保険金年末支払のときの一時払保険料は

$$A_{\overline{xy}:\overline{n|}} = A_{\overset{1}{\overline{xy}}:\overline{n|}} + A_{\overline{xy}:\overset{1}{\overline{n|}}} \tag{12.5.10}$$

$$= 1 - d\,\ddot{a}_{\overline{xy}:\overline{n|}} \tag{12.5.11}$$

となる。さらに（12.4.16）～（12.4.22）に類似した式もできる。また（12.5.11）の右辺に（12.5.5）を用い、（4.9.4）と（12.4.15）を考えると次式が証明される。

$$A_{\overline{xy}:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} + A_{y:\overline{n}|} - A_{xy:\overline{n}|} \tag{12.5.12}$$

（５）　年払保険料については、例えば最終生存者養老保険をとると

$$P_{\overline{xy}:\overline{n}|} = \frac{A_{\overline{xy}:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{\overline{xy}:\overline{n}|}} \tag{12.5.13}$$

$$= P_{\overset{1}{\overline{xy}}:\overline{n}|} + P_{\overline{xy}:\overset{1}{\overline{n}|}} \tag{12.5.14}$$

$$= \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{xy}:\overline{n}|}} - d \tag{12.5.15}$$

となる。保険金即時支払ならば

$$\bar{P}_{\overline{xy}:\overline{n}|} = \frac{\bar{A}_{\overline{xy}:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{\overline{xy}:\overline{n}|}} \tag{12.5.16}$$

（６）　責任準備金については、例えば養老保険の保険料年払、保険金年末支払の場合には、これを三つの場合に分けて積まねばならない。

（a）両者とも生存の場合

$${}_tV_{\overline{xy}:\overline{n}|} = A_{\overline{x+t,y+t}:\overline{n-t}|} - P_{\overline{xy}:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{\overline{x+t,y+t}:\overline{n-t}|} \tag{12.5.17}$$

$$= 1 - \frac{\ddot{a}_{\overline{x+t,y+t}:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{\overline{xy}:\overline{n}|}} \tag{12.5.18}$$

（b）(y) 死亡後で (x) 生存中の場合

$${}_tV = A_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{\overline{xy}:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \tag{12.5.19}$$

（c）(x) 死亡後で (y) 生存中の場合

$${}_tV = A_{y+t:\overline{n-t}|} - P_{\overline{xy}:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{y+t:\overline{n-t}|} \tag{12.5.20}$$

３生命以上の最終生存者に関しても、全く同様に $\ddot{a}_{\overset{1}{\overline{xyz}}:\overline{n}|}$，$A_{\overset{1}{\overline{xyzw}}:\overline{n}|}$ 等の計算式を書くことができ、またそれらの間に２生命の場合と同様の関係が得られる。例えば３生命についての期末払最終生存者連生年金の現

価は

$$a_{\overline{xyz}:\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} v^t \, {}_tp_{\overline{xyz}} \tag{12.5.21}$$

であるが、(12.2.8) の右辺を展開してこれに用いると

$$\begin{aligned} a_{\overline{xyz}:\overline{n|}} &= a_{x:\overline{n|}} + a_{y:\overline{n|}} + a_{z:\overline{n|}} \\ &\quad - a_{xy:\overline{n|}} - a_{yz:\overline{n|}} - a_{xz:\overline{n|}} + a_{xyz:\overline{n|}} \end{aligned} \tag{12.5.22}$$

となる。期始払年金についても同じ関係ができるが、それを用いて (12.5.12) と同じように次式が証明される。

$$\begin{aligned} A_{\overline{xyz}:\overline{n|}} &= A_{x:\overline{n|}} + A_{y:\overline{n|}} + A_{z:\overline{n|}} \\ &\quad - A_{xy:\overline{n|}} - A_{yz:\overline{n|}} - A_{xz:\overline{n|}} + A_{xyz:\overline{n|}} \end{aligned} \tag{12.5.23}$$

次に本章§2の（7）以下で述べた確率を応用する年金および保険について考える。

（7）　(x), (y), (z), ………… (m人) のうちちょうど r 人が生存している場合に限り支払われる期末払年金の現価は、(12.2.11) の生存確率を用いて

$$a^{[r]}_{\overline{xyz\cdots\cdots(m)}:\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} v^t \, {}_tp^{[r]}_{\overline{xyz\cdots\cdots(m)}} \tag{12.5.24}$$

となる。期始払年金 $\ddot{a}$ では右辺の和を $\sum_{t=0}^{n-1}$ とすればよい。　例えば $m=3$, $r=2$ の場合は (12.2.13) を用いて次式が得られる。

$$a^{[2]}_{xyz:\overline{n|}} = a_{xy:\overline{n|}} + a_{xz:\overline{n|}} + a_{yz:\overline{n|}} - 3\,a_{xyz:\overline{n|}} \tag{12.5.25}$$

（8）　m 人の連合生命中少なくとも r 人が生存する限り支払われる期末払年金の現価は、(12.2.14) を用いて

$$a_{\overset{\;\;r}{\overline{xyz\cdots\cdots(m)}}:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t\, {}_tp_{\overset{\;\;r}{\overline{xyz\cdots\cdots(m)}}} \tag{12.5.26}$$

となる。また（12.2.14）の関係から

$$a_{\overset{\;\;r}{\overline{xyz\cdots\cdots(m)}}:\overline{n}|} = \sum_{i=r}^{m} a_{\overset{\;\;[i]}{\overline{xyz\cdots\cdots(m)}}:\overline{n}|} \tag{12.5.27}$$

である。期始払年金 $\ddot{a}$ では（12.5.26）の右辺の和を $\sum_{t=0}^{n-1}$ とすればよい。（12.5.27）は $\ddot{a}$ についても成立する。例えば $m=3$， $r=2$ の場合は（12.2.15）を用いて次式が得られる。

$$a_{\overset{2}{xyz}:\overline{n}|} = a_{xy:\overline{n}|} + a_{xz:\overline{n}|} + a_{yz:\overline{n}|} - 2\,a_{xyz:\overline{n}|} \tag{12.5.28}$$

（９）　m 人の連合生命中第 r 番目の死亡が起こったとき、その保険年度末に保険金１を支払う n 年定期保険の一時払保険料は、(12.2.16)の確率を用いて

$$A_1 = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\left(\,{}_tp_{\overset{m-r+1}{\overline{xyz\cdots\cdots(m)}}} - {}_{t+1}p_{\overset{m-r+1}{\overline{xyz\cdots\cdots(m)}}}\right) \tag{12.5.29}$$

$$= v\,\ddot{a}_{\overset{m-r+1}{\overline{xyz\cdots\cdots(m)}}:\overline{n}|} - a_{\overset{m-r+1}{\overline{xyz\cdots\cdots(m)}}:\overline{n}|} \tag{12.5.30}$$

となる。この式は（12.5.8）と似ていて（12.5.9）のように変形することができる。従って n 年後に第 r 番目の死亡が起こっていない場合にも保険金１を支払うような養老保険の一時払保険料については

$$A_2 = A_1 + v^n\,{}_np_{\overset{m-r+1}{\overline{xyz\cdots\cdots(m)}}} = 1 - d\,\ddot{a}_{\overset{m-r+1}{\overline{xyz\cdots\cdots(m)}}:\overline{n}|} \tag{12.5.31}$$

が成立する。例えば $m=3$， $r=2$ の場合は（12.5.29）の右辺に（12.2.17）を用いて次式が得られる。

$$A_1 = A_{\overset{1}{\widehat{xy}}:\overline{n}|} + A_{\overset{1}{\widehat{xz}}:\overline{n}|} + A_{\overset{1}{\widehat{yz}}:\overline{n}|} - 2\,A_{\overset{1}{\widehat{xyz}}:\overline{n}|} \tag{12.5.32}$$

（１０）　(y)，(z)のどちらかと (x) とが共存する場合に１を支払う期末払年金の現価は、（12.2.18）の生存確率を用いて

$$a_{x,\overline{yz}:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t\,{}_tp_{x,\overline{yz}} \qquad (12.5.33)$$

となる。これに（12.2.19）の関係を用いると

$$a_{x,\overline{yz}:\overline{n}|} = a_{xy:\overline{n}|} + a_{xz:\overline{n}|} - a_{xyz:\overline{n}|} \qquad (12.5.34)$$

が得られる。期始払年金 $\ddot{a}$ では（12.5.33）の右辺の和を $\sum_{t=0}^{n-1}$ とすればよい。$\ddot{a}$ についても（12.5.34）の関係は成立する。

第１２章　　練習問題（２）

（以下の本章の問題では、特に断らない限り保険料は純保険料、責任準備金は純保険料式責任準備金とする）

（１）　第５回全会社表、5.5％ により次の年金現価を計算せよ。

（a）　$a_{30:\overline{10}|}$,　$a_{35:\overline{10}|}$,　$a_{40:\overline{10}|}$,

$a_{30,35:\overline{10}|}$,　$a_{30,40:\overline{10}|}$,　$a_{35,40:\overline{10}|}$,　$a_{35,35:\overline{10}|}$,

$a_{30,35,40:\overline{10}|}$,　$a_{35,35,35:\overline{10}|}$,　$a_{35,35,35,35:\overline{10}|}$

（b）　$a_{\overline{30,35}:\overline{10}|}$,　$a_{\overline{30,40}:\overline{10}|}$,　$a_{\overline{35,40}:\overline{10}|}$,　$a_{\overline{35,35}:\overline{10}|}$,

$a_{\overline{30,35,40}:\overline{10}|}$,　$a_{\overline{35,35,35}:\overline{10}|}$

（c）　$a_{\overset{[2]}{\overline{30,35,40}}:\overline{10}|}$,　$a_{\overset{[2]}{\overline{35,35,35}}:\overline{10}|}$

（d）　$a_{\overset{2}{\overline{30,35,40}}:\overline{10}|}$,　$a_{\overset{2}{\overline{35,35,35}}:\overline{10}|}$

（e）　$a_{30,\overline{35,40}:\overline{10}|}$,　$a_{\overline{30,35},40:\overline{10}|}$,　$a_{35,\overline{35,35}:\overline{10}|}$

（２）

$$\frac{\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} > \frac{\ddot{a}_{y:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}$$

を証明せよ。（第６章§１の定理の応用で、(6.1.9) における第１の不等式を利用する）

（３）　生命表がメーカムの法則に従うときに（12.1.37）によって定めた x , y の均等年齢を w とすれば

$$\ddot{a}_{\overline{xy}} \geq \ddot{a}_{\overline{ww}}$$

であることを証明せよ。（（12.4.31）と見比べよ）

（4） 生命表のすべての年齢について d_x が定数である場合に

$$a_{\overline{xyz\cdots\cdots(m)}:\overline{n|}} = a_{\overline{u,u,u,\cdots\cdots(m)}:\overline{n|}}$$

となるような年齢 u を定めるにはどうすればよいか。（（2.7.1）参照）

（5） 2歳の息子と35歳の父とを被保険者とする保険料年払の保険がある。息子が22歳に到達すれば生存保険金1を支払い、それ以前に死亡すれば死亡した年度末に既払込保険料を利息を付けずに返還する。保険料は息子と父の共存期間中払込まれ、息子が死亡すれば保険契約は消滅し、父が死亡すれば以後の保険料の払込が免除される。この保険の年払保険料および5年後の責任準備金を表わす式を書け。ただし純保険料 P に対し営業保険料は $P^* = P(1+0.01)+0.002$ とする。

（6） 2歳の息子と35歳の父とを被保険者とする保険料年払の息子の終身保険がある。息子が22歳到達後に死亡すれば死亡保険金1を死亡した年度末に支払い、22歳以前に死亡すれば既払込保険料を死亡した年度末に返還する。息子が22歳になるまでに父が死亡すれば以後の保険料の払込が免除されるが、息子が25歳に到達すれば息子の負担で再び払込が開始され息子の終身継続する。この保険の年払保険料および10年経過後の責任準備金を表わす式を書け。

（7） 次の年金現価を連生年金現価の項で表わせ。

（a） $a_{xy,\overline{zw}:\overline{n|}}$　　（b） $a_{x,\overline{yzw}:\overline{n|}}$　　（c） $a_{\overline{xy},\overline{zw}:\overline{n|}}$

（8） (y) が (x) と共存中、および (y) の死亡後も g 年間は (x) が生存している限り支払われる期末払年金の現価を求めよ。

（９）　前問において年金が契約からn年後（$n > g$）の年金を最後に打ち切られる場合には、年金現価はどうなるか。

（１０）　(y), (z)の最終生存者と(x)とが共存中、および最終生存者の死亡後もg年間は(x)が生存している限り支払われる期末払年金の現価を求めよ。

（１１）　30歳の夫の60歳開始10年保証期間付終身年金にさらに次の年金を付加した。すなわち25歳の妻がいて、夫の60歳到達時に生存していれば、夫の死後10年間はその生存中遺族年金を受けることができる。この年金の現価を求めよ。ただし妻には夫とは別の生命表を用いるものとする。

（１２）　(x)または(y)がある年齢z歳（$z > y \geqq x$）に達するまで支払われ、z歳になる以前に最終生存者が死亡すれば以後は支払われないような年金の現価を求めよ。

（１３）　(x)および(y)のいずれかがz歳（$z > y \geqq x$）に到達すれば年金を開始し、以後どちらかがz歳以上で生存する限り支払われる年金の現価を求めよ。

（１４）　年金年額１、半年毎期末払の年金が、(35)と(40)の最終生存者の死亡まで、もしくは最終生存者が50歳に達するまで支払われる。この年金の現価を 第５回全会社表、5.5％ によって計算せよ。

（１５） (40), (45), (50)の３人のうち少なくとも１人が60歳以上で生存している限り支払われるが、３人中誰かが55歳未満で生存していれば支払われないような年金の現価を求めよ。

（１６） (x) が $x+m$ 歳に達するまでに死亡するか、(y) が $y+n$ 歳に達するまでに死亡するか、そのどちらかが最初に起こった時に保険金１を支払う定期保険の一時払保険料および年払保険料を求めよ。

（１７） (x) が $x+m$ 歳に達するまでに死亡し、また (y) が $y+n$ 歳に達するまでに死亡した場合に、第２の死亡が発生した保険年度末に保険金１を支払う定期保険の一時払保険料および年払保険料を求めよ。

（１８） (30), (35), (40)の３生命中第２番目の死亡が起こった場合に保険金１を支払い、11年後に少なくとも２人が生存している場合にも保険金１を支払うような保険の一時払保険料を 第５回全会社表、5.5％によって計算せよ。（問題１の計算結果を利用する）

（１９） 保険期間を限定せずに (x)，(y)，(z)，(w) の４人中第２死亡が発生した保険年度の年末に保険金１を支払うこととする。また保険料は年払とし、保険金が支払われる年度の分まで払込まれる。この契約の年払保険料を連生共存年金の項で表わす式を書け。

（２０） ４人の(40)のうち少なくとも３人が生存している間、ただし第１死亡後10年を限度として支払われる年金の現価を求めよ。

§6　遺族年金、復帰年金

夫の死亡を条件に妻に与えられる年金を**寡婦年金**といい、親の死亡を条件に遺児に与えられる年金を**遺児年金**という。これらを総称して**遺族年金**というが、本節ではそれらの計算を取り扱う。

これらの年金では夫または親の死亡時から妻または子に対し所定の年金が支払われるが、年金開始時点における将来支払年金の現価を保険金とみて契約時点における一時払保険料（遺族年金の現価）を計算することができる。(x), (y) のうち (x) が死亡した年度の年度末から始めて毎年度末に (y) の生存する限り金額１の年金を支給し、年金は第 n 年度末を最終として以後打ち切る場合、その年金現価を $a_{x|y:\overline{n}|}$ で表わすが、本章§１の（８）の確率を用いると

$$
\begin{aligned}
a_{x|y:\overline{n}|} &= q_x p_y v \ddot{a}_{y+1:\overline{n}|} + {}_{1|}q_x\, {}_2p_y v^2 \ddot{a}_{y+2:\overline{n-1}|} + {}_{2|}q_x\, {}_3p_y v^3 \ddot{a}_{y+3:\overline{n-2}|} \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots + {}_{n-1|}q_x\, {}_np_y v^n \ddot{a}_{y+n:\overline{1}|} \qquad (12.6.1) \\
&= q_x(p_y v)(1 + p_{y+1} v + \cdots\cdots\cdots + {}_{n-1}p_{y+1} v^{n-1}) \\
&\quad + {}_{1|}q_x({}_2p_y v^2)(1 + p_{y+2} v + \cdots\cdots\cdots + {}_{n-2}p_{y+2} v^{n-2}) \\
&\quad + {}_{2|}q_x({}_3p_y v^3)(1 + p_{y+3} v + \cdots\cdots\cdots + {}_{n-3}p_{y+3} v^{n-3}) \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots \\
&\quad + {}_{n-1|}q_x({}_np_y v^n) \\
&= (p_y v) q_x + ({}_2p_y v^2)(q_x + {}_{1|}q_x) + ({}_3p_y v^3)(q_x + {}_{1|}q_x + {}_{2|}q_x) \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots + ({}_np_y v^n)(q_x + {}_{1|}q_x + \cdots\cdots\cdots + {}_{n-1|}q_x) \\
&= \sum_{t=1}^{n} {}_tp_y v^t\, {}_tq_x = \sum_{t=1}^{n} v^t (1 - {}_tp_x)\, {}_tp_y \qquad (12.6.2)
\end{aligned}
$$

となる。(12.6.2) は次のように解釈してこれを導くことができる。すなわち年金支払時点の一つ一つについて、その時点における支払条件が

満足されている状態にある確率を求め、それにその時点で支払われる年金の現価v^tを掛けたものを合計したものが（12.6.2）である。本節で述べる復帰年金の式をつくる時はこのような考え方をして直接導く方が容易である。(12.6.2）の右辺を$\sum - \sum$の形にすると

$$a_{x|y:\overline{n|}} = a_{y:\overline{n|}} - a_{xy:\overline{n|}} \tag{12.6.3}$$

が得られるが、右辺は(y)の生存中支払う年金から(x)，(y)の共存中支払う年金を引いたものであり、それが(x)の死亡後(y)の生存中支払う年金に等しいことをこの式は示している。実際の計算では（12.6.3）が便利である。(y)に終身年金が支給される時は$n \to \infty$として、次の式ができる。

$$a_{x|y} = a_y - a_{xy} \tag{12.6.4}$$

またこの場合に年金を年k回払とし、(x)が死亡した次の年金支払時期から(y)の生存する限り毎回$\dfrac{1}{k}$の年金を支払い、n年後で支払を打ち切るとした場合の年金現価は

$$a^{(k)}_{x|y:\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{nk} \left({}_{\frac{t-1}{k}}p_x - {}_{\frac{t}{k}}p_x \right) {}_{\frac{t}{k}}p_y \, v^{\frac{t}{k}} \, \ddot{a}_{y+\frac{t}{k}:\overline{n-\frac{t-1}{k}|}} \tag{12.6.5}$$

であるが、これを（12.6.1）の場合と同様に変形するか、あるいは直接に（12.6.2）のように考えると

$$a^{(k)}_{x|y:\overline{n|}} = a^{(k)}_{y:\overline{n|}} - a^{(k)}_{xy:\overline{n|}} \tag{12.6.6}$$

が得られる。ここで$k \to \infty$とすれば次の式となる。

$$\bar{a}_{x|y:\overline{n|}} = \bar{a}_{y:\overline{n|}} - \bar{a}_{xy:\overline{n|}} \tag{12.6.7}$$

（12.6.1）ないし（12.6.4）で、単独のxあるいはyの代わりに共存のxyまたは最終生存の$\overline{xy}$を入れても類似の式を導くことができる。それら、あるいはさらに条件を若干付加したり変更したりした年金は、適用範囲が遺族年金よりも広範になり、一般に（遺族年金も含めて）

復帰年金と呼ばれる。次にそのいくつかの例を示そう。

（1）　(y) の代わりに (y) と (z) の共存を用いる場合、すなわち (x) が死亡した年度の年度末から開始し、(y) と (z) が共存する限り、ただし第 n 年度末まで毎年1を支払う年金の現価は、(12.6.1) と同様に

$$a_{x|yz:\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q_x \, v^t \, {}_tp_{yz} \, \ddot{a}_{y+t,\, z+t:\overline{n-t+1|}} \tag{12.6.8}$$

で与えられるが、同じような変形で

$$a_{x|yz:\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} v^t \, {}_tq_x \, {}_tp_{yz} = \sum_{t=1}^{n} v^t (1 - {}_tp_x) \, {}_tp_{yz} \tag{12.6.9}$$

となり、これより次式が成立する。

$$a_{x|yz:\overline{n|}} = a_{yz:\overline{n|}} - a_{xyz:\overline{n|}} \tag{12.6.10}$$

年 k 回払の年金では a の代わりに $a^{(k)}$ として、また連続支払の年金では $\bar{a}$ として、(12.6.10) と類似の式が成立する。(今後この注意は一々断らない)

（2）　(x) の代わりに (x) と (y) の共存を用い、年金受給者を (z) とする場合、すなわち (x) と (y) が共存でなくなった時（どちらかが死亡した時）に、その年度末から (z) の年金を開始する場合には、年金現価は (12.1.6) の ${}_{t|}q_{xy}$ を用いて

$$a_{xy|z:\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q_{xy} \, v^t \, {}_tp_z \, \ddot{a}_{z+t:\overline{n-t+1|}} \tag{12.6.11}$$

で与えられる。(12.1.7) の関係を用いて (12.6.1) と同じような変形を行うと

$$a_{xy|z:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t {}_tq_{xy}\, {}_tp_z = \sum_{t=1}^{n} v^t (1 - {}_tp_{xy})\, {}_tp_z \qquad (12.6.12)$$

となり、これより次式が成立する。

$$a_{xy|z:\overline{n}|} = a_{z:\overline{n}|} - a_{xyz:\overline{n}|} \qquad (12.6.13)$$

（3）　(y)の代わりに (y)と (z)の最終生存を用いる場合、すなわち (x)が死亡した年度の年度末から開始し、(y)と (z)のどちらかが生存する限り支払う年金の現価は

$$a_{x|\overline{yz}:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q_x\, v^t \left[{}_tp_y\, {}_tq_z\, \ddot{a}_{y+t:\overline{n-t+1}|} \right.$$

$$\left. + {}_tq_y\, {}_tp_z\, \ddot{a}_{z+t:\overline{n-t+1}|} + {}_tp_y\, {}_tp_z\, \ddot{a}_{\overline{y+t,z+t},\overline{n-t+1}|} \right] \qquad (12.6.14)$$

で与えられるが、これに関しては

$$a_{x|\overline{yz}:\overline{n}|} = a_{\overline{yz}:\overline{n}|} - a_{x,\overline{yz}:\overline{n}|} \qquad (12.6.15)$$

が成立する。なぜなら（12.6.14）の右辺〔　　　〕内の第3項の $\ddot{a}$ は（12.5.5）により

$$\ddot{a}_{y+t:\overline{n-t+1}|} + \ddot{a}_{z+t:\overline{n-t+1}|} - \ddot{a}_{y+t,z+t:\overline{n-t+1}|}$$

に等しいから、これを（12.6.14）の〔　　　〕の中に入れると

$$a_{x|\overline{yz}:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q_x\, v^t \left[{}_tp_y\, \ddot{a}_{y+t:\overline{n-t+1}|} \right.$$

$$\left. + {}_tp_z\, \ddot{a}_{z+t:\overline{n-t+1}|} - {}_tp_{yz}\, \ddot{a}_{y+t,z+t:\overline{n-t+1}|} \right]$$

となる。括弧をほどくと（12.6.1），（12.6.8）より

$$a_{x|\overline{yz}:\overline{n}|} = a_{x|y:\overline{n}|} + a_{x|z:\overline{n}|} - a_{x|yz:\overline{n}|} \qquad (12.6.16)$$

が得られる。この右辺に既に得た（12.6.3）と（12.6.10）を入れると

$$a_{x|\overline{yz}:\overline{n}|} = (a_{y:\overline{n}|} + a_{z:\overline{n}|} - a_{yz:\overline{n}|}) - (a_{xy:\overline{n}|} + a_{xz:\overline{n}|} - a_{xyz:\overline{n}|})$$

となるが、右辺の第1項は（12.5.3）により $a_{\overline{yz}:\overline{n}|}$ に等しく、第2項は

(12.5.34) により $a_{x,\overline{yz}:\overline{n}|}$ に等しいから、これで (12.6.15) が証明された。あるいは (12.6.2) のような考え方で式をつくると

$$a_{x|\overline{yz}:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t (1 - {}_tp_x)\, {}_tp_{\overline{yz}} \qquad (12.6.17)$$

となるが、右辺を $\sum - \sum$ の形に書くと、(12.5.2) と (12.5.33) とから (12.6.15) が得られる。

（4）　(x) の代わりに (x) と (y) の最終生存を用い、年金受給者を (z) とする場合、すなわち (x) と (y) の最終生存者が死亡した年度の年度末から (z) の年金を開始する場合の復帰年金の現価は、(12.1.14) の ${}_{t|}q_{\overline{xy}}$ を用いて

$$a_{\overline{xy}|z:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q_{\overline{xy}}\ v^t\, {}_tp_z\, \ddot{a}_{z+t:\overline{n-t+1}|} \qquad (12.6.18)$$

で与えられる。(12.1.16) の関係を用い、(12.6.1)と同じような変形を行うと

$$a_{\overline{xy}|z:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t\, {}_tq_{\overline{xy}}\, {}_tp_z = \sum_{t=1}^{n} v^t (1 - {}_tp_{\overline{xy}})\, {}_tp_z \qquad (12.6.19)$$

となり、これより次式が成立する。

$$a_{\overline{xy}|z:\overline{n}|} = a_{z:\overline{n}|} - a_{\overline{xy},z:\overline{n}|} \qquad (12.6.20)$$

（1）～（4）の結果から分かるように、被保険者が何人でも一般に

$$a_{X|Y:\overline{n}|} = a_{Y:\overline{n}|} - a_{XY:\overline{n}|} \qquad (12.6.21)$$

であり、X としては $xyz\cdots\cdots\cdots\cdots$ または $\overline{xyz\cdots\cdots\cdots}$ を、Y としては $abc\cdots\cdots\cdots\cdots$ または $\overline{abc\cdots\cdots\cdots}$ を用いることができる。

復帰年金について、保険料を年払とし、年度末に年金の支給が開始さ

れる年度まで払込ませる場合には、 (x), (y), (z) の死亡順序を考え、どの順序の時に給付が開始されるか、あるいは開始前に契約が消滅するかを考えて、そこまで保険料を収入するようにすればよい。年金額１に対する年払保険料は例えば次のようになる。

$$\frac{a_{x|y:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}}, \qquad \frac{a_{x|yz:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{xyz:\overline{n}|}}, \qquad \frac{a_{x|\overline{yz}:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x,\overline{yz}:\overline{n}|}}$$

最後に、基本的な復帰年金（12.6.1）の二つの変形を考えておこう。

（５）　$m < n$ とし、契約から m 年以内に (x) が死亡した時はその年度末から、また m 年後に (x) が生存している時にはその時から、毎年 (y) に年額１の年金を与え、かつその年金は第 n 年度末までで打ち切る場合の年金現価 $a_{x:\overline{m}|\,|y:\overline{n}|}$ を求めてみよう。

（12.6.2）の考え方をとると、$m-1$ 年度末までの各年金が支払われる条件は、それぞれの支払時点までに (x) が死亡し、かつ (y) がその時点で生存していることであり、また第 m 年度末以降は (x) の生死に関係なく (y) が生存していることであるから

$$\begin{aligned} a_{x:\overline{m}|\,|y:\overline{n}|} &= \sum_{t=1}^{m-1} v^t (1 - {}_tp_x)\, {}_tp_y + \sum_{t=m}^{n} v^t\, {}_tp_y \\ &= \sum_{t=1}^{n} v^t\, {}_tp_y - \sum_{t=1}^{m-1} v^t\, {}_tp_{xy} \\ &= a_{y:\overline{n}|} - a_{xy:\overline{m-1}|} \end{aligned} \tag{12.6.22}$$

となる。年払保険料はこれを $\ddot{a}_{xy:\overline{m}|}$ で割る。

（６）　復帰年金の実際問題では、(x) の死亡した年度末を待たずに、(x) の死亡時に (y) が生存していれば、その時点から直ちに年金を開始

するものがある。即時開始の復帰年金は記号 $\hat{a}_{x|y}$ を用いて表わす。今 (y) に対する年金を第 n 年度の年金まで与えるとし、また (x) の死亡は平均して年度の中央で起こるとすると、(12.6.1) の代わりに

$$\hat{a}_{x|y:\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q^{\,1}_{xy}\, v^{t-\frac{1}{2}}\, \ddot{a}_{y+t-\frac{1}{2}:\overline{n-t+1|}} \tag{12.6.23}$$

が得られる。あるいは (12.3.4) を用いると

$$\hat{a}_{x|y:\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q_{x}\ {}_{t-\frac{1}{2}}p_{y}\, v^{t-\frac{1}{2}}\ \ddot{a}_{y+t-\frac{1}{2}:\overline{n-t+1|}} \tag{12.6.24}$$

となる。ただし計算の際は

$$\ddot{a}_{y+t-\frac{1}{2}:\overline{n-t+1|}} = \frac{\ddot{a}_{y+t-1:\overline{n-t+1|}} + \ddot{a}_{y+t:\overline{n-t+1|}}}{2}$$

とする。（本章 練習問題（４）の（２１）～（２３）も参照のこと）

§7　条件付連生年金

例えば $a_{xy|z:\overline{n|}}$ や $a_{\overline{xy}|z:\overline{n|}}$ の場合には (x) と (y) の共存あるいは最終生存者を問題としていたが、これに対し例えば (x) が最初に死亡した時から年金開始とか、(y) が2番目に死亡した時から年金開始というように、死亡の順序を問題とした場合それらを**条件付連生年金**という。この場合には本章§3で述べた条件付生命確率が使用される。次に基本的な二つの例をあげておこう。

（１）　(x) が (y) に先立って死亡した年度末から (z) の生存する限り、ただし契約から第 n 年度末まで毎年1を支払う年金の現価は $a_{\overset{1}{x}y|z:\overline{n|}}$ と書く。 x の上につけた数字は彼の死亡により年金支給が開始されることを表わしている。(12.3.1) の ${}_{t|}q^{\,1}_{xy}$ を用いると

$$a_{\overset{1}{x}y|z:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q_{\overset{1}{x}y}\, v^t\, {}_tp_z\, \ddot{a}_{z+t:\overline{n-t+1}|} \qquad (12.7.1)$$

となる。(12.6.2) を証明したのと同じ手順を踏み、(12.3.5) の関係を利用すると

$$a_{\overset{1}{x}y|z:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t\, {}_tq_{\overset{1}{x}y}\, {}_tp_z \qquad (12.7.2)$$

となる。(12.6.2) を直接考えたように、それぞれの年金支払時点に注目して、そこで支払条件を満たす確率を考えても、この式の右辺を書くことができる。この年金を実際に計算するには、(12.3.4) により ${}_{t|}q_{\overset{1}{x}y}$ を、ついで (12.3.5) により ${}_tq_{\overset{1}{x}y}$ を計算して、右辺に入れるのが最も簡単である。

なお (12.3.3) の関係を (12.6.11) に入れれば、次式が得られる。

$$a_{xy|z:\overline{n}|} = a_{\overset{1}{x}y|z:\overline{n}|} + a_{x\overset{1}{y}|z:\overline{n}|} \qquad (12.7.3)$$

(2)　(y) が (x) に先立って死亡した時に (x) の死亡年度末から (z) の年金を開始する場合の年金現価は (12.3.16) の ${}_{t|}q_{\overset{2}{x}y}$ を用い

$$a_{\overset{2}{x}y|z:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q_{\overset{2}{x}y}\, v^t\, {}_tp_z\, \ddot{a}_{z+t:\overline{n-t+1}|} \qquad (12.7.4)$$

となる。(12.6.2) を証明したのと同じ手順を踏み、(12.3.18) の関係を利用すると

$$a_{\overset{2}{x}y|z:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t\, {}_tq_{\overset{2}{x}y}\, {}_tp_z \qquad (12.7.5)$$

となる。さらに (12.3.17) の関係を (12.7.4) に用いると次式が得られる。

$$a_{\overset{1}{x}y|z:\overline{n}|} + a_{\overset{2}{x}y|z:\overline{n}|} = a_{x|z:\overline{n}|} \qquad (12.7.6)$$

今 $a_{\overset{1}{x}y|z:\overline{n|}}$ と $a_{x\overset{2}{y}|z:\overline{n|}}$ とを比較すると、どちらも (x) が (y) より早く死ぬことを条件とするが、年金開始の時点が異なり、前者では (x) の死亡後、後者では (y) の死亡後となっている。両者の差は（12.7.6）と（12.7.3）を用いると

$$a_{\overset{1}{x}y|z:\overline{n|}} - a_{x\overset{2}{y}|z:\overline{n|}} = a_{\overset{1}{x}y|z:\overline{n|}} - \left(a_{y|z:\overline{n|}} - a_{x\overset{1}{y}|z:\overline{n|}} \right)$$

$$= a_{xy|z:\overline{n|}} - a_{y|z:\overline{n|}} \qquad (12.7.7)$$

となる。さらに（12.6.13）と（12.6.3）を用いると

$$a_{\overset{1}{x}y|z:\overline{n|}} - a_{x\overset{2}{y}|z:\overline{n|}} = a_{yz:\overline{n|}} - a_{xyz:\overline{n|}}$$

が得られるが、これは（12.6.10）の右辺であるから、次のような関係も成立する。

$$a_{\overset{1}{x}y|z:\overline{n|}} - a_{x\overset{2}{y}|z:\overline{n|}} = a_{x|yz:\overline{n|}} \qquad (12.7.8)$$

条件付連生年金について、年払保険料を、年度末に給付が開始される年度の分まで払込ませる場合には、復帰年金の場合と同じく、死亡順序と給付の開始、契約の消滅との関係を考えて、いつまで払込めばよいかを定めればよい。年金額 1 に対する年払保険料は次のようになる。

$$\frac{a_{\overset{1}{x}y|z:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{xyz:\overline{n|}}}, \qquad \frac{a_{\overset{2}{x}y|z:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{xz:\overline{n|}}}$$

また条件付連生年金についても、年金開始を年度末とせず、与えられた条件の発生した時点からとすることがある。その時の計算式は（12.6.23),（12.6.24）に準ずればよい。例えば（12.7.1）の場合であれば次のようになる。

$$\hat{a}_{\overset{1}{x}y|z:\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q_{\overset{1}{x}y}\, v^{t-\frac{1}{2}}\, {}_{t-\frac{1}{2}}p_z\, \ddot{a}_{z+t-\frac{1}{2}:\overline{n-t+1|}} \qquad (12.7.9)$$

第１２章　練習問題（３）

（１）　第5回全会社表，5.5％により次の年金現価を計算せよ。（本章練習問題（２）の（１）の結果を利用する）

（a）　$a_{35|30:\overline{10|}}$，　$a_{40|30:\overline{10|}}$，　$a_{35|35:\overline{10|}}$

（b）　$a_{40|30,35:\overline{10|}}$，　$a_{35|35,35:\overline{10|}}$

（c）　$a_{35,40|30:\overline{10|}}$，　$a_{35,35|35:\overline{10|}}$

（d）　$a_{40|\overline{30,35}:\overline{10|}}$，　$a_{35|\overline{35,35}:\overline{10|}}$

（e）　$a_{\overline{35,40}|30:\overline{10|}}$，　$a_{\overline{35,35}|35,\overline{10|}}$

（f）　$a_{35,35,35|35:\overline{10|}}$，　$a_{35,35|35,35:\overline{10|}}$，　$a_{35|35,35,35:\overline{10|}}$

（２）（12.6.21）に基づいて

$a_{xy|zw:\overline{n|}}$，　$a_{\overline{xy}|zw:\overline{n|}}$，　$a_{xy|\overline{zw}:\overline{n|}}$，　$a_{\overline{xy}|\overline{zw}:\overline{n|}}$

を変形した後、$n=10$，　$x=y=z=w=35$　とした時の各年金の現価を計算せよ。（本章 練習問題（２）の（１）と（７）、および前問の結果を利用する）

（３）　（a）　夫婦年金があり

① 保険料はm年を限度として夫(x)の生存中払込まれる。

② m年経過後に(x)が生存していれば、その生存中毎年始に年額１の年金が支払われる。

③ (x)の死亡時に妻(y)が生存していれば、その保険年度末から年額$\dfrac{1}{2}$の妻の終身年金が開始される。

このような年金の年金年額１に対する年払保険料を求めよ。

（b）　予定事業費として年金年額1に対し、新契約費が 0.3，払込中の維持費が 0.03，年金開始後の維持費が 0.01，集金経費が営業保険料の3％ である時の営業保険料を求めよ。

（c）　上記の③の条件を変更し、(x) に対する年金が年4回払であり、かつ (x) に対する年金の開始後に (x) が死亡した時に (y) が生存している場合に限り (y) に対する年金が開始されるとすればどうなるか。

（4）　3人の被保険者 (x)，(y)，(z) に対し毎年度末に年金を支払うが、3人が共存中は各人に $\frac{1}{3}$ ずつを支払い、うち1人が死亡すれば残りの2人に $\frac{1}{2}$ ずつを支払い、2人が死亡すれば最後の1人に1を終身支払うことにした。その時 (x)，(y)，(z) のそれぞれが負担すべき一時払保険料（受け取る年金の期待値）はいくらか。それを連生年金の項で表わせ。

また3人の一時払保険料の合計額が、年金額1の最終生存者連生年金の一時払保険料に一致することを確かめよ。

（5）　(x)，(y)，(z) の3生命に対し、3人とも生存する間は毎年100万円を年度末に、第1死亡後はその年度末から毎年80万円を、また第2死亡後はその年度末から毎年60万円を最終生存者の死亡まで支払う。

この年金の現価を求めよ。

（6）　2歳の息子と35歳の父とを被保険者とする保険料年払の子供保険があり

①　息子が22歳に到達すれば満期保険金1を支払う。

②　息子が第 t 年度に死亡すれば、死亡給付金 $\frac{t}{20}$ を直ちに支払い

契約は消滅する。

③ 父が満期までに死亡すれば、以後の保険料を免除するとともに、以後契約応当日ごとに満期保険金の1割を息子が生存するかぎり満期の1年前まで支払う。

この保険の年払保険料を定め、また t 年経過後の責任準備金を表わす式を書け。

（7） 夫 (x) と妻 (y) とを被保険者とする終身保険があり、

① 夫が妻より先に死亡した場合には、保険金1を直ちに支払うとともに、以後は保険料の払込を免除し、また毎年の契約応当日に0.1 の金額の年金を妻が生存するかぎり与え、かつ妻の死亡時には保険金 $\dfrac{1}{4}$ を直ちに支払う。

② 妻が夫より先に死亡した場合には、保険金 $\dfrac{1}{4}$ を直ちに支払うとともに、以後の保険は夫に関する通常の終身保険に変更される。

この場合の (x), (y) 共存中の年払純保険料を求めよ。

また事業費として、夫の保険金を基準に $\alpha, \beta, \gamma, \gamma'$（第7章§1参照）が予定される時の年払営業保険料を求めよ。

（8） 復帰年金があり、(x) が死亡すれば (y) に終身年金を与えるが、(x) の死亡が契約から7年間発生しなければ年金額は $\dfrac{1}{2}$ に減額され、10年間発生しなければ $\dfrac{1}{3}$ に減額される。年金現価を求めよ。

（9） m 年内に (x) が死亡すればその保険年度末から、また m 年後に (x) が生存していればその時から、(y) の生存するかぎり、ただし g 年の保証期間付で支払われる年金の現価を求めよ。

（１０）　(x) および (y) のいずれかが死亡した年度末から年金を開始し、年金は20年の確定期間か、最終生存者の死亡後10年間かのいずれか長い方を支給する場合、その年金の現価を求めよ。

（１１）　50歳のＡが現在から20年間は年額100万円、それ以後は年額200万円の永久年金を終身受給する権利を持っている。また35歳のＢと25歳のＣは、Ａの死亡後順次にこの永久年金を継承して終身受給する権利を与えられている。Ｃの持つ権利の現価はいくらか。

（１２）　復帰年金が年払保険料 $\dfrac{a_{x|y}}{\ddot{a}_{xy}}$ で成立した。その時 (x)，(y) が共存中の t 年後の責任準備金 ${}_tV\,(\,a_{x|y}\,)$ は

$$\frac{\ddot{a}_{y+t}}{\ddot{a}_y} < \frac{\ddot{a}_{x+t\,,\,y+t}}{\ddot{a}_{xy}}$$

であれば、負となることを証明せよ。

（１３）　近似式（4.4.4）およびそれを（12.4.5）のように拡大した式を用いて、(12.6.6) の右辺を変形して $a^{(k)}_{x|y:\overline{n}|}$ を近似する式を書き、さらにその式から次の式を導け。

$$a^{(k)}_{x|y} \fallingdotseq a_y - a_{xy} + \frac{k^2-1}{12k^2}\,\mu_x$$

$$\bar{a}_{x|y} \fallingdotseq a_y - a_{xy} + \frac{1}{12}\,\mu_x$$

（１４）　(u) の死亡後 (x)，(y)，(z)，(w) のうちの少なくとも３人が生存する限り支払われる復帰年金の現価を求めよ。

（１５） 次の各式の左辺の年金に対し（12.7.1）および（12.7.2）に当たる計算式を書き、かつ右辺に等しくなることを証明せよ。

(a) $a_{\overset{1}{x}yz|w:\overline{n}|} + a_{x\overset{1}{y}z|w:\overline{n}|} + a_{xy\overset{1}{z}|w:\overline{n}|} = a_{xyz|w:\overline{n}|}$

(b) $a_{\overset{1}{x}y|zw:\overline{n}|} + a_{x\overset{1}{y}|zw:\overline{n}|} = a_{xy|zw:\overline{n}|}$

(c) $a_{\overset{1}{x}y|\overline{zw}:\overline{n}|} = a_{\overset{1}{x}y|z:\overline{n}|} + a_{\overset{1}{x}y|w:\overline{n}|} - a_{\overset{1}{x}y|zw:\overline{n}|}$

(d) $a_{\overset{2}{x}y|zw:\overline{n}|} = a_{x|zw:\overline{n}|} - a_{\overset{1}{x}y|zw:\overline{n}|}$

(e) $a_{\overset{2}{x}y|\overline{zw}:\overline{n}|} = a_{\overset{2}{x}y|z:\overline{n}|} + a_{\overset{2}{x}y|w:\overline{n}|} - a_{\overset{2}{x}y|zw:\overline{n}|}$

(f) $a_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z|w:\overline{n}|} = a_{\overset{1}{y}z|w:\overline{n}|} - a_{x\overset{1}{y}z|w:\overline{n}|}$

(g) $a_{\underset{1}{x}\underset{2}{y}\overset{3}{z}|w:\overline{n}|} = a_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z|w:\overline{n}|} - a_{x\overset{2}{y}|zw:\overline{n}|}$

(h) $a_{\underset{1}{x}\overset{2:3}{y}z|w:\overline{n}|} = a_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z|w:\overline{n}|} + a_{\underset{1}{x}\overset{3}{y}\underset{2}{z}|w:\overline{n}|}$

（１６） 第５回全会社表、5.5% により次の年金の現価を計算せよ。（問題（１）と（２）の結果および前問を利用する）

$a_{\overset{1}{35},35|35:\overline{10}|}$ ， $a_{\overset{2}{35},35|35:\overline{10}|}$ ， $a_{\overset{1}{35},35,35|35:\overline{10}|}$

$a_{\overset{1}{35},35|35,35:\overline{10}|}$ ， $a_{\overset{1}{35},35|\overline{35,35}:\overline{10}|}$

$a_{\overset{2}{35},35|35,35:\overline{10}|}$ ， $a_{\overset{2}{35},35|\overline{35,35}:\overline{10}|}$

$a_{\underset{1}{35},\overset{2}{35},35|35:\overline{10}|}$ ， $a_{\underset{1}{35},\underset{2}{35},\overset{3}{35}|35:\overline{10}|}$ ， $a_{\underset{1}{35},\overset{2:3}{35},35|35:\overline{10}|}$

（１７） 次の各式の左辺の年金の現価を（12.7.2）のような和の形で表わして、右辺に等しいことを証明せよ。

(a) $a_{\overset{1}{\widehat{xy}},z|w:\overline{n}|} = a_{\overset{1}{x}yz|w:\overline{n}|} + a_{x\overset{1}{y}z|w:\overline{n}|}$

(b) $a_{\overset{1}{\overline{xy}},z|w:\overline{n}|} = a_{x\overset{2}{\underset{1}{y}}z|w:\overline{n}|} + a_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z|w:\overline{n}|}$

(c) $a_{\overset{3}{x}yz|w:\overline{n}|} = a_{\overset{3}{x}\underset{1}{y}\underset{2}{z}|w:\overline{n}|} + a_{\overset{3}{x}\underset{2}{y}\underset{1}{z}|w:\overline{n}|}$

(d) $a_{\overset{2}{\overline{xy}},z|w:\overline{n}|} = a_{\overset{3}{x}yz|w:\overline{n}|} + a_{x\overset{3}{y}z|w:\overline{n}|}$

（１８）　(x)，(y)，(z) のうちの最終生存者が死亡した際に保険金が支払われるが、(x) が最初に死亡すれば以後の保険料は半額に減額され、また (z) が (x)，(y) の死亡後まで生存すれば保険料払込が免除される。

この保険の最初の年払保険料を求めよ。

§8　条件付連生保険

2人以上の連合生命を被保険者とし、その中の特定被保険者が他の被保険者に先立って死亡した場合、あるいはあらかじめ指定した順序に従って死亡が起こった場合等、被保険者の死亡の順序を問題にして保険金を支払う保険契約を**条件付連生保険**という。この場合にも本章§3で述べた条件付生命確率が用いられる。次に基本的な例をいくつか挙げて説明する。

（1）　最も基本的な場合として、(x), (y) の2人を被保険者とし、n 年内に (x) が (y) に先立って死亡した場合のみ保険金1を支払う保険を考えると、その一時払保険料は、保険金年末支払ならば(12.3.1)あるいは（12.3.4）の ${}_{t|}q_{\overset{1}{x}y}$ を用いて

$$A_{\overset{1}{x}y:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\,{}_{t|}q_{\overset{1}{x}y} \tag{12.8.1}$$

となる。保険金即時支払ならば、(12.3.1), (4.8.1) から分かるように

$$\bar{A}_{\overset{1}{x}y:\overline{n|}} = \int_0^n v^s\,{}_sp_{xy}\,\mu_{x+s}\,ds \tag{12.8.2}$$

$$\fallingdotseq \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+\frac{1}{2}}\,{}_{t|}q_{\overset{1}{x}y} \tag{12.8.3}$$

$$= (1+i)^{\frac{1}{2}} A_{\overset{1}{x}y:\overline{n|}} \tag{12.8.4}$$

である。(12.4.8) と (12.3.3) より

$$A_{\overset{1}{\overline{xy}}:\overline{n|}} = A_{\overset{1}{x}y:\overline{n|}} + A_{x\overset{1}{y}:\overline{n|}} \tag{12.8.5}$$

となり、また (12.4.11) と (12.1.22) より

$$\bar{A}_{\overset{1}{\overline{xy}}:\overline{n|}} = \bar{A}_{\overset{1}{x}y:\overline{n|}} + \bar{A}_{x\overset{1}{y}:\overline{n|}} \tag{12.8.6}$$

となる。これら2式は両辺の意味を考えれば理解できよう。

（12.8.1）を実際に計算するには（12.3.4）を用いて

$$A_{\overset{1}{x}y:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}{}_{t+\frac{1}{2}}p_{y\ t|}q_x \tag{12.8.7}$$

とし、右辺を計算すればよい。（ハンドの計算はかなり厄介になるが、コンピューターならばさして困難ではない）$\bar{A}$ については（12.8.4）を用いて A から計算するか、（12.8.7）の v^{t+1} の代わりに $v^{t+\frac{1}{2}}$ を用いて直接計算する。

あるいは本章§4の（9）におけるような**計算基数**を導入して計算を簡略にすることもできる。すなわち

$$C_{\overset{1}{x}y} = v^{\frac{x+y}{2}+1} d_x\, l_{y+\frac{1}{2}}$$

$$C_{\overset{1}{x+t},y+t} = v^{\frac{x+y}{2}+t+1} d_{x+t}\, l_{y+t+\frac{1}{2}}$$

$$M_{\overset{1}{x}y} = C_{\overset{1}{x}y} + C_{\overset{1}{x+1},y+1} + \cdots\cdots\cdots$$

をあらかじめ計算しておけば、本章§4（9）で述べた D_{xy} を用いて

$$A_{\overset{1}{x}y:\overline{n|}} = \frac{M_{\overset{1}{x}y} - M_{\overset{1}{x+n},y+n}}{D_{xy}} \tag{12.8.8}$$

となる。また

$$\bar{C}_{\overset{1}{x}y} = v^{\frac{x+y}{2}+\frac{1}{2}} d_x\, l_{y+\frac{1}{2}}$$

$$\bar{M}_{\overset{1}{x}y} = \bar{C}_{\overset{1}{x}y} + \bar{C}_{\overset{1}{x+1},y+1} + \cdots\cdots\cdots$$

等をあらかじめ計算しておけば

$$\bar{A}_{\overset{1}{x}y:\overline{n|}} = \frac{\bar{M}_{\overset{1}{x}y} - \bar{M}_{\overset{1}{x+n},y+n}}{D_{xy}} \tag{12.8.9}$$

となる。このような保険で保険料を年払とする場合には、(x), (y) のいずれかが死亡すれば契約は消滅するので、両者の共存中を払込期間としなければならない。従って例えば保険金即時支払の年払保険料は

$$\bar{P}^{\ 1}_{xy:\overline{n}|} = \frac{\bar{A}^{\ 1}_{xy:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}} = \frac{\bar{M}^{\ 1}_{xy} - \bar{M}^{\ 1}_{x+n,\,y+n}}{N_{xy} - N_{x+n,\,y+n}} \tag{12.8.10}$$

となる。またその時の責任準備金は将来法により次式となる。

$$_t\bar{V}^{\ 1}_{xy:\overline{n}|} = \bar{A}^{\ 1}_{x+t\,,\,y+t\,:\,\overline{n-t}|} - \bar{P}^{\ 1}_{xy:\overline{n}|}\ \ddot{a}_{x+t\,,\,y+t\,:\,\overline{n-t}|} \tag{12.8.11}$$

被保険者が 3 人以上の場合も同様の議論が展開され、例えば 3 人の場合の一時払保険料（保険金即時支払）と年払保険料は、次の式によって計算することができる。

$$\bar{A}^{\ 1}_{xyz:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+\frac{1}{2}}\ {}_{t|}q^{\ 1}_{xyz} \tag{12.8.12}$$

$$\bar{P}^{\ 1}_{xyz:\overline{n}|} = \frac{\bar{A}^{\ 1}_{xyz:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{xyz:\overline{n}|}} \tag{12.8.13}$$

（2）　n 年内に (x) が死亡し、かつ (x) の死亡前に既に (y) が死亡している場合にのみ保険金 1 を支払う保険では、一時払保険料は (12.3.16), (12.3.17) により

$$A^{\ 2}_{xy:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\ {}_{t|}q^{\ 2}_{xy} \tag{12.8.14}$$

$$= \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\left({}_{t|}q_x - {}_{t|}q^{\ 1}_{xy}\right)$$

$$= A^{\ 1}_{x:\overline{n}|} - A^{\ 1}_{xy:\overline{n}|} \tag{12.8.15}$$

$$\bar{A}^{\ 2}_{xy:\overline{n}|} = \int_0^n v^s\ {}_sq_y\ {}_sp_x\ \mu_{x+s}\, ds \tag{12.8.16}$$

$$= \int_0^n v^s(1 - {}_sp_y)\ {}_sp_x\ \mu_{x+s}\, ds$$

$$= \bar{A}^{\ 1}_{x:\overline{n}|} - \bar{A}^{\ 1}_{xy:\overline{n}|} \tag{12.8.17}$$

となる。あるいは (12.3.17) の代わりに (12.3.21) を用い、さらに

（12.8.1）と（12.6.2）を用いると

$$A^{\;2}_{xy:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} \left({}_{t|}q_{x\overset{1}{y}} - {}_{t+1}p_x \, {}_{t+1}q_y + {}_tp_x \, {}_tq_y \right)$$

$$= A_{x\overset{1}{y}:\overline{n}|} - a_{y|x:\overline{n}|} + v \left[v^0 \, {}_0p_x \, {}_0q_y + a_{y|x:\overline{n}|} - v^n \, {}_np_x \, {}_nq_y \right]$$

となるが、${}_0q_y = 0$，$1 - v = d$ であるから結局

$$A^{\;2}_{xy:\overline{n}|} = A_{x\overset{1}{y}:\overline{n}|} - d \, a_{y|x:\overline{n}|} - v^{n+1} \, {}_np_x \, {}_nq_y \tag{12.8.18}$$

が得られる。特に $n \to \infty$ となる終身保険の場合は、${}_np_x \to 0$ であるので

$$A^{\;2}_{xy} = A_{x\overset{1}{y}} - d \, a_{y|x} \tag{12.8.19}$$

となる。また（12.5.7）の右辺第３項に（12.8.5）を入れ、（12.8.15）を用いると

$$A^{\;1}_{xy:\overline{n}|} = A^{\;2}_{xy:\overline{n}|} + A_{x\overset{2}{y}:\overline{n}|} \tag{12.8.20}$$

という関係が得られるが、この式も両辺の意味を考えて理解できよう。

保険金即時支払についても同様に次式が成立する。

$$\bar{A}^{\;1}_{xy:\overline{n}|} = \bar{A}^{\;2}_{xy:\overline{n}|} + \bar{A}_{x\overset{2}{y}:\overline{n}|} \tag{12.8.21}$$

このような保険で保険料を年払とする場合は、契約は (x) の死亡時にのみ消滅するので、年払保険料は（12.8.17）を用いて

$$\bar{P} = \frac{\bar{A}^{\;2}_{xy:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{\dfrac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n}}{D_x} - \dfrac{\bar{M}^{\;1}_{xy} - \bar{M}^{\;1}_{x+n,\,y+n}}{D_{xy}}}{\dfrac{N_x - N_{x+n}}{D_x}} \tag{12.8.22}$$

となる。また責任準備金 ${}_t\bar{V}^{\;2}_{xy:\overline{n}|}$ は次のようになる。

$$\left.\begin{array}{lll} (x),(y)\text{ が共存中} & \bar{A}^{\;2}_{x+t,\,y+t:\overline{n-t}|} - \bar{P}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \\ (y)\text{ の死亡後} & \bar{A}^{\;1}_{x+t:\overline{n-t}|} - \bar{P}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \end{array}\right\} \tag{12.8.23}$$

（３）　被保険者が (x)，(y)，(z) の３人で、n 年内に (x) が (y) と

(z) の最終生存者よりも先に死亡した場合に保険金１を支払う保険では、その一時払保険料は（12.3.31),（12.3.32）により

$$A^{\ 1}_{x,\overline{yz}:\overline{n}|}=\sum_{t=0}^{n-1}v^{t+1}\ {}_{t|}q^{\ 1}_{x,\overline{yz}} \tag{12.8.24}$$

$$=A^{\ 1}_{xy:\overline{n}|}+A^{\ 1}_{xz:\overline{n}|}-A^{\ 1}_{xyz:\overline{n}|} \tag{12.8.25}$$

となる。また（12.1.10）を用いれば、同様に

$$\bar{A}^{\ 1}_{x,\overline{yz}:\overline{n}|}=\int_0^n v^s\ {}_sp_x\ {}_sp_{\overline{yz}}\ \mu_{x+s}\,ds \tag{12.8.26}$$

$$=\bar{A}^{\ 1}_{xy:\overline{n}|}+\bar{A}^{\ 1}_{xz:\overline{n}|}-\bar{A}^{\ 1}_{xyz:\overline{n}|} \tag{12.8.27}$$

が得られる。この保険で保険料を年払とする場合は、(x) の死亡もしくは (y) と (z) の最終生存者の死亡によって契約が消滅するので、(12.5.33) を期始払に変えた

$$\ddot{a}_{x,\overline{yz}:\overline{n}|}=\sum_{t=0}^{n-1}v^t\ {}_tp_x\ {}_tp_{\overline{yz}} \tag{12.8.28}$$

を用いて、次のようになる。

$$\bar{P}^{\ 1}_{x,\overline{yz}:\overline{n}|}=\frac{\bar{A}^{\ 1}_{x,\overline{yz}:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x,\overline{yz}:\overline{n}|}} \tag{12.8.29}$$

（４）　被保険者が３人で、 n 年内に (x), (y) のいずれかが死亡し、その時に (z) が生存しているならば保険金１を支払う保険では、一時払保険料は（12.3.36),（12.3.37）により

$$A_{\overset{1}{\overline{xy}},z:\overline{n}|}=\sum_{t=0}^{n-1}v^{t+1}\ {}_{t|}q_{\overset{1}{\overline{xy}},z} \tag{12.8.30}$$

$$=A^{\ 1}_{xyz:\overline{n}|}+A_{x\overset{1}{y}z:\overline{n}|} \tag{12.8.31}$$

となる。また（12.1.22）を用いれば同様に

$$\bar{A}_{\overset{1}{\overline{xy}},z:\overline{n}|} = \int_0^n v^s \, {}_sp_{xyz} \, \mu_{x+s,\,y+s} \, ds \qquad (12.8.32)$$

$$= \bar{A}_{\overset{1}{x}yz:\overline{n}|} + \bar{A}_{x\overset{1}{y}z:\overline{n}|} \qquad (12.8.33)$$

が得られる。保険料を年払とする場合は、3人の誰かが第1に死亡した時に契約が消滅するので、一時払保険料を $\ddot{a}_{xyz:\overline{n}|}$ で割る。

（5）　被保険者が3人で、n 年内に (x) が死亡し、かつ (x) の死亡時に (z) は既に死亡しており、(y) は生存している時に保険金1を支払う保険では、一時払保険料は（12.3.22),（12.3.23）により

$$A_{\overset{2}{x}y\underset{1}{z}:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} \, {}_{t|}q_{\overset{2}{x}y\underset{1}{z}} \qquad (12.8.34)$$

$$= A_{\overset{1}{x}y:\overline{n}|} - A_{\overset{1}{x}yz:\overline{n}|} \qquad (12.8.35)$$

となる。被保険者記号の下につけた数字は、その被保険者の死亡が保険金支払に関係ないことを、また上につけた数字は、その被保険者の死亡時に保険金が支払われることを表わしている。

保険金即時支払ならば

$$\bar{A}_{\overset{2}{x}y\underset{1}{z}:\overline{n}|} = \int_0^n v^s \left(1 - {}_sp_z \right) {}_sp_{xy} \, \mu_{x+s} \, ds \qquad (12.8.36)$$

$$= \bar{A}_{\overset{1}{x}y:\overline{n}|} - \bar{A}_{\overset{1}{x}yz:\overline{n}|} \qquad (12.8.37)$$

である。保険料を年払とする場合は、(x) または (y) が最初に死亡した時に契約が消滅し、(z) が初めに死亡した時には契約が継続するから、一時払保険料を $\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}$ で割る。

（6）　n 年内に (x) が3番目に死亡する場合に保険金1が支払われるとすると、一時払保険料は（12.3.33）と（12.8.25）を用いて

$$A_{\overset{3}{x}yz:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\ {}_{t|}q_{\overset{3}{x}yz} \tag{12.8.38}$$

$$= A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} - A_{\overset{1}{x},\overline{yz}:\overline{n}|} \tag{12.8.39}$$

$$= A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} - A_{\overset{1}{x}y:\overline{n}|} - A_{\overset{1}{x}z:\overline{n}|} + A_{\overset{1}{x}yz:\overline{n}|} \tag{12.8.40}$$

となる。保険金即時支払についても

$$\bar{A}_{\overset{3}{x}yz:\overline{n}|} = \int_0^n v^s (1 - {}_sp_y)(1 - {}_sp_z)\,{}_sp_x\,\mu_{x+s}\,ds \tag{12.8.41}$$

の右辺を展開して、同じような関係を証明することができる。

保険料を年払とする場合は、(y), (z) の死亡は契約の消滅に関係せず、(x) の死亡時にのみ契約が消滅するので、一時払保険料を $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ で割る。その場合の責任準備金は

① (x), (y), (z) が生存の場合

② (x), (y) が共存し、(z) が既に死亡している場合

③ (x), (z) が共存し、(y) が既に死亡している場合

④ (x) のみ生存している場合

に分けて積まねばならない。それぞれの値は、保険金即時支払であれば、将来法を用いて次のようになる。

① $\bar{A}_{\overset{3}{x+t},y+t,z+t:\overline{n-t}|} - \bar{P}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$

② $\bar{A}_{\overset{2}{x+t},y+t:\overline{n-t}|} - \bar{P}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$

③ $\bar{A}_{\overset{2}{x+t},z+t:\overline{n-t}|} - \bar{P}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$

④ $\bar{A}_{\overset{1}{x+t}:\overline{n-t}|} - \bar{P}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$

（7）　n 年内に (z)，(y)，(x) の順に死亡すれば、(x) の死亡の際に保険金１が支払われる保険では、一時払保険料は、保険金年末支払ならば（12.3.24）の確率を用いて

$$A_{\underset{2\ 1}{x\overset{3}{y}z}:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\ {}_{t|}q_{\underset{2\ 1}{x\overset{3}{y}z}} \tag{12.8.42}$$

である。(12.8.18) を導いた時のように、(12.3.26) をこれに入れ、さらに（12.8.34）と（12.7.5）とを用い、${}_0q^{2}_{yz}=0$，$1-v=d$ に留意すると

$$\begin{aligned} A_{\underset{2\ 1}{x\overset{3}{y}z}:\overline{n|}} &= \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\left({}_{t|}q_{x\overset{2}{y}\underset{1}{z}} - {}_{t+1}q^{2}_{yz}\ {}_{t+1}p_x + {}_tq^{2}_{yz}\ {}_tp_x \right) \\ &= A_{x\overset{2}{y}\underset{1}{z}:\overline{n|}} - a^{2}_{yz|x:\overline{n|}} + v\sum_{t=1}^{n-1} v^t\ {}_tq^{2}_{yz}\ {}_tp_x \\ &= A_{x\overset{2}{y}\underset{1}{z}:\overline{n|}} - d\,a^{2}_{yz|x:\overline{n|}} - v^{n+1}\ {}_nq^{2}_{yz}\ {}_np_x \end{aligned} \tag{12.8.43}$$

となる。特に $n\to\infty$ のときは ${}_np_x\to 0$ であるので次式が得られる。

$$A_{\underset{2\ 1}{x\overset{3}{y}z}} = A_{x\overset{2}{y}\underset{1}{z}} - d\,a^{2}_{yz|x} \tag{12.8.44}$$

保険金即時支払ならば

$$\bar{A}_{\underset{2\ 1}{x\overset{3}{y}z}:\overline{n|}} = \int_0^n v^s\ {}_sq^{2}_{yz}\ {}_sp_x\ \mu_{x+s}\,ds \tag{12.8.45}$$

と書けるが、計算には

$$\bar{A}_{\underset{2\ 1}{x\overset{3}{y}z}:\overline{n|}} \fallingdotseq (1+i)^{\frac{1}{2}} A_{\underset{2\ 1}{x\overset{3}{y}z}:\overline{n|}} \tag{12.8.46}$$

によって保険金年末支払の値から近似値を求める方が容易である。

保険料を年払とする場合は、(x) または (y) が最初に死亡すれば契約が消滅するし、(z) が最初に死亡する場合は、その後 (y) の死亡した時

は (x) の死亡まで契約が継続するので、$\ddot{a}_{xy:\overline{n|}} + a^{2}_{yz|x:\overline{n-1|}}$ で一時払保険料を割る。（便宜上保険料払込に関する契約条件を改めて $\ddot{a}_{xy:\overline{n|}}$ あるいは $\ddot{a}_{xyz:\overline{n|}}$ で割ることもある）

第１２章　　練習問題（４）

（以下の問題では、断りのない限り保険金支払は支払事由の発生した保険年度末に行われるとする）

（１）　(x) の死亡時、または m 年経過後に (y)，(z) の両者が生存している時、保険金が支払われる契約の年払保険料を定めよ。

（２）　契約から m 年以内は (x) の死亡時に (y) が生存している時に、また m 年後 (x)，(y) が生存している時は (x) の死亡に際し、保険金が支払われる。一方保険料は契約が消滅するまで払込まれるとした時、この保険の年払保険料を表わす式を書け。

（３）　第 t 年度に (x) が死亡し、その時 (y) が生存していれば保険金 t を支払うような n 年保険金累加定期保険の一時払保険料 $(IA)^{\ 1}_{xy:\overline{n|}}$ を与える式を書け。

（４）　(50)の死亡時に、(20)が既に死亡しているか40歳に到達していれば保険金が支払われる保険の一時払保険料および年払保険料を求めよ。

（５）　(30)が現在から10年以内に死亡するか、10年経過後であれば(60)に先立って死亡する場合に、保険金が支払われる契約の一時払保険料および年払保険料を求めよ。

（6）　(x) が契約後5年以内に死亡するか、5年経過後であれば (y) の死亡後に死亡する時、保険金が支払われる保険の年払保険料を表わす式を書け。

（7）　(x) が (y) に先立って死亡すればそれぞれの死亡時に保険金 $\dfrac{1}{2}$ ずつを支払い、(y) が (x) に先立って死亡すれば (x) の死亡時に保険金１を支払う保険で、保険料は (x)，(y) の共存中払込まれるとした時、年払保険料を求めよ。また年払保険料を、単生命および連合生命の年金現価で表わせ。

（8）　年払営業保険料が $P(1+k)+C$ の形で与えられている。現在から n 年以内に (x) が (y) より先に死亡すれば保険金１を支払い、また (y) が (x) より先に死亡すれば既払込営業保険料を返還する。この保険の年払純保険料を求めよ。

（9）　y 歳の父が x 歳の息子のために、自分が z 歳に達した日から、あるいはそれ以前に死亡した場合はその次の契約応当日から、息子が年額 A の終身年金を受けられるようにし、また年金を開始することなく息子が死亡した場合には即時に既払込営業保険料を受け取れるようにした。この保険の年払営業保険料を計算せよ。ただし予定事業費は次のとおりとする。

年金開始前	営業保険料に対し α
年金開始後	年金額の β

（１０）　２歳の息子と35歳の父とを被保険者とする保険料年払の次のような保険について、その年払営業保険料を定めよ。

① 息子が所定の年齢 x（$x = 6, 12, 15, 18, 22$）に到達するごとに生存給付金 S_x を支払う。

② 息子が22歳に到達するまでに父が死亡すれば、以後の保険料払込を免除するとともに、毎年死亡の応当日に息子の満年齢 x によって異なる年額 H_x の年金を息子が生存する限り（ただし22歳到達まで）支払う。

③ 息子が死亡すれば、年払保険料に経過保険年度数を掛けた額から既払生存給付金を差し引いた額を死亡給付金として直ちに支払い、契約は消滅する。

④ 予定事業費としては、α，β，γ，γ'（ただし β 以外はこの場合の単位金額に基づく額を表わす）の外に、年金支払のため年金額に対し δ の割合の経費を要するものとする。

（１１）　付加保険料を純保険料の7.5％とし、次の場合の一時払純保険料を求めよ。

(60)の死亡前またはその死亡後5年以内に(30)が死亡すれば、保険金を直ちに支払い、また5年経過後(30)が生存していれば、その時点で一時払営業保険料を利息を付けないで返還する。

（１２）　被保険者 (x)，(y)，(z) のうち、n 年内に (x) が２番目に死亡した時に保険金１が支払われる保険について、一時払保険料 $A^{\,2}_{xyz:\overline{n|}}$ と年払保険料を与える式を書け。

（１３）　n 年内に (x)，(y) のうちの最終生存者が死亡し、その時 (z) が生存しているならば、保険金１を支払う保険につき

（a）　一時払保険料 $A^{\ \ 1}_{\overline{xy},z:\overline{n|}}$ を与える式を書き、それが

$$A_{\overset{2}{x}\underset{1}{y}z:\overline{n|}} + A_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z:\overline{n|}}$$

に等しくなることを証明せよ。

（b）　保険金即時支払の時はどうなるか。

（c）　年払保険料を求めよ。

（１４）　３人の被保険者のうち (z) が最初に死亡し、その後 (y) の死亡に関係なく (x) が死亡した時に保険金１を支払う保険につき

（a）　一時払保険料 $A^{2:3}_{x,\,y\underset{1}{z}:\overline{n|}}$ を与える式を書き、それが

$$A_{\overset{2}{x}y\underset{1}{z}:\overline{n|}} + A_{\overset{3}{x}\underset{2}{y}\underset{1}{z}:\overline{n|}}$$

に等しくなることを証明せよ。

（b）　保険金即時支払の時はどうなるか。

（c）　年払保険料を求めよ。

（１５）　(30), (35), (40)のうちの第２死亡に対し保険金１が支払われるが、(40) が最初に死亡した場合には第１死亡および第２死亡に対しそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ ずつ支払われる。この保険の一時払保険料と年払保険料を定めよ。ただし保険金は年末支払とし、(40)が最初に死亡した後も保険料の払込は続けるものとする。

（１６）　(40), (50), (60)の最終生存者の死亡時に(20)が既に死亡していれば保険金（ただし年末支払）が支払われる保険の一時払保険料をできるだけ計算しやすい式で表わせ。また年払保険料はどうなるか。

（１７）　(x), (y) の最終生存者の死亡が (z) の生存中か、あるいは (z) の死亡後 m 年以内である場合にかぎり保険金（年末支払）を支払う保険の一時払保険料を定めよ。

（１８）　(30), (40), (50) のうち、(30)が(40)よりも先に死亡するかあるいは(40)の死亡後10年以内に死亡し、かつその死亡時に(50)が生存している時に保険金（即時支払とする）が支払われる。この保険の一時払保険料は

$$\bar{A}^{1}_{30,50} - \frac{D_{40,60}}{D_{30,50}} \left(\bar{A}^{1}_{40,60} - \bar{A}^{1}_{40,40,60} \right)$$

となることを証明せよ。

（１９）　(30), (35), (45)のうち(30)および(35)がいずれも50歳になる前に死亡し、かつ最終の死亡時に(45)が生存している場合に保険金を支払う保険について、その一時払保険料と年払保険料を求めよ。

（２０）　死亡表がメーカムの法則に従う時

$$\bar{A}^{1}_{xy} = \frac{c^x}{c^x + c^y} \bar{A}_{xy} + \frac{c^x - c^y}{c^x + c^y} (\log s) \bar{a}_{xy}$$

$$\bar{P}^{(\infty)}_{\overset{1}{x}y} = \frac{c^x}{c^x + c^y} \bar{P}^{(\infty)}_{xy} + \frac{c^x - c^y}{c^x + c^y} (\log s)$$

$$ {}_t\overline{V}^{1\,(\infty)}_{xy} = \frac{c^x}{c^x + c^y}\ {}_t\overline{V}^{(\infty)}_{xy} $$

であることを証明せよ。ただし $\overline{P}^{(\infty)}$ と ${}_t\overline{V}^{(\infty)}$ は保険料が連続支払であることを表わし、 c および s はメーカム定数である。

（２１）　本章 練習問題（１）の（１２）(f) の結果を用いて

$$ A^{3:4}_{x\ \underset{2\ 1}{yzw}:\overline{n}|} = A_{xy\underset{2\ 1}{zw}:\overline{n}|} - d\, a_{\underset{1}{y\overset{2}{z}w}|x:\overline{n}|} - v^{n+1}\ {}_np_x\ {}_nq_{\underset{1}{y\overset{2}{z}w}} $$

を証明せよ。またこのような保険の年払保険料を定めよ。

（２２）　一時払保険料　$\overline{A}^{3}_{xy\underset{2\ 1}{zw}:\overline{n}|}$　を積分で表わし、近似計算の方法を考えよ。またこのような保険の年払保険料を定めよ。

（２３）　次の一時払保険料を、本文および問題中でこれまでに述べた既知の一時払保険料の項で表わせ。またそれぞれの年払保険料を定めよ。

（a） $\overline{A}^{4}_{\underset{3\ 2\ 1}{xyzw}:\overline{n}|}$　　（b） $\overline{A}^{4}_{xyz\underset{1}{w}:\overline{n}|}$　　（c） $\overline{A}^{2:3:4}_{x\ \ yz\underset{1}{w}:\overline{n}|}$

（２４）　一時払保険料が

$$ \frac{D_{x+n}}{D_x}\left(\overline{A}_{x+n} - \overline{A}^{\ 1}_{x+n,\ y}\right) $$

で与えられる場合の給付内容を説明せよ。またこの給付に対し年払保険料を　$\ddot{a}_x$　で割って定めることとした場合の　t　年後の責任準備金を表わす式を書け。

(次の３問は復帰年金の特殊な形である)

(２５)　年 k 回払の復帰年金を完全年金としたもの、すなわち (x) の死亡から次の年金開始時点までに (y) が死亡すればその経過期間に応じた額を支払い、また年金開始後に (y) が死亡すれば直前の年金支払時点から死亡時点までの経過期間に応じた額を追加して支払う復帰年金の現価　$\mathring{a}^{(k)}_{x|y}$ を与える式を導け。

(２６)　(x) の死亡時点から直ちに年金支払を開始するような復帰年金の現価 $\hat{a}^{(k)}_{x|y}$ を与える式を導け。

(２７)　(x) の死亡時点から直ちに年金支払を開始し、かつその年金を完全年金とする時の現価　$\hat{\mathring{a}}^{(k)}_{x|y}$ を与える式を導け。

第13章　就業不能(または要介護)に対する諸給付

被保険者が身体に関する高度の障害に基づいて就業不能となった場合に、救済のため諸種の給付を行う保険、ないしは主契約に付加する特約が考えられている。本章ではそのような給付に関する計算を取り上げる。

ただし就業不能の場合に死亡の場合と全く同じ給付を与える契約、例えば就業不能の場合にも死亡の場合と同額の保険金額を支払って契約を消滅させる保険とか、父親の死亡の際以後の保険料払込を免除する子供保険で父親の就業不能についても同じ給付を与えるものについては、これまでの死亡率の代わりに「死亡＋就業不能」の発生率を新しく死亡率とみて同じ計算方法を適用できるので、改めて論ずる必要はない。ここでは就業不能に対し本章§2以下で述べるような年金あるいはその他の複雑な給付を与える場合について考える。

また要介護者に対し諸種の給付を与える保険(**介護保険**)についても、用語の読み替えだけで就業不能の場合と全く同じ手法で数理的構成ができるが、ここでは就業不能を主体に記述し、要介護の場合は二三の箇所で触れるにとどめる。全体の読み替えは読者で試みられたい。

§1　死亡・就業不能脱退残存表

本章での計算の基礎となるものは死亡・就業不能脱退残存表であるが、これは第3章で述べた多重脱退表の一つの実用例である。まず主集団と

して就業者（あるいは健康者）の集団をとり、それからの脱退原因には死亡と就業不能の二つがあるとして2重脱退表を考える。またさらに副集団として就業不能者の集団をとり、その副集団からの脱退原因は死亡のみとする。(就業不能者が回復して就業者集団に復帰することを考える場合もあるが、ここではそれは取り上げない）　この二つの脱退残存表を組み合わせたものが**死亡・就業不能脱退残存表**であり、ハンター（A. Hunter）が初めてこれを作成し利用方法を考えた。次頁に一つの就業者集団のモデルをとり脱退状況を仮定してこの表を例示している。

この表で用いられている記号の意味は次のとおりである。

l_x^{aa} ： x 歳の就業者数

d_x^{aa} ： x 歳と $x+1$ 歳の間における就業者の死亡数

i_x ： x 歳と $x+1$ 歳の間において就業者が就業不能となる数

l_x^{ii} ： x 歳の就業不能者数

d_x^{ii} ： x 歳と $x+1$ 歳の間における就業不能者の死亡数

$l_x = l_x^{aa} + l_x^{ii}$ ： x 歳の生存者総数

$d_x = d_x^{aa} + d_x^{ii}$ ： x 歳と $x+1$ 歳の間における死亡者総数

（ l_x と d_x で通常の生命表を表わしている）

ここで用いられている添字について説明すると、右上の添字の a は就業者(active)を表わし、 i は就業不能者(invalid)を表わす。それを二重にして aa あるいは ii としているのは、就業者の集団内あるいは就業不能者の集団(ただしこれは開集団)内で見ていることを示している。後に出てくる ai は観察開始時点の就業者が観察期間中に就業不能者になることを意味する。一重の a あるいは i を右上の添字に使用する時は、

死亡・就業不能脱退残存表の一つのモデル

x	l_x^{aa}	d_x^{aa}	i_x	l_x^{ii}	d_x^{ii}	l_x	d_x
20	100,000	72	8	0	0	100,000	72
21	99,920	72	10	8	0	99,928	72
22	99,838	72	12	18	0	99,856	72
23	99,754	72	14	30	0	99,784	72
24	99,668	72	16	44	1	99,712	73
25	99,580	73	18	59	1	99,639	74
26	99,489	74	20	76	1	99,565	75
27	99,395	75	22	95	1	99,490	76
28	99,298	77	24	116	1	99,414	78
29	99,197	79	26	139	2	99,336	81
30	99,092	82	28	163	2	99,255	84
31	98,982	86	30	189	2	99,171	88
32	98,866	90	32	217	2	99,083	92
33	98,744	95	34	247	3	98,991	98
34	98,615	101	36	278	3	98,893	104
35	98,478	108	38	311	3	98,789	111
36	98,332	116	40	346	4	98,678	120
37	98,176	125	42	382	4	98,558	129
38	98,009	135	45	420	5	98,429	140
39	97,829	147	48	460	6	98,289	153
40	97,634	161	51	502	7	98,136	168
41	97,422	178	55	546	8	97,968	186
42	97,189	198	59	593	9	97,782	207
43	96,932	221	64	643	10	97,575	231
44	96,647	247	70	697	11	97,344	258
45	96,330	276	77	756	13	97,086	289
46	95,977	308	85	820	15	96,797	323
47	95,584	344	94	890	17	96,474	361
48	95,146	384	105	967	19	96,113	403
49	94,657	428	118	1,053	22	95,710	450
50	94,111	475	123	1,149	25	95,260	500
51	93,503	525	150	1,257	29	94,760	554
52	92,828	578	170	1,378	34	94,206	612
53	92,080	634	193	1,514	40	93,594	674
54	91,253	692	219	1,667	47	92,920	739
55	90,342	752	249	1,839	55	92,181	807
56	89,341	814	283	2,033	64	91,374	878
57	88,244	877	322	2,252	75	90,496	952
58	87,045	941	367	2,499	87	89,544	1,028
59	85,737	1,006	419	2,779	102	88,516	1,108
60	84,312	1,072	480	3,096	119	87,408	1,191
61	82,760	1,139	552	3,457	139	86,217	1,278
62	81,069	1,207	637	3,870	164	84,939	1,371
63	79,225	1,275	738	4,343	193	83,568	1,468
64	77,212	1,343	858	4,888	229	82,100	1,572
65	75,011			5,517		80,528	

観察開始時点で就業者あるいは就業不能者であることを意味する。また添字のないのは就業者と就業不能者を合わせた通常の生命表における生命関数を表わす。

要介護の場合は、就業不能を要介護状態、就業者を介護不要者、就業不能者を要介護者等と読み替えて、全く同様の死亡・要介護脱退残存表を考える。ただしこの場合には、脱退表の最終年齢は生命表の最終年齢まで延長され、高年齢になるほど急速に要介護者になる割合が増大する。

まず二つの集団に関する生命関数の間には、それぞれ

$$l_{x+1}^{aa} = l_x^{aa} - d_x^{aa} - i_x \tag{13.1.1}$$

$$l_{x+1}^{ii} = l_x^{ii} + i_x - d_x^{ii} \tag{13.1.2}$$

という関係がある。(これらは第3章の（3.2.1）と（3.2.23）に対応する）いま

$$q_x^{aa} = \frac{d_x^{aa}}{l_x^{aa}} \tag{13.1.3}$$

$$q_x^{(i)} = \frac{i_x}{l_x^{aa}} \tag{13.1.4}$$

とすると、それぞれ就業者死亡率(就業のまま死亡する確率)および就業者の就業不能率を表わすが、これらを用いると（13.1.1）は

$$l_{x+1}^{aa} = l_x^{aa}\{1 - q_x^{aa} - q_x^{(i)}\} \tag{13.1.5}$$

と書ける。あるいは $p_x^{aa} = \dfrac{l_{x+1}^{aa}}{l_x^{aa}}$ とすると

$$p_x^{aa} = 1 - q_x^{aa} - q_x^{(i)} \tag{13.1.6}$$

となる。(従って一般には $p_x^{aa} + q_x^{aa} \neq 1$ である)（13.1.3）と（13.1.4）

の絶対確率（他の原因がないとした時の脱退率）については（3.2.11）より

$$q_x^{aa*} = \frac{d_x^{aa}}{l_x^{aa} - \dfrac{i_x}{2}} \tag{13.1.7}$$

$$q_x^{(i)*} = \frac{i_x}{l_x^{aa} - \dfrac{d_x^{aa}}{2}} \tag{13.1.8}$$

が得られる。就業不能者が1年以内に死亡する確率は脱退表の上からは

$$q_x^{ii} = \frac{d_x^{ii}}{l_x^{ii}} \tag{13.1.9}$$

であるが、その絶対確率すなわち就業不能者の絶対死亡率 q_x^i に関しては（3.2.25）を導いた時のように、x 歳で就業不能となり、その後 x 歳のうちに死亡する者の数

$$\frac{1}{2}\, i_x\, q_x^i \tag{13.1.10}$$

を考慮して

$$l_x^{ii}\, q_x^i = d_x^{ii} - \frac{1}{2}\, i_x\, q_x^i$$

が成立する。すなわち次式が得られる。

$$q_x^i = \frac{d_x^{ii}}{l_x^{ii} + \dfrac{1}{2}\, i_x} \tag{13.1.11}$$

就業不能者に対する給付について計算をする際には、途中で副集団に入ってくる者のない就業不能者のみの単独生命表が必要になるが、それを作成するにはこの q_x^i を就業不能者集団の死亡率と考え、これを用いて単生命の生命表を作成した要領で**就業不能者生命表**の l_x^i, d_x^i を作成する。

その上で例えば

$$ {}_tp_x^i = \frac{l_{x+t}^i}{l_x^i} \tag{13.1.12} $$

等を計算し、利用する。

なおq_x^{aa*}と$q_x^{(i)*}$とが先に与えられている場合には、(3.2.6) を用いてそれらから q_x^{aa} と $q_x^{(i)}$ とが計算され、それらを (13.1.5) に用いれば主集団の脱退残存表が作成される。さらに q_x^i があれば、$l_{x_0}^{ii}=0$ (x_0 は脱退表の最初の年齢) と i_{x_0} から出発して、(13.1.11) と (13.1.2) を繰り返し用いて

$$ d_{x_0}^{ii} \rightarrow l_{x_0+1}^{ii} \rightarrow d_{x_0+1}^{ii} \rightarrow \cdots\cdots\cdots $$

の順に計算を進めて副集団の脱退残存表も作成できる。従って本節の始めに与えた元の形の脱退残存表を示さずに、単にq_x^{aa*}, $q_x^{(i)*}$ および q_x^i が与えられている場合も多い。

次にこの脱退残存表に関して考えられる特殊な生命関数をみておこう。

（1）　x 歳の就業者が就業のまま t 年間生存する確率は

$$ {}_tp_x^{aa} = \frac{l_{x+t}^{aa}}{l_x^{aa}} \tag{13.1.13} $$

（2）　x 歳の就業者が1年以内に死亡する確率 q_x^a を考えると、死亡者には就業のまま死亡する者と一旦就業不能となり死亡する者とがあり、後者の数は (13.1.10) で与えられるので

$$ q_x^a = \frac{d_x^{aa} + \dfrac{1}{2}\, i_x\, q_x^i}{l_x^{aa}} \tag{13.1.14} $$

（3）　x 歳の就業者が1年以内に就業不能となり $x+1$ 歳まで生存す

る確率 p_x^{ai} を考えると、i_x から（13.1.10）で与えられる数を引いたものが分子となり

$$p_x^{ai}=\frac{i_x\left(1-\dfrac{1}{2}q_x^i\right)}{l_x^{aa}} \tag{13.1.15}$$

となる。あるいは（13.1.2）と（13.1.11）とより

$$\begin{aligned} i_x &= l_{x+1}^{ii}-l_x^{ii}+d_x^{ii} \\ &= l_{x+1}^{ii}-l_x^{ii}+l_x^{ii}q_x^i+\frac{1}{2}i_x q_x^i \end{aligned}$$

$$i_x\left(1-\frac{1}{2}q_x^i\right)=l_{x+1}^{ii}-l_x^{ii}(1-q_x^i) \tag{13.1.16}$$

であるので

$$p_x^{ai}=\frac{1}{l_x^{aa}}\left(l_{x+1}^{ii}-l_x^{ii}\,p_x^i\right) \tag{13.1.17}$$

と書くこともできる。

（４）　x 歳の就業者が t 年以内に就業不能となり $x+t$ 歳まで生存する確率 ${}_tp_x^{ai}$ を考えよう。まず彼が期間〔$s,\ s+1$〕（$s+1<t$）の間で就業不能となり、かつ t 年後に生存する確率を求めると（13.1.17）の場合と同様に

$$\begin{aligned} &\frac{i_{x+s}}{l_x^{aa}}\left(1-\frac{1}{2}q_{x+s}^i\right){}_{t-s-1}p_{x+s+1}^i \qquad (13.1.18)\\ &=\frac{1}{l_x^{aa}}\left(l_{x+s+1}^{ii}-l_{x+s}^{ii}\ p_{x+s}^i\right){}_{t-s-1}p_{x+s+1}^i \\ &=\frac{1}{l_x^{aa}}\left(l_{x+s+1}^{ii}\ {}_{t-s-1}p_{x+s+1}^i-l_{x+s}^{ii}\ {}_{t-s}p_{x+s}^i\right) \end{aligned}$$

となる。${}_tp_x^{ai}$ はこれを $s=0,1,2,\cdots,t-1$ について加えたもの

であるから

$$ {}_tp_x^{ai} = \frac{1}{l_x^{aa}} \left(l_{x+t}^{ii} - l_x^{ii}\ {}_tp_x^{i} \right) \tag{13.1.19} $$

である。l_{x+t}^{ii} のうち l_x^{ii} からの生存者を除けば、x と $x+t$ の間で就業不能となり $x+t$ 歳まで生存している者の数となるが、この式はそのことを表わしている。

（５）　x 歳の就業者が就業のまま、もしくは就業不能となって t 年間生存する確率 ${}_tp_x^{a}$ を求めよう。この確率を l_x^{aa} に掛ければ

$$ l_x^{aa}\ {}_tp_x^{a} = l_{x+t}^{aa} + l_x^{aa}\ {}_tp_x^{ai} $$

が成立するので

$$ {}_tp_x^{a} = {}_tp_x^{aa} + {}_tp_x^{ai} \tag{13.1.20} $$

となる。(13.1.13)，(13.1.19) および $l_{x+t}^{aa} + l_{x+t}^{ii} = l_{x+t}$ を (13.1.20) に入れると

$$ {}_tp_x^{a} = \frac{l_{x+t} - l_x^{ii}\ {}_tp_x^{i}}{l_x^{aa}} \tag{13.1.21} $$

が得られる。あるいは次式のように書くことができる。

$$ {}_tp_x^{a} = \frac{l_x}{l_x^{aa}}\ {}_tp_x - \frac{l_x^{ii}}{l_x^{aa}}\ {}_tp_x^{i} \tag{13.1.22} $$

なお $p_x^{a} + q_x^{a} = 1$ でなければならないが、それは (13.1.20) の右辺に (13.1.13)，(13.1.15) を用いて得られる p_x^{a} に、(13.1.14) の q_x^{a} を加えれば確かめることができる。また ${}_tq_x^{a}$ については次のように考えればよい。

$$ {}_tq_x^{a} = 1 - {}_tp_x^{a} \tag{13.1.23} $$

（６）　x 歳の就業者が１年以内に就業不能となり、その年度末までに死亡する確率 q_x^{ai} は、(13.1.10) を用いて

$$q_x^{ai} = \frac{1}{l_x^{aa}} \frac{1}{2} i_x q_x^i = \frac{1}{2} q_x^{(i)} q_x^i$$

となるが、中の式に (13.1.16) を用いると次式が得られる。

$$q_x^{ai} = \frac{d_x^{ii} - l_x^{ii} q_x^i}{l_x^{aa}} \tag{13.1.24}$$

（７）　x 歳の就業者が t 年後（$t \geqq 1$）までに就業不能となり、t 年後から $t+1$ 年後の間で死亡する確率を考えよう。 彼が 〔s , $s+1$〕（$0 \leqq s \leqq t-1$）の間で就業不能となり、かつ〔t , $t+1$〕の間で死亡する確率は、(13.1.18) 以降と同様に

$$\frac{i_{x+s}}{l_x^{aa}} \left(1 - \frac{1}{2} q_{x+s}^i\right) {}_{t-s-1}p_{x+s+1}^i \, q_{x+t}^i$$

$$= \frac{q_{x+t}^i}{l_x^{aa}} \left(l_{x+s+1}^{ii} \; {}_{t-s-1}p_{x+s+1}^i - l_{x+s}^{ii} \; {}_{t-s}p_{x+s}^i \right)$$

となる。これを $s = 0, 1, 2, \cdots\cdots\cdots, t-1$ について加えたものが求める確率であるが、その結果は (13.1.19) のように

$$\frac{q_{x+t}^i}{l_x^{aa}} \left(l_{x+t}^{ii} - l_x^{ii} \; {}_t p_x^i \right) = \frac{l_{x+t}^{ii} \, q_{x+t}^i - l_x^{ii} \; {}_{t|}q_x^i}{l_x^{aa}} \tag{13.1.25}$$

となる。

（８）　x 歳の就業者が就業不能となった後、 t 年後（$t \geqq 1$）から $t+1$ 年後の間で死亡する確率 ${}_{t|}q_x^{ai}$ は、（７）の結果に、t 年後と $t+1$

年後の間に就業不能となりかつその間に死亡する確率を加えたものとなる。すなわち（13.1.25）に（13.1.24）から得られる

$$ {}_t p_x^{aa}\, q_{x+t}^{ai} = \frac{d_{x+t}^{ii} - l_{x+t}^{ii}\, q_{x+t}^{i}}{l_x^{aa}} $$

を加えて

$$ {}_{t|} q_x^{ai} = \frac{d_{x+t}^{ii} - l_x^{ii}\ {}_{t|} q_x^{i}}{l_x^{aa}} \tag{13.1.26} $$

となる。この式の右辺の分子は、d_{x+t}^{ii} のうち x 歳までに就業不能となって〔t , $t+1$〕で死亡した者を除いている。従って x 歳以後に就業不能となり〔t , $t+1$〕で死亡した者の数を表わしている。

（9）（13.1.4）　に（13.1.16）を用いると

$$ q_x^{(i)} = \frac{i_x}{l_x^{aa}} = \frac{l_{x+1}^{ii} - l_x^{ii}(1-q_x^{i})}{l_x^{aa}(1-\frac{1}{2}q_x^{i})} $$

となるが、右辺の分母と分子を l_x で割り

$$ \frac{l_{x+1}^{ii}}{l_x} = \frac{l_{x+1}^{ii}}{l_{x+1}} \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_{x+1}^{ii}}{l_{x+1}}(1-q_x) $$

$$ \frac{l_x^{aa}}{l_x} = 1 - \frac{l_x^{ii}}{l_x} $$

を用いると

$$ q_x^{(i)} = \frac{\frac{l_{x+1}^{ii}}{l_{x+1}}(1-q_x) - \frac{l_x^{ii}}{l_x}(1-q_x^{i})}{(1-\frac{l_x^{ii}}{l_x})(1-\frac{1}{2}q_x^{i})} \tag{13.1.27} $$

という式が得られる。この式は介護不要者について統計的に $q_x^{(i)}$ を定め

るときに利用される。ある一時点の統計調査で、年齢別人口の中に占める要介護者の割合が判ったとし、それが定常開集団についての観測値であるとすると、第 3 章§2 で述べたところにより

$$\frac{L_x^{ii}}{L_x} \fallingdotseq \frac{l_{x+\frac{1}{2}}^{ii}}{l_{x+\frac{1}{2}}}$$

が観測されたことになる。$\dfrac{l_x^{ii}}{l_x}$ が短い区間では直線に近いと考えると、この観測値から

$$\frac{l_x^{ii}}{l_x} \fallingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{L_{x-1}^{ii}}{L_{x-1}} + \frac{L_x^{ii}}{L_x}\right)$$

等が計算されるが、これらの値を（13.1.27）に入れ、一方で q_x と q_x^i が他の資料から与えられているかもしくは推測されていれば、それらも (13.1.27) に入れることによって $q_x^{(i)}$ すなわち x 歳の介護不要者が 1 年以内に要介護状態になる率が計算できる。ただし観測値は通常年齢別に見たとき凹凸が激しいので、実用的な $q_x^{(i)}$ を定めるには計算のどこかの段階で補整が必要になる。

§2　就業不能に関する各種年金の現価

本章で今後取り上げる年金あるいは諸給付の計算に当たっては、死亡・就業不能脱退残存表の諸関数から次のような**計算基数**を導入しておくと計算を容易にすることができるので、始めにこれについて述べる。

$$D_x^{aa} = v^x\, l_x^{aa} \qquad C_x^{aa} = v^{x+1}\, d_x^{aa} \qquad C_x^{(i)} = v^{x+1}\, i_x$$

$$N_x^{aa} = \sum_{t=0}^{\omega-x} D_{x+t}^{aa} \qquad M_x^{aa} = \sum_{t=0}^{\omega-x} C_{x+t}^{aa} \qquad M_x^{(i)} = \sum_{t=0}^{\omega-x} C_{x+t}^{(i)}$$

$$D_x^{ii} = v^x\, l_x^{ii} \qquad\qquad C_x^{ii} = v^{x+1}\, d_x^{ii}$$

$$N_x^{ii} = \sum_{t=0}^{\omega-x} D_{x+t}^{ii} \qquad\qquad M_x^{ii} = \sum_{t=0}^{\omega-x} C_{x+t}^{ii}$$

$$D_x^{i} = v^x\, l_x^{i} \qquad\qquad C_x^{i} = v^{x+1}\, d_x^{i}$$

$$N_x^{i} = \sum_{t=0}^{\omega-x} D_{x+t}^{i} \qquad\qquad M_x^{i} = \sum_{t=0}^{\omega-x} C_{x+t}^{i}$$

$$D_x = v^x\, l_x = D_x^{aa} + D_x^{ii} \qquad\qquad C_x = v^{x+1}\, d_x = C_x^{aa} + C_x^{ii}$$

$$N_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} D_{x+t} \qquad\qquad M_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} C_{x+t}$$

C_x^{aa}，$C_x^{(i)}$，C_x^{ii}，C_x^{i}，C_x の定義式で v^{x+1} の代わりに $v^{x+\frac{1}{2}}$ を用いると $\bar{C}_x^{aa}$ 等が定義され、さらにこれらから $\bar{M}_x^{aa}$ 等が同様に定義される。それらは諸給付が即時支払の時に用いられる。

本節の目的は、次のような記号で与えられる年金の現価を計算することである。

$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{aa}$ ：現在 x 歳の就業者に、就業の期間中支払われる期始払 n 年有期年金の現価（期末払は $a_{x:\overline{n|}}^{aa}$）

$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{a}$ ：現在 x 歳の就業者が生存する限り支払われる期始払 n 年有期年金の現価（期末払は $a_{x:\overline{n|}}^{a}$）

$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{i}$ ：現在 x 歳の就業不能者にその生存中支払われる期始払 n 年有期年金の現価（期末払は $a_{x:\overline{n|}}^{i}$）

$a_{x:\overline{n|}}^{ai}$ ：現在 x 歳の就業者が就業不能となった年度末から生存中、ただし契約時点から n 年後まで支払われる年金の現価

$a_{x:\overline{n}|}^{a(i:\overline{m}|)}$ ：現在 x 歳の就業者が m 年以内に就業不能となれば、その年度末から生存中、ただし契約時点から n 年後まで支払われる年金の現価

これらの年金で $n \to \infty$ とすれば終身年金の場合である。まず $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{aa}$ と $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{i}$ については単生命の通常の生命表の場合と同様に、直ちに次の式が得られる。

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{aa} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \, {}_tp_x^{aa} = \frac{N_x^{aa} - N_{x+n}^{aa}}{D_x^{aa}} \tag{13.2.1}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{i} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \, {}_tp_x^{i} = \frac{N_x^{i} - N_{x+n}^{i}}{D_x^{i}} \tag{13.2.2}$$

次に $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{a}$ については、(13.1.22) の ${}_tp_x^a$ を用いて

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{a} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \, {}_tp_x^{a} \tag{13.2.3}$$

$$= \frac{l_x}{l_x^{aa}} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{l_x^{ii}}{l_x^{aa}} \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{i} \tag{13.2.4}$$

$$= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x^{aa}} - \frac{D_x^{ii}}{D_x^{aa}} \frac{N_x^{i} - N_{x+n}^{i}}{D_x^{i}} \tag{13.2.5}$$

となる。また $a_{x:\overline{n}|}^{ai}$ については、(13.1.20) を用いて

$$a_{x:\overline{n}|}^{ai} = \sum_{t=1}^{n} v^t \, {}_tp_x^{ai} \tag{13.2.6}$$

$$= a_{x:\overline{n}|}^{a} - a_{x:\overline{n}|}^{aa} \tag{13.2.7}$$

となる。この式の右辺は、x 歳の就業者が生存する限り支払われる年金から、彼が就業する限り支払われる年金を除いたものの現価を表わすが、それがすなわち就業不能となって生存する限り支払われる年金の現価であることを、この式は示している。右辺の2項にそれぞれ1を足して次

のように期始払年金を用いた式もできる。

$$a_{x:\overline{n}|}^{ai} = \ddot{a}_{x:\overline{n+1}|}^{a} - \ddot{a}_{x:\overline{n+1}|}^{aa} \tag{13.2.8}$$

$a_{x:\overline{n}|}^{a(i:\overline{m}|)}$ については、　$a_{x:\overline{n}|}^{ai}$ から m 年以降に就業不能となる者に支給される年金を除けばよいから、次のようになる。

$$a_{x:\overline{n}|}^{a(i:\overline{m}|)} = a_{x:\overline{n}|}^{ai} - v^m {}_mp_x^{aa}\, a_{x+m:\overline{n-m}|}^{ai} \tag{13.2.9}$$

$v^m {}_mp_x^{aa}$ の代わりに $\dfrac{D_{x+m}^{aa}}{D_x^{aa}}$ としてもよい。

$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{aa}$ と $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{i}$ について $\dfrac{1}{k}$ ずつ年 k 回支払とする場合は、第 4 章 §4の末尾で述べたように、(ただし微小な第 3 項を省略して)次の近似式を用いることができる。

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{aa(k)} \fallingdotseq \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{aa} - \frac{k-1}{2k}\left(1 - v^n {}_np_x^{aa}\right) \tag{13.2.10}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{i(k)} \fallingdotseq \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{i} - \frac{k-1}{2k}\left(1 - v^n {}_np_x^{i}\right) \tag{13.2.11}$$

($\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{a}$ と $a_{x:\overline{n}|}^{ai}$ については本章 練習問題の（ 5 ）参照)

§ 3　就業不能に対する諸給付

これについてはいくつかの例によって計算の方法を示すこととする。

（ 1 ）　就業不能一時給付金

就業者が n 年以内に就業不能となれば、一時給付金 1 を直ちに支払って契約が消滅する場合を考える。(死亡者には支払わないとする) その時の一時払保険料を $\overline{A}_{x:\overline{n}|}^{(i)}$ とすると

$$\overline{A}_{x:\overline{n}|}^{(i)} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{v^{t+\frac{1}{2}}\, i_{x+t}}{l_x^{aa}} = \frac{\overline{M}_x^{(i)} - \overline{M}_{x+n}^{(i)}}{D_x^{aa}} \tag{13.3.1}$$

である。この保険の保険料を年払とする時は、被保険者が就業している限り払込が続けられるので

$$\bar{P} = \frac{\bar{A}^{(i)}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{aa}_{x:\overline{n}|}} = \frac{\bar{M}^{(i)}_{x} - \bar{M}^{(i)}_{x+n}}{N^{aa}_{x} - N^{aa}_{x+n}} \tag{13.3.2}$$

となる。その時の責任準備金は将来法により次式で与えられる。

$${}_{t}\bar{V} = \bar{A}^{(i)}_{x+t:\overline{n-t}|} - \bar{P}\ddot{a}^{aa}_{x+t:\overline{n-t}|} \tag{13.3.3}$$

死亡には保険金1を支払い、死亡前に就業不能になれば一時給付金1を支払って契約が消滅する保険では、一時払保険料は

$$\bar{A} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{v^{t+\frac{1}{2}}(d^{aa}_{x+t} + i_{x+t})}{l^{aa}_{x}}$$

$$= \frac{(\bar{M}^{aa}_{x} - \bar{M}^{aa}_{x+n}) + (\bar{M}^{(i)}_{x} - \bar{M}^{(i)}_{x+n})}{D^{aa}_{x}} \tag{13.3.4}$$

となる。この契約の年払保険料は一時払保険料を $\ddot{a}^{aa}_{x:\overline{n}|}$ で割って得られる。責任準備金は（13. 3. 3）と同様の式で与えられる。しかしこの場合の簡単な処理方法は、本章の始めにも述べたように、就業不能も死亡と同一視して $d^{aa}_{x} + i_{x}$ を通常の生命表の d_x とみなすことである。そうすれば通常の生命表を用いる方法と全く同じ計算ができる。（ただし死亡保険金と就業不能一時給付金とが等しい場合に限る）

一般に本節あるいは次節以下に述べる諸給付のように就業不能率を使用する場合には、予定の就業不能率の定め方によって保険価格がかなり変動する。またその予定率自身も死亡率のように安定したものでないので、あらかじめ予定率を何割か変動させて保険価格を計算しておき、予定率変動の影響を調べておくのがよい。

（２）　保険料払込免除特約

就業者である x 歳の被保険者が全期払込 n 年満期養老保険に加入している。この保険に特約を付け、彼が y 歳（例えば60歳あるいは65歳とし、かつ $y-x \leq n-1$ とする）に到達する前に就業不能になれば、それ以後の保険料払込を免除することとした。いま養老保険の年払(営業)保険料を P' とすると、この特約の一時払純保険料は

$$P' a_{x:\overline{n-1}|}^{a(i:\overline{y-x}|)} \tag{13.3.5}$$

となり、この中の年金現価は（13.2.9）を用いて計算される。

特約保険料を年払とする時は、その払込期間を y 歳までとするべきであるから

$$P_x^D = P' a_{x:\overline{n-1}|}^{a(i:\overline{y-x}|)} \div \ddot{a}_{x:\overline{y-x}|}^{aa} \tag{13.3.6}$$

が年払保険料を与える式となる。(年払の場合は、第 n 年度の就業不能に対して免除すべき保険料がないので、 n 回目の特約保険料は無意味であり、従って初めから特約保険料の払込は高々 $n-1$ 回とされる)

責任準備金は、就業者と就業不能者に分けて積まねばならない。 t 年後($t < y-x < n$)の就業者に対する責任準備金は将来法により

$$P' a_{x+t:\overline{n-1-t}|}^{a(i:\overline{y-x-t}|)} - P_x^D \ddot{a}_{x+t:\overline{y-x-t}|}^{aa} \tag{13.3.7}$$

であり、また就業不能者に対する責任準備金は、その者が将来払込むべき養老保険の保険料の現価であるので

$$P' \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}^{i} \tag{13.3.8}$$

となる。

ただし年払保険料 P^D が極めて小額である場合には、細かい計算を省いて近似値として P' の一定割合(例えば 0.2%)を付加することもある。

（３）　就業不能年金特約

（２）と同じようなケースで、被保険者が y 歳（この場合は $y-x \leq n$ ）に到達するまでに就業不能になれば、その年度末から第 n 年度末まで生存中年額 K の年金を支給する特約を考えよう。（ただし就業不能後も死亡までは養老保険の保険料を支払うものとする。それを避けるにはこの特約を（２）の特約に組み合わせればよい）この特約の一時払純保険料は

$$K\, a_{x:\overline{n}|}^{a(i:\overline{y-x}|)} \tag{13.3.9}$$

であり、これを年払とする時は

$$P_x^D = K a_{x:\overline{n}|}^{a(i:\overline{y-x}|)} \div \ddot{a}_{x:\overline{y-x}|}^{aa} \tag{13.3.10}$$

となる。また就業不能年金を終身年金とする時は、上の２式で添字 $x:\overline{n}|$ を x に換える。

責任準備金は、就業者については将来法により

$$K a_{x+t:\overline{n-t}|}^{a(i:\overline{y-x-t}|)} - P_x^D\, \ddot{a}_{x+t:\overline{y-x-t}|}^{aa} \tag{13.3.11}$$

となり、就業不能者については

$$K\, \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t+1}|}^{i} \tag{13.3.12}$$

となる。

年金額 K が一定でなく、就業不能となった保険年度により異なる K_t （$t=0,1,2,\cdots\cdots\cdots, y-x-1$）であるならば（ただし一旦就業不能となった後の年金受領額自体は変動しない）、一時払純保険料は (13.1.15) の分子を用いて

$$\frac{1}{l_x^{aa}} \sum_{t=0}^{y-x-1} v^{t+1}\, i_{x+t} \left(1 - \frac{1}{2} q_{x+t}^{i}\right) K_t\, \ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t}|}^{i} \tag{13.3.13}$$

となる。 $i_{x+t}\left(1-\dfrac{1}{2}\,q^{i}_{x+t}\right)$ の代わりに（13.1.17）の分子

$l^{ii}_{x+t+1}-l^{ii}_{x+t}\,p^{i}_{x+t}$ を用いてもよい。

特約ではなく、一種の年金保険として、x 歳の就業者が退職年齢 y 歳までに就業不能になれば上記の額 K_t の年金を終身支給し、また就業のまま y 歳に到達すればそこから年額 K の終身年金を支給する契約を考えよう。その場合の一時払純保険料は、（13.3.13）の式中で $\ddot{a}^{i}_{x+t+1:\overline{n-t}|}$ を $\ddot{a}^{i}_{x+t+1}$ としたものに、$K\,\dfrac{D^{aa}_{y}}{D^{aa}_{x}}\,\ddot{a}^{a}_{y}$ を加えたものとなる。年払保険料はそれを $\ddot{a}^{aa}_{x:\overline{y-x}|}$ で割る。

（４）　保険金分割前払特約

就業している x 歳の被保険者が全期払込 n 年満期養老保険に加入しており、彼が満期までに就業不能になれば、その年度末から死亡保険金または満期保険金をあらかじめ定めた年数で分割前払するとしよう。例えば毎年保険金の１割ずつを10年間支払うとする。そしてその後の死亡時または満期到来時に未払の保険金があれば、その時点で残額は一時に支払われるとする。一般に保険金の $\dfrac{1}{h}$ ずつ h 年間に支払うとして、この特約の一時払純保険料を求めてみよう。

まずこの被保険者が $x+t$ 歳と $x+t+1$ 歳の間で就業不能となり、$t+h<n$ である（すなわち満期時より前に分割保険金を払い終わる）場合をとろう。この時 $x+t+1$ 歳における第１回の支払額については、本来ならば死亡または満期の時点で支払われる額の現価

$$\frac{1}{h}\,A^{i}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}=\frac{1}{h}\,\frac{M^{i}_{x+t+1}-M^{i}_{x+n}+D^{i}_{x+n}}{D^{i}_{x+t+1}}$$

を、 $x+t+1$ 歳の時点で $\dfrac{1}{h}$ にして支払うから、その時点において

$$\frac{1}{h}(1-A^{i}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|})$$

の損失があることになる。(4.9.6) および (13.2.2) によればこれは

$$\frac{d}{h}\ddot{a}^{i}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}=\frac{d}{h}\frac{N^{i}_{x+t+1}-N^{i}_{x+n}}{D^{i}_{x+t+1}}$$

に等しい。第2回以後第 h 回までの支払額についても、それを早めて支払ったための損失額は同様に計算されるので、それら全部を $x+t+1$ 歳の時点の値にして加えた額、すなわち

$$\frac{d}{h}\sum_{s=1}^{h}v^{s-1}\,{}_{s-1}p^{i}_{x+t+1}\,\ddot{a}^{i}_{x+t+s:\overline{n-t-s}|}=\frac{d}{h}\sum_{s=1}^{h}\frac{N^{i}_{x+t+s}-N^{i}_{x+n}}{D^{i}_{x+t+1}}$$

$$=\frac{d}{h}\frac{N^{i}_{x+t+1}+N^{i}_{x+t+2}+\cdots\cdots+N^{i}_{x+t+h}-h\,N^{i}_{x+n}}{D^{i}_{x+t+1}}$$

は、 $x+t$ 歳で就業不能となった者へ保険金を前払支払するための損失額の $x+t+1$ 歳における値である。

また $t+h\geq n$ の場合は、満期時に支払う何回分かについては損失を生じないから、 $x+t+1$ 歳の時点における損失額は

$$\frac{d}{h}\sum_{s=1}^{n-t-1}v^{s-1}\,{}_{s-1}p^{i}_{x+t+1}\,\ddot{a}^{i}_{x+t+s:\overline{n-t-s}|}=\frac{d}{h}\sum_{s=1}^{n-t-1}\frac{N^{i}_{x+t+s}-N^{i}_{x+n}}{D^{i}_{x+t+1}}$$

$$=\frac{d}{h}\frac{N^{i}_{x+t+1}+\cdots\cdots+N^{i}_{x+n-1}-(n-t-1)N^{i}_{x+n}}{D^{i}_{x+t+1}}$$

となる。このような損失額のそれぞれに対しその発生確率と v^{t+1} を掛けて、 t について和をとればこの特約の一時払純保険料が得られ、それは

$$\sum_{t=0}^{n-h-1} v^{t+1}\ {}_tp_x^{aa}\ p_{x+t}^{ai}\ \{\frac{d}{h}\ \frac{N_{x+t+1}^{i}+\cdots\cdots+N_{x+t+h}^{i}-hN_{x+n}^{i}}{D_{x+t+1}^{i}}\}$$

$$+\sum_{t=n-h}^{n-2} v^{t+1}\ {}_tp_x^{aa}\ p_{x+t}^{ai}\ \{\frac{d}{h}\ \frac{N_{x+t+1}^{i}+\cdots\cdots+N_{x+n-1}^{i}-(n-t-1)N_{x+n}^{i}}{D_{x+t+1}^{i}}\}$$

となる。 $v^{t+1}\ {}_tp_x^{aa}\ p_{x+t}^{ai}$ は $\frac{1}{D_x^{aa}}\ v\,D_{x+t}^{aa}\ p_{x+t}^{ai}$ と書いてもよい。年払保険料はこれを $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{aa}$ で割って求める。

（文献〔1〕下巻 pp. 125-157 には、本節の諸給付に関するさらに詳細な記述がある）

§4　複雑な遺族年金

先に第１２章§６で寡婦年金について比較的簡単な場合の計算を示したが、ここでは寡婦の再婚や、夫の就業不能を考慮する複雑なケースを取り上げる。

寡婦について、彼女が再婚した場合には年金支給を打ち切るという契約が行われた場合には、保険料の計算に年齢別の再婚率が必要になる。すなわち寡婦ばかりの副集団（閉集団）を考え、そこからの脱退原因が死亡および再婚である２重脱退表が必要となる。その表で y 歳の寡婦の生存者数を l_y^w 、y 歳における死亡者数を d_y^w 、y 歳における再婚者数を h_y^w で表わすと

$$l_{y+1}^w = l_y^w - d_y^w - h_y^w \qquad (13.4.1)$$

という関係がある。y 歳における絶対死亡率および絶対再婚率が与えられている場合に２重脱退表を作成するには（3.2.6）を利用する。

このような２重脱退表を用いて、寡婦が死亡あるいは再婚するまで最長 n 年間にわたり毎年１ずつ支給する期始払年金の現価を求めるには

$$ {}_tp_y^w = \frac{l_{y+t}^w}{l_y^w} $$

として

$$ \ddot{a}_{y:\overline{n|}}^w = \sum_{t=0}^{n-1} v^t\ {}_tp_y^w \tag{13.4.2} $$

となる。年 k 回払の年金ならば、第4章§4の末尾で述べたように次式が得られる。

$$ \ddot{a}_{y:\overline{n|}}^{w(k)} \fallingdotseq \ddot{a}_{y:\overline{n|}}^w - \frac{k-1}{2k}\,(1 - v^n\ {}_np_y^w) \tag{13.4.3} $$

次に n 年内に寡婦が再婚した場合に一時金1を支給する時には、その一時払保険料は（一時金即時支払として）

$$ \overline{A}_{y:\overline{n|}}^{wh} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+\frac{1}{2}}\ \frac{h_{y+t}^w}{l_y^w} \tag{13.4.4} $$

である。従って y 歳の寡婦に即時開始で年金額1の生命年金を n 年後まで（従って $n+1$ 回）与えるとともに、もし寡婦が n 年内に再婚した場合には年金額の λ 倍を支給して契約を消滅させる時には、その一時払保険料(支給の現価）は年金額1を基準として

$$ \ddot{a}_{y:\overline{n+1|}}^W = \ddot{a}_{y:\overline{n+1|}}^w + \lambda\,\overline{A}_{y:\overline{n|}}^{wh} \tag{13.4.5} $$

となる。年金が年 k 回支払ならば、この式の両辺での年金現価をそれぞれ $\ddot{a}_{y:\overline{n+\frac{1}{k}|}}^{W(k)}$ および $\ddot{a}_{y:\overline{n+\frac{1}{k}|}}^{w(k)}$ で置き換える。また終身保障とするならば $n \to \infty$ とする。

次にこれを次第に複雑にした種々のケースを考えてみよう。

（1）　夫 (x) と妻 (y) の復帰年金で、夫が先に死亡しかつ死亡の年度

末に妻が生存している場合に、妻に対し上記のような年金および一時金を与える（ただし年金は契約から n 年経過後で打ち切る）契約においては、その一時払保険料は第１２章§６の $a_{x|y:\overline{n}|}$ を与える式（12.6.1）と同様に

$$a^{W}_{x|y:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q_x \; {}_tp_y \; v^t \; \ddot{a}^{W}_{y+t:\overline{n-t+1}|} \qquad (13.4.6)$$

となる。この契約の年払保険料は $a_{x|y:\overline{n}|}$ の時と同じく一時払保険料を $\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}$ で割る。

夫が先に死亡したその時点から直ちに妻に支給を開始する場合には、（12.6.24）と同様に

$$\hat{a}^{W}_{x|y:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q_x \;\; {}_{t-\frac{1}{2}}p_y \; v^{t-\frac{1}{2}} \; \ddot{a}^{W}_{y+t-\frac{1}{2}:\overline{n-t+1}|} \qquad (13.4.7)$$

とするが、ここに右辺の $\ddot{a}$ は

$$\ddot{a}^{W}_{y+t-\frac{1}{2}:\overline{n-t+1}|} = \ddot{a}^{w}_{y+t-\frac{1}{2}:\overline{n-t+1}|} + \lambda \bar{A}^{wh}_{y+t-\frac{1}{2}:\overline{n-t+\frac{1}{2}}|} \qquad (13.4.8)$$

によって与えられ、さらにこの式の右辺は次式で与えられる。

$$\ddot{a}^{w}_{y+t-\frac{1}{2}:\overline{n-t+1}|} = \frac{\ddot{a}^{w}_{y+t-1:\overline{n-t+1}|} + \ddot{a}^{w}_{y+t:\overline{n-t+1}|}}{2}$$

$$\bar{A}^{wh}_{y+t-\frac{1}{2}:\overline{n-t+\frac{1}{2}}|} = \frac{\bar{A}^{wh}_{y+t-1:\overline{n-t+1}|} + \bar{A}^{wh}_{y+t:\overline{n-t}|}}{2}$$

以下においてはさらに夫の就業不能を考慮するが、その際（13.4.7）の場合のように、給付開始の条件が発生すれば直ちに給付が行われるものとする。

（２）（１）において夫 (x) が就業不能者である場合には、（13.4.7）

にあたる一時払保険料は、就業不能者生命表 $\{l_x^i\}$ を用いて

$$\hat{a}_{x|y:\overline{n|}}^{iW}=\sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q_x^i\ {}_{t-\frac{1}{2}}p_y\ v^{t-\frac{1}{2}}\ddot{a}_{y+t-\frac{1}{2}:\overline{n-t+1|}}^{W} \tag{13.4.9}$$

（3）　（1）において夫 (x) が就業者であり、彼が就業のまま死亡した時に同じ給付を寡婦に与える場合には

$$\hat{a}_{x|y:\overline{n|}}^{aaW}=\sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q_x^{aa}\ {}_{t-\frac{1}{2}}p_y\ v^{t-\frac{1}{2}}\ddot{a}_{y+t-\frac{1}{2}:\overline{n-t+1|}}^{W} \tag{13.4.10}$$

（4）　（1）において夫 (x) が就業者であり、彼が就業不能となった時に同じ給付を妻に与える場合には

$$\hat{a}_{x|y:\overline{n|}}^{IW}=\sum_{t=1}^{n} \frac{i_{x+t-1}}{l_x^{aa}}\ {}_{t-\frac{1}{2}}p_y\ v^{t-\frac{1}{2}}\ddot{a}_{y+t-\frac{1}{2}:\overline{n-t+1|}}^{W} \tag{13.4.11}$$

（5）　（3）と（4）を組み合わせる。すなわち現在就業中の夫 (x) が死亡あるいは就業不能となった時に、妻 (y) に（13.4.5）で表わされるような給付を与える契約では、その一時払保険料は

$$\hat{a}_{x|y:\overline{n|}}^{(a+I)W}=\hat{a}_{x|y:\overline{n|}}^{aaW}+\hat{a}_{x|y:\overline{n|}}^{IW} \tag{13.4.12}$$

夫 (x) の死亡あるいは就業不能までの経過年数(例えば勤続年数）により給付率が異なり β_t である場合には、(13.4.10）および（13.4.11）の右辺の $\ddot{a}^W$ に β_t を掛ける。

年払保険料については、就業の夫と妻との共存期間中保険料が払込まれるものとし、$\{l_x^{aa}\}$ と $\{l_y\}$ とから作られた $\ddot{a}_{xy:\overline{n|}}^{aa}$ で一時払保険料を割る。

これまでの展開において、妻 (y) の代わりに y' 歳の子供をとり、従って再婚率を 0 とし、また n の代わりに所定の年齢 z（18歳とか22歳とか)になるまでの期間 $z-y'$ をとると、(13.4.12）によって父の死亡

あるいは就業不能による遺児年金の計算ができる。

（文献〔7〕，〔10〕，〔11〕には遺族年金に関するさらに詳細な記述がある）

第１３章　練習問題

（１）　本章§1で例示した死亡・就業不能脱退残存表に基づいて

q_{40}^{aa},　$q_{40}^{(i)}$,　q_{40}^{aa*},　$q_{40}^{(i)*}$,　q_{40}^{ii},　q_{40}^{i},　p_{40}^{i},　${}_3p_{40}^{aa}$,　q_{40}^{a},　p_{40}^{ai}

を計算せよ。また q_{41}^{i}, q_{42}^{i} を計算して ${}_3p_{40}^{i}$ を導き、それを用いて ${}_3p_{40}^{ai}$, ${}_3p_{40}^{a}$, ${}_3q_{40}^{a}$ を計算せよ。

（２）　x を任意の実数とし、就業者集団での年齢 x における瞬間脱退率を μ_x 、また瞬間死亡率および瞬間就業不能率を $\mu_x^{(aa)}$ および $\mu_x^{(i)}$ とすると

$$\mu_x = \mu_x^{(aa)} + \mu_x^{(i)}$$

$$d_x^{aa} = \int_0^1 l_{x+t}^{aa}\ \mu_{x+t}^{(aa)}\,dt$$

$$i_x = \int_0^1 l_{x+t}^{aa}\ \mu_{x+t}^{(i)}\,dt$$

である。このことを確かめよ。

（３）　就業者 (x) が期間 $[t, t+1]$ $(0 \leqq t \leqq n-1)$ の間で就業不能となれば、その年度末から生存中、ただし契約時点から n 年後まで年金が与えられる。その年金の現価を表わす式を書け。

また得られた式を $t = 0, 1, \cdots\cdots\cdots, n-1$ について加えれば (13.2.6) に一致することを示せ。

（４）
$$a_{x:\overline{n}|}^{ai}=\frac{N_{x+1}^{ii}-N_{x+n+1}^{ii}-D_x^{ii}\,a_{x:\overline{n}|}^{i}}{D_x^{aa}}$$

$$a_x^{ai}=\frac{N_x^{ii}-D_x^{ii}\,\ddot{a}_x^{i}}{D_x^{aa}}$$

を証明せよ。

（５）
$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{a(k)}=\frac{1}{k}\sum_{t=0}^{nk-1}v^{\frac{t}{k}}\,{}_{\frac{t}{k}}p_x^{a}$$

$$a_{x:\overline{n}|}^{ai(k)}=\frac{1}{k}\sum_{t=1}^{nk}v^{\frac{t}{k}}\,{}_{\frac{t}{k}}p_x^{ai}$$

とすれば、次の近似式ができることを証明せよ。

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{a(k)}=\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{a}-\frac{k-1}{2k}(1-v^n\,{}_np_x^{a})$$

$$a_{x:\overline{n}|}^{ai(k)}=a_{x:\overline{n}|}^{ai}-\frac{k-1}{2k}\,v^n\,{}_np_x^{ai}$$

（６）　就業者(x)が就業不能となり、n年以内に死亡したとき保険金１をその年度末に支払う契約の一時払保険料は

$$A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}^{ai}=\frac{M_x^{ii}-M_{x+n}^{ii}-D_x^{ii}\,A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}^{i}}{D_x^{aa}}$$

であることを示せ。((13.1.26) を用いる)

（７）

① 被保険者が死亡するか要介護状態になった時その年度末に一時金Jを給付して消滅する保険、と

② 被保険者の介護不要な生存に対し年額Kの期始払終身年金を給付し、また要介護状態になった時にはその年度末に一時金Lを給付して消滅する保険

とがある。両者の一時払保険料がすべての年齢で等しくなる場合に d_x^{aa} を l_x^{aa} と l_{x+1}^{aa} を用いて表わせ。

（8）介護不要者 (x) が75歳までに要介護状態になればその年度末から年額Kの終身年金の支給を開始し、介護不要状態のまま75歳に到達すればその時点から無条件に同額の終身年金の支給を開始する。また死亡に際しては $3K$の一時給付を死亡時に支給するものとする。このような契約の一時払保険料を表わす式をつくれ。

また年払保険料は被保険者が75歳到達前で介護不要状態であるかぎり払い込むものとして、年払保険料を表わす式をつくれ。

年払の場合の責任準備金はどうなるか。

（9） 就業者である被保険者がn年以内に就業不能になれば、その年度末から第n年度末まで保険年度により異なる年金 K_t（$t = 1, 2, \cdot\cdot\cdot, n$）を支給し、またそれ以後は毎年$K$の年金を終身支給する場合の年金現価を求めよ。

また年払保険料はn年以内で被保険者が就業している限り支払うものとして、その場合の責任準備金の式を書け。

（10） 就業者の夫 (x)と妻 (y)を被保険者とする次のような契約がある。

（a） (x) が10年以内に死亡すれば、保険年度により異なる死亡給付金 α_t（ $t = 1, 2, \cdots, 10$ ）を支給する。

（b） (x) が10年以内に就業不能となれば、保険年度により異なる一時給付金 β_t（ $t = 1, 2, \cdots, 10$ ）を支給する。

（c） (x) が10年以後に死亡して、その時 (y) が既に死亡していれば、死亡給付金 λ を支給する。

（d） (x) が10年以後に就業不能となり、その時 (y) が既に死亡していれば、(x) に対し年額 ν_1 の終身年金を直ちに開始する。

（e） (x) が10年以後に死亡または就業不能となり、その時に (y) が生存していれば、年額 ν_2 の寡婦終身年金を直ちに開始するとともに、再婚の際は $\alpha\nu_2$ の一時金を支払って寡婦年金を打ち切る。

このような契約について、使用する脱退残存表を考え、また一時払保険料を求めよ。

第14章　災害および疾病に関する保険

§1　災害に関連する保険

被保険者が災害により身体に障害を受けた場合の保険の対象として考えられるものには

（1）　災害死亡

（2）　災害による身体障害

（3）　災害による入院

（4）　災害による就業不能

がある。わが国の生命保険会社では、通常（1）～（3）を別々に、あるいはその二つ以上を組み合わせて、主契約に付加する特約として販売している。（4）の計算については前章で述べたと同様である。

統計によって災害による事故発生率が年齢により若干異なることが知られているが、通常は発生率は年齢に関係しないものとして（男女別は考慮されることがある）、諸給付の保険料を1年定期保険と同様に計算する。すなわち（1）の災害死亡については、1年間の災害死亡発生率を q^{ad} として、災害死亡に対する1年間の純保険料は

$$v^{\frac{1}{2}}q^{ad} \tag{14.1.1}$$

によって計算される。

（2）の身体障害に関しては、その程度の重いものから順に1級ないし6級の障害等級に分けられ、等級に応じて給付金額も異なるが、今各

等級の１年間の発生率を $q^1, q^2 \cdots\cdots\cdots, q^6$ とし、その支払率（通常は１級に対する支払を１とし、他の等級は１級の何割として表現する）を $\gamma_1, \gamma_2 \cdots\cdots\cdots, \gamma_6$ とすれば、身体障害に対する１年間の純保険料は

$$v^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{6} q^j \gamma_j \tag{14.1.2}$$

である。

重度の身体障害の場合に、以後の主契約保険料および（１），（２）の特約保険料の払込を免除するという特約が設けられることもある。

（３）の災害入院に関しては、その１年間の発生率を q^{ah} とし、入院した場合の給付金の日額を δ とし、平均給付日数を T とすれば、それに関する１年間の純保険料は

$$v^{\frac{1}{2}} q^{ah} T\delta \tag{14.1.3}$$

である。なお、① 極めて短期の入院（例えば4日以内）については不支給とすることが多いが、その場合は q^{ah} についても T についてもそのような入院を除外して計算したものを用い、② 在院日数から一定日数（例えば4日）を控除して給付日数とすることが多いが、その場合は T はそのような給付日数の平均とし、③ 最長の給付日数（例えば120日）を定める場合には、それを超過する在院については最長給付日数に止どめて q^{ah} および T を計算する。

入院の純保険料に関しては、例えば入院４日以内は支給対象外、給付は入院日数から４日分カット、最長給付120日の場合について、各入院日数毎の発生率　q^{ahi} $(i= 5, 6, 7, \cdots\cdots\cdots)$ をとり

$$v^{\frac{1}{2}} \sum_{i=5}^{124} q^{ahi} (i-4)\delta + v^{\frac{1}{2}} \sum_{i \geq 125} q^{ahi} \times 120 \times \delta$$

とすることも考えられるが、これは（14.1.3）と同じになる。何故なら

ば

$$\sum_{i \geq 5} q^{ahi} = q^{ah}$$

$$T = \sum_{i=5}^{124} \frac{q^{ahi}}{q^{ah}} (i-4) + \sum_{i \geq 125} \frac{q^{ahi}}{q^{ah}} \times 120 \tag{14.1.4}$$

であるが、後の式から

$$q^{ah} T = \sum_{i=5}^{124} q^{ahi} (i-4) + \sum_{i \geq 125} q^{ahi} \times 120$$

となるからである。

営業保険料は通常純保険料率に定数を加えて定められる。

また年齢に関係しない災害発生率を用いる場合には、保険料は１年定期保険のそれと同じと考えられるので、事業年度末の責任準備金としては未経過保険料のみが計上される。ただし入院中契約に対する今後の支払額を予想して責任準備金に加えることもある。

§2　疾病入院給付

疾病に関しては種々のタイプの保険が考えられているが、給付によって分類すると、主なものは

（１）　入院日額給付

（２）　疾病日額給付

（３）　手術費給付

（４）　医療費給付

（５）　看護給付、リハビリ給付、介護給付 等

である。（１）は入院という事実に基づいてあらかじめ約定した一定の日額を支給するものであり、（２）は入院に限らず疾病と認定された場合に一定の日額を支給するものである。（３）に関しては、手術の種類

によってあらかじめ定めた一定額を支給する場合と、費用の実費に見合うよう詳しく定めた一定額（例えば診療報酬表等に基づく額）を支給する場合とがある。（４）についても（３）と同様である。（５）のうち介護給付は前章で述べたものであり、他の二つの給付は日額給付とされることが多く、その場合の計算は（１）の場合に準じて行なわれる。なお疾病の種類によって分類すると、あらゆる疾病に関して上記の給付を行う場合と、ガン等の特定の疾病を対象として給付を行う場合とがある。ここでは前者を念頭に計算の方法を説明するが、後者については発生率が小さくなるだけで計算方法自体は変わりがない。

本節ではわが国で最もよく行なわれている（１）の場合を取り上げよう。疾病に関しては前節の災害の場合と異なり、年齢別に発生率がかなり相異することに注目しなければならない。（場合によっては男女別も考える）　疾病では死亡率と同じく一般に年齢が進むに従って発生率が高くなる。そのことを考慮してこの保険あるいは（主契約に付加して締結される）特約においては、保険料を１年更改とせずに、通常保険期間 n 年（特約の場合は主契約の保険期間と一致させるか、あるいは一定の到達年齢で打ち切る）として平準保険料で契約する。今年齢 x 歳の被保険者について、その後１年間の入院率を q_x^{sh} とし、入院した場合の平均給付日数を T_x^{sh} としよう。（ただし前節の注意 ① ～ ③ はこの場合にもあてはまる）その時には入院給付金日額１に対する年払平準純保険料は

$$P = \frac{\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+\frac{1}{2}}\, {}_tp_x\, q_{x+t}^{sh}\, T_{x+t}^{sh}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{14.2.1}$$

で与えられる。今（4.10.1）を修正して

$$\overline{D}_x = v^{x+\frac{1}{2}}\, l_x$$

という記号を導入しておけば、(2.2.1) と (4.3.13) を用いて、次のように書くこともできる。

$$P=\frac{\sum_{t=0}^{n-1}\overline{D}_{x+t}\,q_{x+t}^{sh}\,T_{x+t}^{sh}}{N_x-N_{x+n}} \tag{14.2.2}$$

このように n 年の保険に平準保険料を採用した場合には、定期保険の場合と同じ理由で責任準備金の積立が必要になるが、それは将来法により

$$ {}_tV=\sum_{r=0}^{n-t-1}v^{r+\frac{1}{2}}\,{}_rp_{x+t}\,q_{x+t+r}^{sh}\,T_{x+t+r}^{sh}-P\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} \tag{14.2.3}$$

$$=\frac{1}{D_{x+t}}\left\{\sum_{r=0}^{n-t-1}\overline{D}_{x+t+r}\,q_{x+t+r}^{sh}\,T_{x+t+r}^{sh}-P(N_{x+t}-N_{x+n})\right\} \tag{14.2.4}$$

で与えられる。

営業保険料や事業年度末責任準備金については生命保険の場合に準じて考える。ただし災害入院の場合と同じく、入院中契約に対する今後の支払額を予想して責任準備金に加えることもある。

わが国では（３）の手術費給付も行われている。その給付は手術の種類により段階があるものの、手術の発生率については年齢によらず一律としているので、数理的計算の構造は§１の災害による身体障害の場合と同じである。

またわが国では医療保障保険という名称で死亡保険金に治療給付金、入院給付金、看護給付金を組合わせた保険が行なわれているが、このうちの治療給付金はわが国独特のもので、公的医療保険制度からの給付に伴う自己負担額をカバーしようとするものである。計算は疾病入院給付金と同様で、発生率に発生した場合の平均的な自己負担金支払額を掛けたものを (14.2.1) の qT のかわりに用いて計算する。

§3　医療費給付

本節では、公的医療保険の補完でなく民間部門の独立商品としての医療費保険を念頭に置くこととし、外国の例を参考に、保険料等の計算方法を説明する。医療費給付については、まずその契約でどのような範囲の医療費を補塡するのかを明確に定めておく必要がある。例えば通院治療まで認めるのか、小額医療費の控除をどの程度とするのか、あるいは高額医療保険であればどのような高額医療を対象とするのか等を明確に定めて給付に当たってのトラブルを避けねばならない。

補塡の範囲が確定すれば、それに基づく医療費の年間請求総額を被保険者総数で割った「1人当たり年間請求額」を観察し、その統計を作成しておく。（あるいは疾病入院給付の場合のように、発生率と発生した場合の平均給付額で統計を作成してもよい）　この統計は通常、男女別、年齢別に作成する。資料数の関係から5歳年齢群団で作成することもあるが、その時は適当な補整で年齢別にしておく。

この統計によって x 歳の男子あるいは女子の1人当たり年間請求額 K_x が分れば、それが1年定期医療費保険の純保険料である。通常 K_x は年齢とともに上昇する。

長期契約の場合は、期間途中で失効する危険が大きくそれが保険料に及ぼす影響も無視できないので、通常は被保険者についての単純な生命表ではなく第3章§3で述べた死亡解約脱退残存表を使用することが多い。（前節の疾病入院給付金についてもこれを独立商品とする時はそうした方がよい）　すなわち残存者数が（3.3.1）の

$$l_{x+1} = l_x - d_x - w_x$$

で与えられるような脱退残存表を使用する。その表で

$$D_x = v^x l_x, \quad N_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} D_{x+t}, \quad \overline{D}_x = v^{x+\frac{1}{2}} l_x$$

等を計算しておくと、まず一時払保険料 A については

$$l_x A = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+\frac{1}{2}} l_{x+t} K_{x+t}$$

を解いて

$$A = \frac{\sum_{t=0}^{n-1} \overline{D}_{x+t} K_{x+t}}{D_x} \tag{14.3.1}$$

となる。また年払平準保険料は (14.2.1), (14.2.2) と同様に

$$P = \frac{\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+\frac{1}{2}} {}_t p_x K_{x+t}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \tag{14.3.2}$$

$$= \frac{\sum_{t=0}^{n-1} \overline{D}_{x+t} K_{x+t}}{N_x - N_{x+n}} \tag{14.3.3}$$

となる。平準保険料を採用した場合の責任準備金についても前節と同様に将来法により

$${}_tV = \sum_{r=0}^{n-t-1} v^{r+\frac{1}{2}} {}_r p_{x+t} K_{x+t+r} - P \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} \tag{14.3.4}$$

$$= \frac{1}{D_{x+t}} \left\{ \sum_{r=0}^{n-t-1} \overline{D}_{x+t+r} K_{x+t+r} - P(N_{x+t} - N_{x+n}) \right\} \tag{14.3.5}$$

となる。

なおこのような医療実費を補償する保険では、高度医療の普及あるいは物価上昇に伴い将来 K_x が上昇することも考慮しておかねばならない。

第１４章　練習問題

（１）　保険金額１,営業保険料 π_1 の養老保険がある。これに純保険料が（14.1.1）および（14.1.2）で与えられるような災害給付に関する特約を営業保険料 π_2 で付加し、さらに第２の特約として身体障害１級および２級については以後のすべての保険料の払込を免除するものを付加した。第２の特約には付加保険料がないとして、その平準純保険料を計算する方法を考えよ。

（２）　次のような条件で x 歳契約、期間 n 年の入院給付金特約が締結された。

① 災害入院に関しては、6日以上の入院に限り、在院日数から5日を引いた日数に対し日額 δ を支給し、支給は120日を限度とする。

② 疾病入院に関しては、21日以上の入院に限り、在院日数から20日を引いた日数に対し日額 δ を支給し、支給は120日を限度とする。
ただし契約締結の日から6ヶ月以内に発生した疾病に対しては給付を行わない。

③ 期間中に入院給付金を全く請求せずに満期となった契約に対しては、満期時に5年分の特約保険料を返還する。

① および ② について支給する場合の平均給付日数を定める式を書き、それを用いて年払保険料を与える式を導け。ただし x 歳で災害または疾病により初めて入院給付金を受給する確率を $\overline{q}_x^h$ とし、また営業保険料と純保険料とは $P^* = P + C$　（Cは定数）という関係にあるとする。

第15章　団体定期保険

§1　数理的構成

団体保険とは

①　一つの団体の構成員の全部または一部を被保険者とする。ただし一部を被保険者とする時は、その範囲を明確に定義される者の全員であることが条件となる。（団体がかなりの多人数である時はある最低の加入率を満たした被保険者集団でも扱う。これを任意加入団体という）

②　被保険者に付せられる保険金額は客観的基準によって定める。

③　個々の被保険者の医的診査は原則として省略する。

④　保険料は団体を通じて一括して払込まれる。

⑤　配当の計算はその団体を一つの単位として行う。

といった特徴をもつ保険契約である。（よく似たものに集団扱保険があるが、これは単に多くの個別の保険の集金を一括して行うもので、本質的には個別の保険と変わりがない）

団体保険のなかでは**団体定期保険**、すなわち毎年更新される１年定期保険が最も普及しているので、数理的に見たその特徴を次に述べてみよう。説明を簡略にするため、保険金は年末支払、保険料は年始１回払とする。個人の１年定期保険であれば、その純保険料は（4.6.2）により

$$A^{\ 1}_{x:\overline{1|}} = v\,q_x \tag{15.1.1}$$

である。あるいは（4.12.2）で述べたように１年以内に被保険者の

$$
\left.\begin{array}{l}
\text{死亡がなければ0を支払う・・・・・・その確率 } p_x \\
\text{死亡があれば現価で } v \text{ を支払う・・・・その確率 } q_x \\
p_x + q_x = 1
\end{array}\right\} \qquad (15.1.2)
$$

という確率変数の平均値が $v\,q_x$ であるとみることもできる。このような被保険者が n 人いれば保険料は nvq_x である。

しかし団体定期保険では、その構成員一人一人に対する保険料 $v\,q_x$ を合わせて nvq_x を団体から収入すると考えるのではなく、保険会社と団体との次のような取引に関する平均値を保険料として収入すると考える。(結果としては同じ値になるが)　簡単のため団体は x 歳の被保険者ばかり n 人で構成されていて、各人の保険金はすべて1であるとしよう。この団体について1年以内に

$$
\left.\begin{array}{l}
\text{死亡がなければ0を支払う・・・・・その確率 } p_x^n \\
\text{死亡が1人であれば } v \text{ を支払う・・その確率 } \binom{n}{1} q_x\, p_x^{n-1} \\
\text{死亡が2人であれば } 2v \text{ を支払う・・その確率 } \binom{n}{2} q_x^2\, p_x^{n-2} \\
\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\text{死亡が } n \text{ 人であれば } nv \text{ を支払う・・その確率 } \binom{n}{n} q_x^n \\
p_x^n + \binom{n}{1} q_x\, p_x^{n-1} + \binom{n}{2} q_x^2\, p_x^{n-2} + \cdots\cdots + \binom{n}{n} q_x^n \\
\qquad = (\,p_x + q_x)^n = 1
\end{array}\right\} (15.1.3)
$$

というような確率変数がこの団体の危険を表わすものである。すなわち支払金の現価が二項分布であるような危険の引受に対し会社はその平均値

$$
\sum_{t=0}^{n} tv \binom{n}{t} q_x^t\, p_x^{n-t} = n\,v\,q_x \sum_{t=1}^{n} \binom{n-1}{t-1} q_x^{t-1}\, p_x^{n-1-t+1}
$$

$$
= n\,v\,q_x\,(\,q_x + p_x)^{n-1} = n\,v\,q_x
$$

を保険料として収入するのである。あるいは団体の構成員の各人に(15.1.2) で表わされるような確率変数 X_i ($i=1, 2, \cdots\cdots\cdots, n$)が付与されていて、 X_i がいずれも独立な時の和

$$\sum_{i=1}^{n} X_i$$

が団体の危険を表わす確率変数と考えても同じである。確率変数の和については、平均値に関し

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

が成立するから、$E(X_i)=v\,q_x$ なら左辺は nvq_x となる。

一般の場合にはこのようなモデルケースを拡張して考えることができる。n 人の団体の構成員の年齢がバラバラで、i 番目の者の年齢が x_i であり、また保険金もバラバラで、i 番目の者の保険金が S_i である時には、彼の危険を表わす確率変数は X_i を (15.1.2) のような確率変数（ただし p_x, q_x の代わりに p_{x_i}, q_{x_i} を用いる）として $S_i X_i$ で表わされる。そしてこの団体の危険を表わす確率変数は $\sum_{i=1}^{n} S_i X_i$ となり、その平均値、すなわち収入すべき保険料は

$$\sum_{i=1}^{n} S_i\, E(X_i)=\sum_{i=1}^{n} S_i\, v\, q_{x_i} \tag{15.1.4}$$

となる。

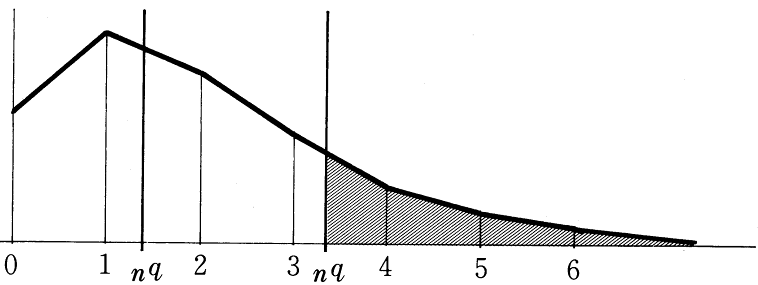
初めの簡単なモデルにおいて n が大きくなると二項分布の各項の計算はたいへん厄介になるが、よく知られているように nvq_x が10 程度（ $q_x=0.005$ なら $n=2{,}000$ ） になるまではポワソン分布でよい近似ができ、それ以上であれば正規分布でよい近似ができて、それらを

利用して必要な確率を簡易に計算することができる。($\sum S_i X_i$ についても S_i に大きなバラツキのない限り同様である。本章 練習問題の（１）参照） 標準偏差は二項分布であれば $v\sqrt{np_x q_x}$ 、ポワソン分布であれば $v\sqrt{nq_x}$（生存率 p_x が１に近いので $v\sqrt{np_x q_x}$ と殆んど変わらない)、正規分布であれば $v\sqrt{np_x q_x}$ である。($\sum S_i X_i$ の標準偏差は $v\sqrt{\sum S_i p_{x_i} q_{x_i}}$)

これまで述べた q_x を実際に経験するであろう率と考えると、純保険料の計算では通常安全のためそれよりもやや高い死亡率 q_x' を使用する。次に団体保険において高めの予定死亡率を使用する意味を考えてみよう。簡単のために（15.1.3）で支払金が表わされるような団体をとり、また今後は v をはずして、すなわち１年後の終価で考えることにする。これまで述べた q_x が母集団の真の死亡率を表わすとし､また n が十分に大きいとすると、この団体に対する支払金 u の分布は、ポワソン分布で近似される範囲では（年齢を表わす添字 x を省略して）

$$\left.\begin{aligned} p(u) &= e^{-nq}\frac{(nq)^u}{u!} \quad (u = 0, 1, 2, \cdots\cdots\cdots) \\ \sigma &= \sqrt{nq} \end{aligned}\right\} \qquad (15.1.5)$$

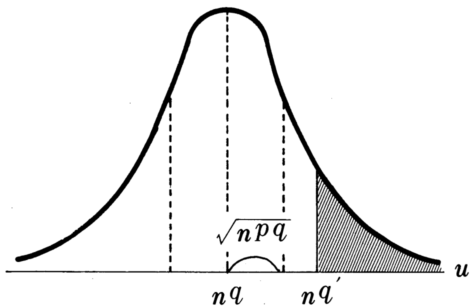
で与えられる。スケッチすれば下図のようになる。



u が保険料収入 nq' より大きくなった時は、この団体は死差損を出すことになるが、その確率は図の斜線部分に入る整数値をとる確率の和である。また n がさらに大きくて正規分布で近似される時は u の分布は

$$\left.\begin{aligned} p(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\ e^{-\frac{(u-nq)^2}{2\sigma^2}} \\ \sigma &= \sqrt{npq} \end{aligned}\right\} \qquad (15.1.6)$$

で与えられ、下図のようなスケッチが得られる。（この $p(u)$ は、実際には起こる筈のない負の u にもかかっているが、その部分の値は極めて小さくて、計算上無視しうる）　死差損を出す確率は図の斜線部分の面積で表わされる。



いずれの場合も、n が増えるに従い標準偏差 $\sqrt{nq}$ あるいは $\sqrt{npq}$ が $n(q'-q)$ に比して相対的に小さくなり、分布の密度は nq' を離れて平均値 nq の周辺に集中した形となる。従って死差損を出す確率が小さくなる。このことは後に§3において配当に関係する。

なおわが国では現在純保険料の計算は（15.1.1）によらず、保険金即時支払でかつ月払真保険料という方式をとり

$$\frac{v^{\frac{1}{2}} q_x}{12\,\ddot{a}^{(12)}_{x:\overline{1}|}} \tag{15.1.7}$$

としている。しかし団体定期保険の数理上の本質は以上で説明したことに変わりない。

§2　営業保険料

団体定期保険の営業保険料の定め方も個人保険と異なるところが多い。次にわが国で現在行われている方法の概略を説明しよう。営業保険料の料率は、その団体の団体性の強さ（所属員の死亡危険の等質性や加入率によって判定する）によって数種のものが使用される。

まず予定死亡率については、団体性の強い団体では死亡状況が個人保険のそれよりも良好であろうという予想のもとに、個人保険用の予定死亡率を割引いて使用する。また小人数の団体や団体性の比較的弱い団体では個人保険用の予定死亡率をそのまま使用する。その上で（15.1.7）により個人毎に月払純保険料が計算され、それを合計したものが団体の月額総純保険料となる。なお一定規模以上の特定の大団体において過去数年間継続して実際死亡率が極めて低かった場合には、保険料率を一定の範囲内で軽減することができる。また逆に死亡率が高いと予測される団体については、その危険の程度に応じて特別保険料を付加することができる。

予定事業費率については高額割引の考え方が取り入れられる。すなわち通常の団体については、総保険金額 S に対する保険金額比例付加保険料率 γ と、定額付加保険料 K とを用いて

$$S\gamma + K \tag{15.2.1}$$

によって団体に対する月額付加保険料が定められる。実際には γ と K

はさらに団体の総保険金額に基づいていくつかの階層に別けて与えられ、金額の大きい階層になるほど γ を小さくして、総保険金額が大きくなるほど付加保険率が逓減するように考慮されている。また小規模団体や任意加入団体の場合は上記とは異なった γ を用いて

$$S\gamma \tag{15.2.2}$$

によって団体に対する月額付加保険料が定められる。この時も団体の総保険金額に基づくいくつかの階層別に γ が与えられ、総保険金額の大きい階層ほど γ の値が小さい。

月額の純保険料総額と付加保険料が定まれば、両者を合わせてこの団体に対する月額の営業保険料となる。

以上で営業保険料が一応定まるが、さらに実務上では **平均保険料率** というものが使用されている。それは、新契約の時点（および毎年の更新時点）で、上記によって算出した月額営業保険料総額を総保険金額で割った単位保険金額当たりの保険料率であって、その保険年度を通じて変更することなく用いられる。すなわち総保険金額が月毎に変動しても、この平均保険料率を乗じて得た額をその月の営業保険料とする。（従って年度途中の加入者に対しては年齢にかかわらずこの保険料率を用いることになる）このような方法が採用されるのは、団体の年齢構成に大きな異動がなければ年初の平均保険料率を用いても大きな狂いを生じることはなく、また次節で述べるように配当が団体毎にその死差益を還元する仕組みになっているからである。ただし年齢構成あるいは総保険金額に大きな異動が生じた時はもちろん平均保険料率の見直しが必要である。

任意加入団体のように保険料を被保険者個人に負担させる場合には、年齢群団別営業保険料を使用することもある。

§3　配当

§1で述べた説明に基づいて団体定期保険を象徴的に表現すれば、それは団体が二項分布（15．1．3）（あるいはそれに相当するようなその他の分布）で表わされる危険を生命保険会社に持ち込み、会社が保険料 nvq' でそれを引き受ける取引である。団体が自家保険を採らずに保険会社を利用することの利点は、死亡による支払が nq' を超過した場合に他の団体で生じた死差益から超過分がカバーされて自己の負担とならないことである。生命保険会社は保有している多数の団体定期保険契約を合わせて一つの保険群団をつくるが、1年の決算で生じた剰余金（ここでは死差益のみを考える)は、死差益を生じた団体の死差益合計から死差損を生じた団体の死差損合計を差し引いた残りである。そのような死差益を配当として各団体に還元するにはどのような方法がよいであろうか。

死差益を出した団体に対しその死差益額に比例して一律にその額の何割とするのも一つの還元方法であるが、長期的に考えてみると、小さな団体は死差損を出す年度が比較的多く、その都度他の団体の死差益でカバーしてもらえるのに対し、大きな団体は死差損を出す年度が少なく、たいていの年度で死差益を出して他の団体の死差損をカバーする方にまわる。従ってそれをならすために、小さな団体には死差益の還元率を小さくし、大きな団体には死差益の還元率を大きくしておくと、長期的に見て各団体に公平な還元の方法となる。

団体の大きさにより配当率を変えることにもいくつかの方法が考えられようが、わが国で用いられている方法の考え方は次のようなものである。すなわち「団体に対し死差益をある配当率で還元した場合の残額に関して、その平均的な値で、その団体が死差損を出した場合の死差損の

平均的な値をカバーできるようにしておく」と考える。次にこの考え方に基づいて配当率を導いてみよう。

始めに n が大きくて死亡による支払額 u の分布が（15.1.6）の正規分布で与えられる場合をとろう。その時死差益の平均値は

$$\int_{-\infty}^{nq'}(nq'-u)p(u)du$$

であり、一方死差損の平均値は

$$\int_{nq'}^{\infty}(u-nq')p(u)du$$

であるので、配当率を団体の人数 n によって定まるものとし、それを λ_n とすると、 λ_n が上記の条件を満たすには

$$(1-\lambda_n)\int_{-\infty}^{nq'}(nq'-u)p(u)du=\int_{nq'}^{\infty}(u-nq')p(u)du \qquad (15.3.1)$$

でなければならない。従って

$$\lambda_n=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}(nq'-u)p(u)du}{\int_{-\infty}^{nq'}(nq'-u)p(u)du} \qquad (15.3.2)$$

となる。これを計算するには次のようにする。まず

$$\int_{-\infty}^{\infty}p(u)du=1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty}up(u)du=nq$$

であるから、(15.3.2）の分子は $nq'-nq$ となる。分母については

$$t=\frac{u-nq}{\sigma}, \qquad \sigma dt=du$$

という変換を行い、 $y=\dfrac{nq'-nq}{\sigma}$ とし、また

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad \text{（標準正規分布の分布関数）}$$

とすると、それは

$$\int_{-\infty}^{y} (nq' - nq - \sigma t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= (nq' - nq) \int_{-\infty}^{y} \phi(t)\, dt + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_{-\infty}^{y}$$

$$= (nq' - nq) \int_{-\infty}^{y} \phi(t)\, dt + \sigma \phi(y)$$

となる。最後の式にある $\int_{-\infty}^{y} \phi(t)dt$ と $\phi\ (y)$ については表ができていて、それを用いれば q, q' と n が与えられた時に計算ができる。そしてこのようにして得られた分母と分子を（15. 3. 2）に入れれば λ_n の計算ができる。

次に n がそれほど大きくなくて u の分布が（15. 1. 5）のポワソン分布で与えられる場合に、上記の条件を満たすよう考えるとどうなるであろうか。nq' の整数部分を e とおいて（15. 3. 1）に相当する式をつくると

$$(1 - \lambda_n) \sum_{u=0}^{e} (nq' - u) p(u) = \sum_{u=e+1}^{\infty} (u - nq') p(u) \tag{15.3.3}$$

であり、これより

$$\lambda_n = \frac{\sum_{u=0}^{\infty} (nq' - u) p(u)}{\sum_{u=0}^{e} (nq' - u) p(u)} \tag{15.3.4}$$

となる。この式の分子は $nq' - nq$ であり、分母はポワソン分布に関する数表の平均値 nq に当たる箇所を利用して計算することができる。

計算の実例として

（1）　$q = 0.002,$　　　$q' = 0.003$

（2）　$q = 0.002,$　　　$q' = 0.0025$

という二つの場合について上記の計算を行うと、次のような表ができる。ただし $n \leqq 1{,}000$ についてはポワソン分布を、$n \geqq 5{,}000$ については正規分布を仮定している。

n		50	100	500	1,000	5,000	10,000
λ_n	(1)	0.37	0.41	0.68	0.82	0.98	0.998
	(2)	0.22	0.24	0.45	0.57	0.87	0.94

第１５章　　練習問題

（１）　それぞれ1,000人からなるM, N二つの団体が団体定期保険に加入している。M団体は1,000人全員が同一年齢（死亡率 0.0015)で、各人の保険金額は１である。N団体は三つのグループに分かれ、a グループは420人が同一年齢（死亡率 0.001)で、各人の保険金額は 0.8であり、b グループは380人が同一年齢（死亡率 0.0015)で、各人の保険金額は１であり、c グループは200人が同一年齢（死亡率 0.002）で、各人の保険金額は 1.5である。

（a）M団体について、１年間の支払保険金額が 0, 1, 2, 3 となる確率を二項分布とポワソン分布によって求め、両者を比較せよ。

（b）N団体について、１年間の支払保険金額が 0, 0.6～1.5, 1.6～2.5, 2.6～3.5 となる確率を求め、対応するM団体の確率と比較せよ。(二項分布による)

（c）M, N両団体について１年間の支払保険金額の平均値および標準偏差を計算せよ。(二項分布による)

（２）　ある団体が生命保険会社と団体定期保険を契約し、保険金額を

25歳の男子	300人	については各人に対し	500万円
35歳の男子	200人	〃	600万円
45歳の男子	150人	〃	700万円
55歳の男子	100人	〃	800万円

と定めた。契約時において

（a）予定利率を年5％とし、また予定死亡率については第５回全会社表

に対し、25歳と35歳ではその80％，45歳では90％，55歳では100％を使用するとして、(15.1.7) により、団体の支払う月額純保険料の総額を求めよ。

(b) 付加保険料は、(15.2.1) において $\gamma = 0.03‰$ ，$K = 47,000$ 円としたものとすれば、月額付加保険料は総額いくらになるか。

(c) 保険金額100万円に対する月払平均保険料率はいくらか。(単位は円にとどめる)

さらに年度の中央で25歳の者30人と35歳の者10人の途中加入があり、また55歳の者 1人の死亡があって保険金を支払った。その時年度末の計算で

(d) この団体の年間支払保険料はいくらになるか。

(e) §3末尾の表の（2）の欄の $n = 1,000$ の箇所の率によって、この団体に対する配当金を計算せよ。

第 16 章　退職年金保険

§1　従業員在職残存表

企業あるいは団体が所属の従業員に対し退職年金を支給しようとする時、その準備として考えられる一つの方法は、純保険料が（4.14.6）の $P({}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|})$ で与えられるような個人年金保険を購入することである。（その費用負担者は企業であったり、企業と従業員の折半であったりするが、本書では保険料負担者が誰であるかは問わないこととする）あるいは毎年少額の年金を一時払保険料率 ${}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ で購入して積上げて行くことも考えられる。

しかし現在わが国では、企業年金と称する一つの年金制度を組織し、所属員に対する年金の準備あるいは支給をその制度が行う方法が普及しており、その場合には、団体の所属員の勤務上の特性を考慮に入れて、企業の負担に無理のないよう特別な計算が行われる。

その計算の基礎となるものは**従業員在職残存表**であって、第 3 章§ 2 で述べた多重脱退表の代表的な実用例である。それはある企業（もしくは団体）の従業員が死亡、任意退職、就業不能退職あるいは定年退職によって減少して行く状況を示すもので、2 頁後にその一つのモデルを示した。

この表で用いられている記号の意味は次のとおりである。

l_x^s ： x 歳の在職者数

d_x^s ： x 歳と $x+1$ 歳の間における在職者の死亡数

w_x： x 歳と $x+1$ 歳の間における任意退職者数

i_x ： x 歳と $x+1$ 歳の間において在職者が就業不能となる数

r_x ： x 歳と $x+1$ 歳の間における定年退職者数

ただしこの表では57歳以降から選択繰上げ定年退職が始まり、60歳で全員が定年退職すると考えている。またその間の年齢では通常の任意退職をする者はいないとしている。

56歳までで考えると、(3.2.1) に相当する式は

$$l_{x+1}^s = l_x^s - d_x^s - w_x - i_x \tag{16.1.1}$$

であり、

$$q_x^{(d)} = \frac{d_x^s}{l_x^s}, \quad q_x^{(w)} = \frac{w_x}{l_x^s}, \quad q_x^{(i)} = \frac{i_x}{l_x^s} \tag{16.1.2}$$

$$p_x^s = \frac{l_{x+1}^s}{l_x^s}$$

とすれば

$$p_x^s = 1 - q_x^{(d)} - q_x^{(w)} - q_x^{(i)} \tag{16.1.3}$$

である。56歳以上では w_x の代わりに r_x を、また $q_x^{(w)}$ の代わりに $q_x^{(r)} = \dfrac{r_x}{l_x^s}$ を用いればよい。(16.1.2) の各脱退率について絶対確率を考えると、(3.2.11) に対応して

$$\left.\begin{aligned}
q_x^{(d)*} &= q_x^{(d)}\left(1 - \frac{q_x^{(w)}}{2} - \frac{q_x^{(i)}}{2}\right)^{-1} \\
q_x^{(w)*} &= q_x^{(w)}\left(1 - \frac{q_x^{(d)}}{2} - \frac{q_x^{(i)}}{2}\right)^{-1} \\
q_x^{(i)*} &= q_x^{(i)}\left(1 - \frac{q_x^{(d)}}{2} - \frac{q_x^{(w)}}{2}\right)^{-1}
\end{aligned}\right\} \tag{16.1.4}$$

従業員在職残存表の一つのモデル

x	l_x^s	d_x^s	w_x	i_x	r_x
18	100,000	86	9,500	6	0
19	90,408	77	8,588	6	0
20	81,737	69	7,602	6	0
21	74,060	61	6,665	6	0
22	67,328	55	5,790	7	0
23	61,476	50	4,980	7	0
24	56,439	45	4,289	7	0
25	52,098	41	3,646	8	0
26	48,403	38	3,049	8	0
27	45,308	35	2,537	8	0
28	42,728	32	2,136	9	0
29	40,551	30	1,784	9	0
30	38,728	29	1,510	9	0
31	37,180	29	1,264	10	0
32	35,877	29	1,076	10	0
33	34,762	30	904	10	0
34	33,818	31	744	11	0
35	33,032	33	628	11	0
36	32,360	35	518	12	0
37	31,795	38	445	12	0
38	31,300	41	376	13	0
39	30,870	44	340	13	0
40	30,473	47	305	14	0
41	30,107	51	271	14	0
42	29,771	56	238	15	0
43	29,462	62	206	16	0
44	29,178	67	190	17	0
45	28,904	73	173	18	0
46	28,640	79	156	20	0
47	28,385	85	142	22	0
48	28,136	92	127	24	0
49	27,893	100	112	27	0
50	27,654	109	83	30	0
51	27,432	118	55	33	0
52	27,226	128	41	37	0
53	27,020	140	27	42	0
54	26,811	154	13	48	0
55	26,596	170	0	55	0
56	26,371	188	0	64	0
57	26,119	208	0	75	2,341
58	23,495	209	0	89	1,238
59	21,959	215	0	106	681
60	20,957				20,957

となる。また従業員について実際の脱退状況を観察し、それを(3.2.19) 以下で述べた定常状態の開集団の観察と考え、中央脱退率

$$\left.\begin{aligned} & m_x^{(d)} = \frac{d_x^s}{\frac{1}{2}(l_x^s + l_{x+1}^s)}, \quad m_x^{(w)} = \frac{w_x}{\frac{1}{2}(l_x^s + l_{x+1}^s)}, \\ & m_x^{(i)} = \frac{i_x}{\frac{1}{2}(l_x^s + l_{x+1}^s)} \end{aligned}\right\} \tag{16.1.5}$$

が得られた時には、(3.2.22) より

$$q_x^{(d)*} = \frac{2\,m_x^{(d)}}{2 + m_x^{(d)}}, \quad q_x^{(w)*} = \frac{2\,m_x^{(w)}}{2 + m_x^{(w)}}, \quad q_x^{(i)*} = \frac{2\,m_x^{(i)}}{2 + m_x^{(i)}} \tag{16.1.6}$$

という関係によって $q_x^{(d)*}$ 等が得られる。

逆に $q_x^{(d)*}$ 等が何かの文献・資料により始めから与えられていたり、あるいはそれが上に述べた観察から得られた場合に、多重脱退表を作成するため $q_x^{(d)}$ 等を導くには、(3.2.7), (3.2.9) あるいは (3.2.10) による。

あるいは (3.3.2) の後でその応用として説明したように、保険年度の観察から直接 $q_x^{(d)}$ および $q_x^{(d)*}$ 等を算出することもできる。

ただし $q_x^{(d)}$ あるいは $q_x^{(d)*}$ 等が観察から得られた場合には、それを x の順に並べると通常相当のぶれが現れるので、生命表の作成の場合のように補整が必要となる。

このような多重脱退表が使用されるのは、年金制度において主目的である老齢年金以外に、**付随給付**として死亡や任意退職、就業不能退職、繰上げ定年退職にも何等かの給付を行うことがあるからである。例えば

① 死亡者については、その寡婦に所定の寡婦年金を支給する。

② 所定の長期勤続の条件を充たした任意退職者には、所定の退職年金（通常は少額）を彼の定年年齢到達時から支給する。

③ 就業不能退職者については、一定の待期間を設けて所定の年金を支給する。

④ 繰上げ定年退職者については、減額退職年金を即時に開始する。

といった給付を年金制度に組み込む場合があるからである。もちろんこのような給付のうちのあるものについて、年金制度に組み込まず別の体系の中で保障することも考えられる。

わが国で現在行われている企業年金制度では老齢年金のみを考える場合が多いが、その場合には i_x は w_x に吸収させる。また計算上では通常繰上げ定年退職を考えず、ある一定年齢で在職者が一斉に退職すると考える。従って実際に使用されるのは d_x^s と w_x とのみ用いた2重脱退表である。その場合には（16.1.1）等の基本的な式は、定年退職年齢を r として次のようになる。

$$l_{x+1}^s = l_x^s - d_x^s - w_x \qquad (x \leq r-1) \tag{16.1.7}$$

$$q_x^{(d)} = \frac{d_x^s}{l_x^s}, \qquad q_x^{(w)} = \frac{w_x}{l_x^s} \tag{16.1.8}$$

$$p_x^s = \frac{l_{x+1}^s}{l_x^s} = 1 - q_x^{(d)} - q_x^{(w)} \tag{16.1.9}$$

$${}_tp_x^s = \frac{l_{x+t}^s}{l_x^s} \qquad (x+t \leq r) \tag{16.1.10}$$

§2　退職年金額の定め方と保険料の計算

前節の終わりに述べた2重脱退表を用いて行う保険料その他の保険価格の計算を次に述べよう。

まず年金制度では、退職年金額を定めるのに、次の三つの方法の何れかが一般によく用いられる。

（１）　勤務期間に応じて（例えば勤務期間１ヶ月当たり　○○○円として）年金額を定める。

（２）　全勤務期間の年間給与の平均に、勤務年数に応じて定められた率を掛けて年金年額を定める。これは毎年の給与の一定率（例えば２％）の和と考えてもよい。

（３）　勤務の最終 f 年間（例えば５年間）の年間給与の平均に、勤務年数に応じて定められた率を掛けて年金年額を定める。（平均によらず、退職時の給与のみを用いることも多い）

何れの場合であっても、従業員各個人について退職時の年金額が想定されるとして、その者に対する保険料を計算するが、始めに給付は老齢退職年金のみでその他の付随給付がない場合を取り上げる。

まず基本的な場合として、（１）のように年金額が給与に関係なく定まる場合を考えよう。 x 歳（例えば20歳）で契約に加入した者が r 歳（例えば60歳）で定年退職した時に、年金額 A の終身年金が支給されるとし、また保険料は退職の年まで毎年払込むとして、その年払純保険料を P とすると、収支相等の原則から

$$P\sum_{t=0}^{r-x-1} v^t\, l^s_{x+t} = A\,\ddot{a}_r\, v^{r-x}\, l^s_r \qquad (16.2.1)$$

である。ただし $\ddot{a}_r$ は通常の生命表に基づく終身年金現価とする。($A\ddot{a}_r$ は年金開始時点における年金現価であり、**年金原資**と呼ばれる)　この両辺を l_x^s で割り、さらに

$$\ddot{a}^s_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \, {}_tp_x^s \tag{16.2.2}$$

とすると

$$P = \frac{A\,\ddot{a}_r\, v^{r-x}\ {}_{r-x}p_x^s}{\ddot{a}^s_{x:\overline{r-x|}}} \tag{16.2.3}$$

となる。種々の計算を簡単にするために

$$D_x^s = v^x l_x^s \qquad (x \leq r)$$

$$N_x^s = D_x^s + D_{x+1}^s + \cdots\cdots + D_r^s \qquad (x \leq r)$$

という計算基数が用いられることがあるが、その時は (4.14.2) を導いたように (16.2.3) を変形して

$$P = \frac{A\,\ddot{a}_r\, D_r^s}{N_x^s - N_r^s} \tag{16.2.4}$$

とすることができる。

次に前掲の（2）あるいは（3）のように年金額が給与に比例して定められている場合には、まず年金制度をつくっている企業あるいは団体における年齢ごとのモデル給与（通常は年齢に関する単調増加関数で**昇給テーブル**とも呼ばれる。また昇給テーブルを指数化したものを**予定昇給率**あるいは**昇給指数**と呼ぶ）を設定しておいて計算を進める。設定したモデルにおいて $x+t$ 歳で始まる1年間の年間給与を s_{x+t} とし、また t 年経過後の時点までに支払われた給与の総額を

$$S_{x+t} = \sum_{i=1}^{t} s_{x+i-1} \qquad (t = 1, 2, \cdots\cdots, r-x) \tag{16.2.5}$$

とする。S_{x+t} を月別に定めることが必要なこともあるが、例えば

$S_{x+t+\frac{j}{12}}$ ならば（16.2.5）の右辺に $\dfrac{j}{12} s_{x+t}$ を加える。

このような記号を導入しておけば、（２）の場合の年金額は、平均給与に掛ける一定率を $\beta(r-x)$ として

$$B = \frac{1}{r-x}\left(\sum_{t=0}^{r-x-1} s_{x+t}\right)\beta(r-x)$$

$$= \beta S_r \tag{16.2.6}$$

と書くことができ、また（３）の場合の年金額は、平均給与に掛ける一定率を $\gamma(r-x)$ として

$$C = \frac{1}{f}\left(\sum_{t=r-x-f}^{r-x-1} s_{x+t}\right)\gamma(r-x)$$

$$= \gamma(r-x)\frac{S_r - S_{r-f}}{f} \tag{16.2.7}$$

と書くことができる。

さらにこれらの場合には払込む保険料についても、それを給与の一定割合 α（従って給与の上昇につれて保険料も上昇する）として設計されることが多いが、その時は次のような年金現価を導入しておくと計算に便利である。

$$\ddot{a}^{ss}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{s_{x+t}}{s_x} v^t\, {}_t p^s_x \tag{16.2.8}$$

$$= \sum_{t=0}^{n-1} \frac{s_{x+t}}{s_x} \frac{D^s_{x+t}}{D^s_x} \tag{16.2.9}$$

これは x 歳における給与を基準の１として、以後の給与をその倍数で表わした時の年金現価である。

さて（２）の場合に保険料を毎年の給与の α として収入するならば、収支相等の原則より

$$\alpha\, s_x\, \ddot{a}^{ss}_{x:\overline{r-x}|} = \beta S_r\, \ddot{a}_r\, v^{r-x}\, {}_{r-x}p^s_x \tag{16.2.10}$$

となり、これより

$$\alpha = \frac{B\, \ddot{a}_r\, v^{r-x}\, {}_{r-x}p^s_x}{s_x\, \ddot{a}^{ss}_{x:\overline{r-x}|}} \tag{16.2.11}$$

によって α が定まる。(3) の場合には、同様にして

$$\alpha = \frac{C\, \ddot{a}_r\, v^{r-x}\, {}_{r-x}p^s_x}{s_x\, \ddot{a}^{ss}_{x:\overline{r-x}|}} \tag{16.2.12}$$

が得られる。

特に昇給指数が使える場合、例えばモデル給与が常に前年より３％ずつ増える場合には $s_{x+t} = s_x\,(1.03)^t$ となるが、その時には（16.2.11）および（16.2.12）はさらに計算し易い式となる。

なお以上の議論において、支給される年金が年１回でなく３月毎であれば、(16.2.3)，(16.2.4)，(16.2.11) あるいは (16.2.12) において $\ddot{a}_r$ の代わりに $\ddot{a}^{(4)}_r$ を用いればよいし、また終身年金でなく例えば10年確定年金や10年保証期間付終身年金である場合には $\ddot{a}_r$ の代わりに $\ddot{a}_{\overline{10}|}$ や $\ddot{a}_{\overline{10}|} + {}_{10|}\ddot{a}_r$ を用いればよい。

さらに被保険者が年金受給中に死亡してその時妻が生存している場合に、その死亡の時点から妻の死亡または再婚まで元の年金の半額を妻に支給することにするならば、(13.4.7) を用いて（ただし $\lambda = 0$ の場合）

$$\ddot{a}_r + h\frac{1}{2}\,\hat{a}^{W}_{r|r-u} \tag{16.2.13}$$

を $\ddot{a}_r$ の代わりに用いる。この式中の h は r 歳の夫が妻を持つ確率であり、 u は夫と妻との年齢差の平均である。平均年齢差によらない時は、 r 歳の夫が y 歳の妻を持つ確率 h_{ry} を用い、$h\,\hat{a}^{W}_{r|r-u}$ の代わりに

$$\sum_{y} h_{ry}\, \hat{a}^{W}_{r|y}$$

を用いるが、通常は（16.2.13）で十分である。

営業保険料に関しては、保険会社の場合は団体の規模に応じて逓減する付加保険料と積立金残高に応じた保険事務費の併用となっている。信託会社が受託する場合は預託された金額に応じた信託報酬が請求される。

責任準備金については、個人保険の場合と同じように将来法で書くことができる。すなわち年払保険料が（16.2.3）である場合の責任準備金は、保険料払込中（$1 \leqq t \leqq r-x-1$）では

$$\begin{aligned} {}_tV &= A\ddot{a}_r v^{r-x-t}\,{}_{r-x-t}p^{s}_{x+t} - P\ddot{a}^{s}_{x+t:\overline{r-x-t|}} && (16.2.14) \\ &= A\ddot{a}_r v^{r-x-t}\,{}_{r-x-t}p^{s}_{x+t}\left(1-\frac{v^t\,{}_tp^s_x\,\ddot{a}^{s}_{x+t:\overline{r-x-t|}}}{\ddot{a}^{s}_{x:\overline{r-x|}}}\right) \\ &= A\ddot{a}_r v^{r-x-t}\,{}_{r-x-t}p^{s}_{x+t}\,\frac{\ddot{a}^{s}_{x:\overline{t|}}}{\ddot{a}^{s}_{x:\overline{r-x|}}} && (16.2.15) \end{aligned}$$

年金開始後（$r-x \leqq t$）では

$$ {}_tV = A\ddot{a}_{x+t} \qquad (16.2.16)$$

である。保険料が（16.2.11）である場合の責任準備金は

$$\begin{aligned} {}_tV &= B\ddot{a}_r v^{r-x-t}\,{}_{r-x-t}p^{s}_{x+t} - \alpha\, s_x\, \ddot{a}^{ss}_{x+t:\overline{r-x-t|}} && (16.2.17) \\ &= B\ddot{a}_r v^{r-x-t}\,{}_{r-x-t}p^{s}_{x+t}\left(1-\frac{v^t\,{}_tp^s_x\,\ddot{a}^{ss}_{x+t:\overline{r-x-t|}}}{\ddot{a}^{ss}_{x:\overline{r-x|}}}\right) \\ &= B\ddot{a}_r v^{r-x-t}\,{}_{r-x-t}p^{s}_{x+t}\,\frac{\ddot{a}^{ss}_{x:\overline{t|}}}{\ddot{a}^{ss}_{x:\overline{r-x|}}} && (16.2.18) \end{aligned}$$

および

$$ {}_tV = B\ddot{a}_{x+t} \qquad (r-x \leq t) \qquad (16.2.19)$$

である。また保険料が（16.2.12）で与えられる場合の責任準備金は（16.2.17）～（16.2.19）で B を C で置き換えたものとなる。

なお特に留意しておかねばならないのは、このような年金保険の保険料あるいは責任準備金は、予定利率のほかに予定退職率や予定昇給率の仮定によってその値が大きく左右されることである。加えてこれらの仮定は国の経済情勢や労働事情に影響されてかなり変動するものであるので、何年かおきに計算の基礎と保険料および責任準備金を見直す必要がある。

§3　付随給付の保険料率

§1の終わりに各種の付随給付の例を挙げたが、本節ではそれらを実施する場合に§2の保険料をどのように変更すればよいかを考える。

その際に**発生年金額**という概念がよく用いられるが、それは勤続中の従業員について、現在時点までに経過した勤務期間に基づいて、彼に与えられることが確定している（あるいはそう仮定される）年金額のことである。これは彼に付与される責任準備金とは関係なく、むしろ退職年金の与え方から定まってくるものである。

例えば§2の（1）で述べた勤務期間に比例して年金額が定まる場合には、x を加入年齢、r を年金開始年齢として、毎年の発生年金額

$$b_{x+t} \qquad (t=1, 2, \cdots\cdots\cdots, r-x)$$

は、通常勤務期間1ヶ月当たりの年金額の12倍に当たる額とされ、従って t に関係しない一定額である。それを b_{x+1} で代表させれば、t 年経過後までの累計発生年金額は

$$B_{x+t} = t\, b_{x+1} \qquad (t=1, 2, \cdots\cdots\cdots, r-x) \qquad (16.3.1)$$

であり、B_r がちょうど退職年金額に一致する。（16.2.1）の A が B_r

であるとすれば $b_{x+1}=\dfrac{A}{r-x}$ となる。 B_{x+t} を月別に定めることとした場合は、例えば $B_{x+t+\frac{j}{12}}$ ならば（16.3.1）の右辺で t の代わりに $t+\dfrac{j}{12}$ を用いる。

（２）の全勤務期間の平均給与から退職年金額を定める場合には、通常 β をある比例定数として

$$b_{x+t}=\beta s_{x+t-1} \qquad (t=1,2,\cdots\cdots\cdots,r-x) \tag{16.3.2}$$

$$B_{x+t}=\sum_{i=1}^{t} b_{x+i}=\beta S_{x+t} \tag{16.3.3}$$

とされる。B_r は（16.2.6）の年金額 B となる。 B_{x+t} を月別に定めることとした場合は、（16.2.5）の後で述べたように月別に定めた S_{x+t} を用いる。

（３）の最終 f 年間の年間給与の平均から年金額を定める場合には、通常累計発生年金額 B_{x+t} を先に規定する。すなわち γ をある比例定数として

$$B_{x+t}=\gamma t\,\frac{S_{x+t}-S_{x+t-f}}{f} \tag{16.3.4}$$

とする。この時

$$B_r=\gamma(r-x)\frac{S_r-S_{r-f}}{f}$$

は（16.2.7）の年金額 C となる。 B_{x+t} を月別に定めることとした場合は、月別に定めた S_{x+t} を用いる。そのうえで毎年の発生年金額は逆に

$$b_{x+t}=B_{x+t}-B_{x+t-1} \tag{16.3.5}$$

によって定められる。しかしこの定め方は複雑であり、関係者の理解を

得るのが難しいことが多いので、修正方法として B_r をあらかじめ定めた上

$$b_{x+t}=\frac{B_r}{r-x}\ ,\qquad B_{x+t}=\frac{B_r}{r-x}t \tag{16.3.6}$$

としたり、あるいは

$$b_{x+t}=\frac{B_r}{S_r}s_{x+t}\ ,\qquad B_{x+t}=\frac{B_r}{S_r}S_{x+t} \tag{16.3.7}$$

としたりする。前者は（１）の場合に、後者は（２）の場合に帰する。

このように発生年金額はある程度任意に定めることができるが、付随給付を規定する時にはこれを基準とすることが多い。

始めに、任意退職者にも定年到達に相当する時点から退職年金を支給するが、その額は退職時の累計発生年金額 B_{x+t} に勤続期間により異なる率 $C^{(w)}_{x+t}$ を掛けたものとする場合を考えよう。（ $0\leqq C^{(w)}_{x+t}\leqq 1$ であり、また $C^{(w)}_{x+t}$ は通常経過年月数別に定められて、 t の非減少関数である） 今第 t 年度の始めには就業していてこの年度内に任意退職する場合をとり、それに対する第 t 年度始の**掛金**（年金制度では保険料といわず掛金ということが多い。以後両者とも使用する）を計算すると

$$(TC)^{(w)}_{x+t-1}$$

$$=q^{(w)}_{x+t-1}\,v^{r-x-t+1}\ {}_{r-x-t+\frac{1}{2}}p_{x+t-\frac{1}{2}}\,C^{(w)}_{x+t-\frac{1}{2}}\,B_{x+t-\frac{1}{2}}\,\ddot{a}_r \tag{16.3.8}$$

となる。ただしここでは任意退職は平均して年度の中央で発生すると考え、また退職後年金開始までの期間では退職者は $\ddot{a}_r$ と同じく通常の生命表に従うと考えている。このような掛金はちょうど１年定期保険の保険料に該当するので**定期掛金**とよぶが、ここで $t=1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots,$ $r-x$ としたものを加入時の現価に直して加えればこの付随給付の一時

払掛金となる。すなわち

$$(SC)_x^{(w)}=\sum_{t=1}^{r-x} v^{t-1}\ {}_{t-1}p_x^s(TC)_{x+t-1}^{(w)} \tag{16.3.9}$$

となるが、この一時払掛金を場合に応じて（16.2.3），（16.2.11）あるいは（16.2.12）の右辺の分子に加えれば、それぞれの場合において任意脱退給付を含めた保険料率が得られる。

（16.3.9）が年金給付の一時払掛金に比べて少額であれば、複雑な計算（特に責任準備金が複雑になる）を避けて、毎年異なる定期掛金でこの給付を実施するか、あるいは一時払掛金（16.3.9）の“年金給付の一時払掛金”すなわち（16.2.3）の右辺分子等に対する比を求め、その割合で老齢年金の保険料を割増し、割増分を定期掛金のように考える。いずれの場合も既に任意退職した者に対する責任準備金はこれを別に計算して積立てねばならない。

次に就業不能退職者について一定の待期間をおいて就業不能年金を支払う場合を考えることとする。年金額は退職時の累計発生年金額 B_{x+t} に勤務期間により異なる率 $C_{x+t}^{(i)}\,(0\leqq C_{x+t}^{(i)}\leqq 1)$ を掛けたものとする。（16.3.8）と同様に第 t 年度における定期掛金は

$$(TC)_{x+t-1}^{(i)}$$

$$=q_{x+t-1}^{(i)}\,v^{m+\frac{1}{2}}\ {}_mp_{x+t-\frac{1}{2}}^{i}\ C_{x+t-\frac{1}{2}}^{(i)}\ B_{x+t-\frac{1}{2}}\ \ddot{a}_{x+t-\frac{1}{2}+m}^{i} \tag{16.3.10}$$

である。ただし m は待期間であり、${}_mp_{x+t-\frac{1}{2}}^{i}$ および $\ddot{a}_{x+t-\frac{1}{2}+m}^{i}$ は就業不能者生命表に基づく値である。（(13.1.12) および（13.2.2）参照 ）なお（16.2.13）の場合のような寡婦年金を加えて適用する時は、この式の $\ddot{a}_{x+t-\frac{1}{2}+m}^{i}$ の代わりに、（13.4.9）の年金を用いて

$$\ddot{a}^{i}_{x+t-\frac{1}{2}+m}+h\frac{1}{2}\hat{a}^{iW}_{x+t-\frac{1}{2}+m|x+t-u-\frac{1}{2}+m}$$

とする。ただし前にも述べたように h は従業員の死亡時に妻のある確率であり、u は夫と妻の平均年齢差である。この付随給付の一時払掛金は（16.3.9）の場合と同様に

$$(SC)^{(i)}_{x}=\sum_{t=1}^{r-x}v^{t-1}{}_{t-1}p^{s}_{x}(TC)^{(i)}_{x+t-1} \tag{16.3.11}$$

であり、これを場合に応じて（16.2.3），(16.2.11) あるいは（16.2.12）の右辺分子に加えれば、それぞれの場合において就業不能退職給付を含めた保険料率が得られる。また任意退職給付の場合の最後に述べた注意もこの場合に当てはまる。

就業期間中に死亡した者の寡婦に寡婦年金を支給する場合を考えよう。年金は死亡時点から即時に開始され、寡婦の死亡または再婚まで続けられるとする。年金額は死亡時点における累計発生年金額 B_{x+t} に勤務期間により異なる率 $C^{(d)}_{x+t}$ ($0\leqq C^{(d)}_{x+t}\leqq 1$) を掛けたものとする。その時第 t 年度における定期掛金は、これまでと同様に

$$(TC)^{(d)}_{x+t-1}=q^{(d)}_{x+t-1}hv^{\frac{1}{2}}C^{(d)}_{x+t-\frac{1}{2}}B_{x+t-\frac{1}{2}}\ddot{a}^{w}_{x+t-u-\frac{1}{2}} \tag{16.3.12}$$

である。ただし $\ddot{a}^{w}_{x+t-u-\frac{1}{2}}$ は（13.4.2）で示した寡婦に対する年金である。この付随給付の一時払掛金は、これまでと同じく

$$(SC)^{(d)}_{x}=\sum_{t=1}^{r-x}v^{t-1}{}_{t-1}p^{s}_{x}(TC)^{(d)}_{x+t-1} \tag{16.3.13}$$

であり、これを場合に応じて（16.2.3），(16.2.11) あるいは（16.2.12）の右辺分子に加えれば、それぞれの場合においてこの死亡給付を含めた保険料率が得られる。また任意退職給付の場合の最後に述べた注意もこ

の場合に当てはまる。

繰上げ定年退職者に減額退職年金が支給される場合には、年齢 r'（$r' < r$）からそれが認められ、かつ減額年金 $C^{(r)}_{r'+t}\,B_{r'+t}$（$0 \leqq t \leqq r - r' - 1$）が支給されるとして

$$(SC)^{(r)}_x$$

$$= \sum_{t=0}^{r-r'-1} v^{r'+t-x}\,{}_{r'+t-x}p^s_x\, q^{(r)}_{r'+t}\, v^{\frac{1}{2}}\, C^{(r)}_{r'+t+\frac{1}{2}}\, B_{r'+t+\frac{1}{2}}\, \ddot{a}_{r'+t+\frac{1}{2}} \qquad (16.3.14)$$

がその一時払保険料となる。ただし $q^{(r)}_{r'+t}$ は繰上げ定年退職者の発生する率である。（本章§1の4重脱退表を参照）　毎年の保険料にこの分を含ませるのは（16.3.14）を（16.2.3），（16.2.11），（16.2.12）の右辺分子に加えて計算する。

§4　財政方式について

公的年金であろうと企業年金であろうと年金制度においては、加入者の範囲が明確に定められていて、加入者あるいは企業は、加入者がある一定年齢に達するまで、あるいは死亡もしくは就業不能になるまで（企業年金ではあるいはまた中途脱退するまで）、保険料（掛金）の払込をし、加入者が年金を受給しうる状態になれば、所定の年金（確定年金、終身年金、遺族年金など）が制度から所定の期間支給される。制度は開集団であって、毎年新規の加入者がある一方で、新規の年金受給者および年金支給停止を受ける者がでてくる。このような制度を継続してゆくために、収入する保険料と支給する年金とのバランスをどのような考え方で図っていくかを定めるものが制度の**財政方式**である。

ただ年金制度を考える時は、個別保険の場合とちがって、加入者一人一人について厳密に収支相等の原則が成立したり、所定の責任準備金に

相当する額が積立てられていることは、必ずしも要求されない。例えば従業員は平均的に20歳で加入するとして（16.2.11）によって掛金率αを計算しておき、そのαを21歳で加入した者にも適用することも差し支えないとされる。個人個人について企業から拠出されるであろう金額と個人が受取るであろう金額との間に少々のアンバランスがあっても、制度全体として収支のバランスがとれるようなものであればよいとされ、また若干のアンバランスが発生しても、制度は永久に続くものなので、その補正を後年の負担で行うことができるとされる。

（１）　賦課方式

古くからあった最も単純な財政方式は**賦課方式**である。それは、ある年度に発生した年金支給総額をその年の保険料負担者全員に負担させるものである。負担させる方法は、均等でも給与比例でもその他の方法でもよいし、また企業が全額負担するならば従業員は負担をしなくてよい。ただし賦課方式が実際に用いられるときには、このような純粋の賦課方式でなく修正された形(**修正賦課方式**という)で行なわれることが多い。修正には例えば次のような方法がある。

(a) 概算保険料を年始に収入しておき年度末に清算する。

(b) 計算の期間を１年とせずに５年とか10年とかの一定期間内で収支のバランスをとる。

(c) 制度発足当初に保険料をやや余分に収入して保有しておき、支出の大きくなった年に取崩して使用する。

(d) 年金支給基準の改正に備え、常に相当額（例えば１年間の支払額の倍とかそれ以上の額）の準備金を保有して制度を運営する。

いずれにしろこの方式では保険料負担者の側に異論のないかぎり制度は維持されていく。例えば社会保険のように後続加入者が強制的に確保されている場合にこの方法を用いることができ、多くの国の公的年金で実際に採用されている。

以下では主として企業年金制度を考えることにするが、その場合のこの方式の難点は、将来の年金受給が保証されないことである。例えば保険料の全額を企業が負担している場合に、企業業績が悪化して、制度の継続が不可能になると、年金受給中の者は年金を中止されるし、受給開始前の者は年金期待を完全に裏切られることになる。

（２）　年金開始時積立方式

上記のように賦課方式には年金確保の上で問題があるが、それを解決するため一歩進んだ方法として、**年金開始時積立方式**（ターミナル ファンディング）がある。この方式では、年金受給開始時点での当該者に対する年金現価（年金原資、例えば　$\ddot{a}^{(4)}_{\overline{10}|} + {}_{10|}\ddot{a}^{(4)}_{60} + \dfrac{1}{2}v^{10}{}_{10}p_{60,55}\,a^{(4)}_{70|65}$　）を一時に徴収して、これを金融機関等に預託するなどして年金の確保を図る。こうすれば、年金受給中の者の将来の年金は確保される。しかし受給開始前の者にとっては年金打ち切りの不安が依然解消されない。

賦課方式あるいは年金開始時積立方式が企業年金で採用されることはあまりない。

年金受給前の者に対しても、その勤続期間中から将来受給する年金のための積立を金融機関等で行って、その者の年金が毎年少しずつ確保されて行けば、勤労者としても安心である。このように年金開始前から積立を行う方法を**事前積立方式**というが、これを採用する制度は、従業員

に約束する給付の基準によって**掛金建制度**と**給付建制度**に分けられる。掛金建制度では、まず初めに企業の拠出する掛金の基準を定め、それに基づいて毎年企業が拠出する額を従業員の年金原資のため積立てる。そのためにこの制度では予め年金額を確定することができない。一方給付建制度では、初めに年金額を決定する基準を定め、それに基づく掛金を毎年計算して企業が拠出し積立てて行く。次に掛金建制度の一例を挙げるが、給付建制度については次節でやや詳細に述べることとする。

（3）　一時払積増方式

企業が従業員の各人に対し、毎年一定額とか給与の一定割合にあたる額とかを支出し、それを年金開始年齢に始まる所定の年金の一時払保険料 $v^n\,{}_np_x\,\ddot{a}_r$ あるいは $v^n\,{}_np_x^s\,\ddot{a}_r$ に充当してそのような年金契約を従業員に与える方法である。(ただしここでは中途脱退や昇給を考えない個人年金の計算方法をとっている）すなわち加入者の年齢が $x+t$ の時に一時払保険料に充当できる額が R_{x+t} であれば、この年に付与される年金額 A_{x+t} は例えば

$$A_{x+t}=\frac{R_{x+t}\,(1-\text{付加保険料率})}{v^{r-x-t}\,{}_{r-x-t}p_{x+t}\,\ddot{a}_r} \tag{16.4.1}$$

によって定まる。このとき1年間に購入できる年金額はごく少額のものであるが、購入を毎年継続することによって、年金開始時には、累積和 $\sum A_{x+t}$ でかなりの年金額となるようにする。この方法を**一時払積増方式**という。この方法であれば購入済の年金額は保障されるが、しかし従業員にとって最後の年金額がいくらになるかよく分からないし、また年金制度発足時点で退職年齢に近い高齢の従業員にとっては僅かの年金額しか期待できない。

§5　給付建制度における財政方式

始めに一時払積増方式と似た一つの財政方式を取り上げる。

（4）　発生年金額基準方式

これは、毎年購入する年金額が判っている場合あるいはそれが想定できる場合、例えば§3で述べたような発生年金額が定められている場合に、毎年の発生年金額に対する一時払保険料を掛金とすることによって、毎年定まる少額の年金額を累積しながら確定して行く方法である。発生年金額が b_{x+t} である年度の一時払保険料は多重脱退表を使用して

$$v^{r-x-t+1}\,{}_{r-x-t+1}p^{s}_{x+t-1}\;b_{x+t}\;\ddot{a}_r+\text{付加保険料} \tag{16.5.1}$$

である。このような一時払年金契約が過去から累積されていると、この年度の終わり（ただし勤務期間中）における確定（あるいは確定と考えられる）年金額は $B_{x+t}=\sum_{i=1}^{t} b_{x+i}$ であり、責任準備金は

$$V_{x+t}=v^{r-x-t}\,{}_{r-x-t}p^{s}_{x+t}\;B_{x+t}\;\ddot{a}_r \tag{16.5.2}$$

である。個人別にこのような計算をして積立てを行う方法を**発生年金額基準方式**という。

制度がこの方式を採用したとき懸念されることは、毎年の掛金の額が一定しないことと、年齢が上がるにつれて保険料が急速に増加するため若年者の補充の少ない制度では後年になるほど負担が大きくなることである。

ところで年金制度では個人保険や個人年金における責任準備金に当たる額を加入者の発生年金額に対する債務という意味で**発生債務**とよび、

また制度の資産に当たる額を**年金積立金**（単に積立金ともいう。保険会社の場合は保険料積立金と称している）とよんでいる。年金積立金は金銭の収入・支出の結果であるので

年末積立金
　＝年始積立金＋掛金収入＋積立金運用収入－年金給付額

という関係で移動する。もし年始に発生債務総額と年金積立金が一致しており、また従業員に関する年間の人数増減や給与の移動がすべて計算の基礎のとうりに実現すれば、年末にも発生債務総額と年金積立金は一致する。しかし移動が計算の基礎と違っていると、年末の発生債務と年金積立金の間には大小関係ができる。積立金の運用が予定利率以上で行なわれたならば年金積立金が発生債務より大きくなるし、年間の退職者数が予定より少なければ年金積立金が発生債務より小さくなる。保険会社であればこの差は剰余あるいは損失として毎年処理される(配当であったり準備金による補塡であったりする)が、年金制度では通常この差は持ち越して後年に調整して行くようにする。後に述べるように年金積立金が発生債務に足らない場合がよくあるが、そのときの不足額

発生債務－年金積立金

を**未積立債務**と呼ぶ。年金制度では未積立債務があっても、それを一時に補塡せず将来にわたって徐々に補塡する方策がとられる。

さて発生年金額基準方式が採用されたとき、制度発足の時点で退職年齢に近い高齢の従業員にとっては、もしそれ以後の発生年金額しか付与されないとすると、退職時には僅かの年金額しか期待できない。これを解決するため通常次のような方法がとられる。仮りに制度がずっと以前

から存在していたとすれば、x 歳で加入し現在 $x+t$ 歳になっているある特定の従業員について、過去の加入年齢、給与記録などから制度発足時点での彼の責任準備金(発生債務) V_{x+t} を（16.5.2）に基づいて計算することができる。彼にはそれだけの権利があると考えておいて、そのうえで以後（16.5.1）で定められるような一時払掛金を毎年払込み、年金額を積増していくと、定年時点では彼が加入した時から制度があったとした場合の年金額 B_r に達することができる。制度発足時に全従業員について　V_{x+t}　を計算し、それを合計したものは、彼らの過去の勤務に対し与えられるものなので、**過去勤務債務**（略称、ＰＳＬ）と呼ばれる。制度発足時には通常殆んどの従業員に過去勤務債務ができてその合計額が多額となるので、年金制度の母体企業はこれを一時に拠出せず、何年か（例えば 10年）に分けて拠出する。その毎年の拠出額は**過去勤務債務掛金**と呼ばれる。またこれに対し毎年全加入者について（16.5.1）で計算して制度に拠出される掛金を**通常掛金**（ノーマル　コスト)という。制度発足時の過去勤務債務を PSL とし、それを 10年で償却するときは、毎年の過去勤務債務掛金は $\dfrac{PSL}{\ddot{a}_{\overline{10|}}}$ である。

過去勤務債務は掛金なしに発生し発生債務の一部となるので、通常は制度発足時点で既に先に述べた未積立債務ができ、それは償却期間が経過するまで残る。償却期間経過後は、年金制度は通常掛金と責任準備金の完全積立(未積立債務なし)を柱とする正常な状態に入るのであるが、そのときでも先に説明したように、計算基礎に関する予定と実際の差に基づく若干の過剰積立あるいは未積立債務が伴う。

一時払で毎年少額の年金を購入していく方法に対し、年金額を予め定

めるか、または想定して、それに向かって平準保険料方式で積立を行う方法がある。その時は通常本章§2で述べたような平準定額の保険料または一定率の給与比例の保険料が使用される。このような方式を**予定年金額基準方式**というが、これには次に述べる三つの方式が考えられている。

（5）　個人平準保険料方式

個人平準保険料方式とは、年金制度開始時点での被保険者の実際年齢をもとに、(16.2.3), (16.2.11), (16.2.12) で表わされるような保険料を個人ごとに計算し、その合計を企業が拠出する方法である。従って被保険者が制度開始時点で 55歳であり、年金開始が 60歳であれば、積立期間は 5年に過ぎない。このような場合に十分な年金額を与えようとすれば、保険料は極めて高いものとなる。この例から分かるように個人平準保険料方式では、高年齢の従業員が多い場合には、制度開始後の初期の保険料が企業の負担能力を超えて高くなる恐れがある。

（6）　到達年齢方式

到達年齢方式は個人平準保険料方式と同じく個人ごとに保険料を計算するが、後者が予定年金額の全部を想定するのに対し、前者では年金額を既に確定した過去の勤務に対応する部分(例えば発生年金額)と想定する将来の勤務に対応する部分に分け、将来勤務に対応する部分については個人平準保険料方式と同じ方法で通常掛金を計算し、過去の勤務に対応する部分については制度発足時点で発生債務を計算し、それを残余期間で償却して年金開始時点で所定の年金額を積立てられるよう別途の平準掛金(過去勤務債務掛金)を定め、両者を合わせて徴収する。

制度開始後の加入者については保険料は個人平準保険料方式と同じになる。

（７）　加入年齢方式

加入年齢方式はわが国で最も普及している財政方式であるが、その特徴は、すべての加入者について標準加入年齢を適用して通常掛金を計算することと、過去勤務債務の償却を個人ごとでなく制度全体として行なうことである。

この方式では、まず標準者を想定してその制度への加入年齢 x（特定年齢とよぶ）と、定年退職して年金が開始される年齢 r を定める。（加入年齢が広く分散しているときは、例えば 20歳、30歳、40歳というように代表的な加入年齢を定め、全員をこの３群に分けて計算することもある）次に中途脱退率と標準的な昇給率を定めたうえ、§２で述べたいずれかの方法で標準の年金額を定める。そして年金額を定める方法に従って（16.2.3），（16.2.11）あるいは（16.2.12）に基づいて、毎年の保険料額あるいは給与に対する保険料率を計算する。実際の加入年齢や給与に個人毎の差異があっても、保険料率の計算では全員が標準的な過程をたどるとして計算を進める。そのうえで例えば給与に対する保険料率が定まっていれば、計算された保険料率を全員の給与総額に掛けて、その年の制度全体の保険料額とする。このようにして定められる保険料額を**通常掛金**という。

このときの責任準備金（発生債務）は発生年金額が予定どうりであれば、（16.2.14）～（16.2.19）によって与えられるが、ある年度の給与の額を個人別に見たとき殆んどの従業員について標準とは異なるので、実際には年度末の発生債務は次のように計算される。すなわち個人ごと

に年度末における給与から予定昇給率を用いて将来の給与を仮定し、それを用いて年金額を仮定して（16.2.14）～（16.2.19）に基づいて発生債務を計算する。それを全従業員について合計したものが年金制度の発生債務となる。

全従業員が標準の加入年齢で加入していたと考えれば、制度発足時にもこのようにして年金制度の発生債務が計算できるが、これは従業員の過去勤務に対する責任準備金となる。この額を企業が一時に制度に拠出できれば、以後は通常掛金のみを拠出することによって加入者の退職時に所定の年金額を準備することができるが、現実には一時の拠出はまず困難であるので、これを何年かに分けて払込む。（４）の発生年金額基準方式の場合と同様に、このように制度発足時に計算した全員に対する発生債務を**過去勤務債務**といい、その償却のために毎年払込まれる掛金を**過去勤務債務掛金**という。

この方式で採用される予定モデル給与あるいは予定昇給指数はあくまで標準を想定したものであるから、加入者個々にとっては標準との乖離があり、そのために、払込まれる保険料も実際に受け取る年金額も標準者とは異なったものとなる。すなわち個人、個人にとっては保険料を定める収支相等の式は近似的に成立しているに過ぎない。このことが個人保険の場合と異なる一つの特徴である。また過去勤務債務に基づく積立不足にみられるように、年金積立金が発生債務に不足しても、不足額を償却して行く手段が講じてあり、不足の債務が将来減少して行く見込みであれば年金制度として健全であるとする考え方をすることも個人保険の場合と異なっている。それは、年金制度は企業とともにいつまでも続き、このような乖離から生ずる過不足は後に修正することができると考

えられているからである。制度の資金に過不足を生ずる原因は外にも多い。(1)制度開始の前でも後でも想定した加入年齢どおりでない加入者が非常に多いし、(2)実際の経験が予定の計算基礎（退職率、昇給率 等）からかなり乖離して実現することも少なくない。そのために年金制度では何年かおきに（通常は5年ごと）計算の基礎を見直すとともに、新基礎に基づく全加入者（年金受給者を含む）の責任準備金を計算して、保有する資産と対比し、もし大きな不足(未積立債務)ができていればそれを補う手段を講じなければならないし、また場合によっては将来に向かって保険料の引上げも考えねばならない。このような見直し計算を年金制度の**再計算**という。

加入年齢方式のもう一つの利点は、インフレに対応するなどの理由で年金額を引上げる際に比較的対処しやすいことである。例えばインフレに対応して新しいモデル給与が作成され、年金額決定の方法が定められた場合（年金額は上昇する）には、それらに基づいて保険料率も新たに計算し直される。一方で個々の加入者に対しは、その到達年齢における新年金額の責任準備金と旧規定に基づいて保有している責任準備金との差額を付与してやれば、保険料についても年金額についても支障なく新制度へ移行できる。従って全加入者に対する上記の差額を企業が年金制度のために拠出すればよいが、この場合も過去勤務債務のように通常は一時に拠出せず、所定年数のあいだに分割して拠出される。このように制度発足後に追加してできる過去勤務債務を**後発過去勤務債務**という。(制度発足時の過去勤務債務を後発のそれと区別するときは**初期過去勤務債務**あるいは**先発過去勤務債務**という)

§6　総合保険料方式

これまでの財政方式では、加入者(あるいはそのうちの標準者)について個人別の収支相等を考え、保険料や年金債務も個人ごとの計算を主体としていたが、個人別は考えずに制度全体の収支のバランスのみを考えて必要な保険料を定めようとするのが**総合保険料方式**である。

総合保険料方式はさらに二種類に大別され、制度の現在加入者のみを対象に収支バランスを考える方式を**閉鎖型**といい、現在加入者に加え将来加入者まで含めて収支バランスを考える方式を**開放型**という。

（８）　総合保険料方式（閉鎖型、一般型）

アメリカの企業年金やわが国の厚生年金基金の一部で用いられている一つの財政方式で、その考え方を式で表わすと

$$\pi = \frac{\widetilde{A} - F}{E\ddot{a}} \tag{16.6.1}$$

となり、ここに

π ：計算年度における制度にかかる保険料

$\widetilde{A}$ ：全加入者に対し将来支払うべき年金の計算時点おける給付現価

F ：計算時点において制度の保有する年金積立金

$E\ddot{a}$ ：勤務中の加入者の残余勤務年数による年金現価の平均的な値

である。右辺の分子は、所定の年金給付を行うに必要な額に対し手持ちの資産では不足している額を表す。また分母の $E\ddot{a}$ をおおざっぱに全加入者の平均残余年数についての年金現価と考えれば、(16.6.1) は不足額を従業員の平均残余勤務年数で積立てることを表わしている。(ある

いは F が責任準備金 V に当たるとみれば、上式は $V = A - P\ddot{a}$ の変形である)

この式の右辺の $\widetilde{A}$ および $E\ddot{a}$ の計算は制度において年金額がどのような算式で定められているかに依存して定まる。例えば年金額が本章§２の（１）で述べたように加入者の勤続年数の長さのみから定められている時は、$\widetilde{A}$ は、個人別に想定される年金額あるいは既裁定者の年金額を A として（16.2.14）の右辺第１項あるいは（16.2.16）に当たる額を加入者個人個人について計算して合計すれば求められる。$E\ddot{a}$ は、${}_{x+t}L$ を年初における $x+t$ 歳の者の人数として

$$\frac{\displaystyle\sum_{t=0}^{r-x-1} {}_{x+t}L\,\ddot{a}^{S}_{x+t:\overline{r-x-t|}}}{\displaystyle\sum_{t=0}^{r-x-1} {}_{x+t}L} \tag{16.6.2}$$

によって求められる。また年金額が本章§２の（２）あるいは（３）で述べたように加入者の給与から定められている時は、$\widetilde{A}$ は、個人別に現在給与から想定される年金額あるいは既裁定者の年金額を A として（16.2.17）の右辺第１項あるいは（16.2.19）に当たる額を加入者個人個人について計算して合計すれば求められる。$E\ddot{a}$ は、${}_{x+t}S$ を計算時点における $x+t$ 歳の者の給与の合計額として

$$\frac{\displaystyle\sum_{t=0}^{r-x-1} {}_{x+t}S\,\ddot{a}^{SS}_{x+t:\overline{r-x-t|}}}{\displaystyle\sum_{t=0}^{r-x-1} {}_{x+t}S} \tag{16.6.3}$$

によって求められる。これは給与をウエイトにした $\ddot{a}$ の平均値である。

このようにして定められた保険料は通常次の再計算まで変えずに使用されるが、制度の構成に大きな変動のあった年には中途でも計算しなお

されるし、またπを毎年見直す方法も考えられる。

制度には次の再計算時まで毎年この保険料が収入されるが、その間には新規加入者、中途脱退者、定年退職者などがあり、再計算時点では集団の構成が変わっている。そこで新しい集団について再び（16.6.1）式で保険料を計算し適用する。このような洗い替えの計算を繰り返すので、個人ごとの年金確保が十分行われているかは明確には分からないが、企業および年金制度の永続性からこれでも不都合は起こらないと考えられている。

この方法の一つの長所は、計算の基礎に関する仮定と実現値との差異に基づく年金積立金の過不足、あるいはインフレ等に対応しての年金額の改定があっても、加入年齢方式のように後発過去勤務債務を立てることなく、調整に必要な額が将来自然に保険料の中に組み入れられることである。また再計算して計算基礎を変更しても、同じく保険料に急激な変化を与えずになだらかに修正されることである。

（９）　凍結初期債務方式

総合保険料方式においても制度開始時点では $F=0$ であるので、高齢者が多い企業等では初期の保険料が高くなる。そのため制度開始時点で過去勤務債務を加入年齢方式あるいは発生年金額基準方式で計算しておき、将来勤務にかかる年金額についてのみ総合保険料方式を適用しようとする方法があり、**凍結初期債務方式**と言われている。

この場合過去勤務債務の償却分は通常掛金と分けられて例えば毎年同額の掛金が定められる。通常掛金は、初年度については(８)で説明した $\widetilde{A}$ から開始時過去勤務債務を引いた額（それが全加入者に対し将来支払うべき年金のうちの将来勤務に対する部分の現価となる）を $E\ddot{a}$ で

割ったものとなり、次年度以降については、通常掛金に基づく年金積立金が既に存在するので、$\widetilde{A}$ から「開始時過去勤務債務を利殖した額」を引いた額からさらに｛通常掛金に基づく年金積立金｝を引いたものを $E\ddot{a}$ で割ったものとなる。

しかし年金積立金を通常掛金に基づく部分と過去勤務債務掛金に基づく部分に分けることは通常ないので、上記の「　」の中を過去勤務債務掛金に基づく年金積立金だけ減らし、同時に｛　｝の中を同額増やすことにすると結局通常掛金は

$$\pi = \frac{\widetilde{A} - (\text{過去勤務債務の未償却部分}) - F}{E\ddot{a}} \tag{16.6.4}$$

によって定められる。

この方法で開始時過去勤務債務を加入年齢方式で計算したものを**加入年齢型**凍結初期債務方式といい、発生年金額基準方式で計算したものを**到達年齢型**凍結初期債務方式という。

（10）　総合保険料方式（閉鎖型、原型）

公的年金で用いられる一つの保険料決定の方法であり、(8)の一般型の元になっている。いま年金額が勤務年数の長さのみから定まり、保険料は加入者１人につき毎年一定額 P を徴収することになっているとしよう。そのときこの集団に関する収支相等の式は、前節の記号を用いて

$$P \sum_{t=0}^{r-x-1} {}_{x+t}L\,\ddot{a}^{s}_{x+t:\overline{r-x-t|}} = \widetilde{A} - F \tag{16.6.5}$$

となる。これより

$$P = \frac{\widetilde{A} - F}{\displaystyle\sum_{t=0}^{r-x-1} {}_{x+t}L\,\ddot{a}^{s}_{x+t:\overline{r-x-t|}}} \tag{16.6.6}$$

が得られる。制度全体のこの年度の保険料を求めるには P を全員について合計して

$$P\sum_{t=0}^{r-x-1}{}_{x+t}L=\frac{\widetilde{A}-F}{\dfrac{\displaystyle\sum_{r=0}^{r-x-1}{}_{x+t}L\,\ddot{a}^{s}_{x+t:\overline{r-x-t|}}}{\displaystyle\sum_{t=0}^{r-x-1}{}_{x+t}L}}\tag{16.6.7}$$

となる。これは (16.6.1) で $E\ddot{a}$ に (16.6.2) を用いたものに一致する。

次に年金額が勤務期間中の給与から定まり、保険料は加入者の給与に一定率 ρ を掛けた額を徴収することになっているとしよう。そのときこの集団に関する収支相等の式は前節の記号を用いて

$$\rho\sum_{t=0}^{r-x-1}{}_{x+t}S\,\ddot{a}^{ss}_{x+t:\overline{r-x-t|}}=\widetilde{A}-F\tag{16.6.8}$$

となる。これより

$$\rho=\frac{\widetilde{A}-F}{\displaystyle\sum_{t=0}^{r-x-1}{}_{x+t}S\,\ddot{a}^{ss}_{x+t:\overline{r-x-t|}}}\tag{16.6.9}$$

が得られる。制度全体のこの年度の保険料を求めるには ρ を計算時の全員の給与に掛けて

$$\rho\sum_{t=0}^{r-x-1}{}_{x+t}S=\frac{\widetilde{A}-F}{\dfrac{\displaystyle\sum_{t=0}^{r-x-1}{}_{x+t}S\,\ddot{a}^{ss}_{x+t:\overline{r-x-t|}}}{\displaystyle\sum_{t=0}^{r-x-1}{}_{x+t}S}}\tag{16.6.10}$$

となる。これは (16.6.1) で $E\ddot{a}$ に (16.6.3) を用いたものに一致する。

これで原型と一般型とは同じものであることがわかったが、公的年金等で原型が実際に用いられる時には通常

（a）　遺族年金や障害年金の給付現価も $\widetilde{A}$ に含める

（b）　P や ρ は一定期間(例えば5年間)はそのまま同じ額または率を使用し、再計算時にそれらを修正する

といった形で行なわれる。

またこの財政方式においても、制度開始当初の保険料が高くなることを避け、後代の保険料と平滑にする意味で、制度開始時点で何等かの方法で過去勤務債務を計算し、過去勤務債務の償却を一定年数で行うとともに、通常掛金については（16.6.7）あるいは（16.6.10）でそれらの分子に（16.6.4）の分子を用いる方法も行なわれる。

（11）　総合保険料方式（開放型）

閉鎖型の総合保険料方式では、保険料を計算するとき、現在加入者の閉集団について収支がバランスするように考えたが、公的年金のように後続加入者が確実に見込まれる制度では、後続加入者の加入状況(通常は永久に亘っての)まで想定して、後続加入者を含めた全体で収支が相等するように保険料を計算する財政方式もよく採用され、そのような方式を**総合保険料方式（開放型）**という。

この方式では、後続加入者数についての仮定と彼等が年金受給者になるまでにどのような過程を辿るかについての仮定とが計算上重要な要素となる。それらが定まると、将来の事業年度ごとの総支払年金額と総給与が計算されるので、計算時点において前者の現価を合計したものを $\widetilde{A}$ とし、また後者の現価を合計したものを（16.6.9）の分母に代るものとして、(16.6.9）によって給与に掛ける保険料率 ρ が定まる。(給与

の代りに人数をとれば（16.6.6）に相当する保険料が得られる）

またこの財政方式でも、閉鎖型と同様に制度開始時点で過去勤務債務を立て、通常掛金と過去勤務債務掛金を分けて計算する方法も用いられるが、この方式を特に**開放基金方式**と呼んでいる。わが国の厚生年金基金の代行部分では開放基金方式が用いられている。

第１６章　　練習問題

（１）　ある会社の任意退職者について年齢別に中央脱退率を観察すると、 $m_{20}^{(w)}=0.08$ に始まり、１年増すごとに 0.005 ずつ減少し、 $m_{29}^{(w)}=0.035$ となった。死亡率（絶対死亡率）は第５回全会社表に従うとして、20歳から 30歳までの従業員在職２重脱退表を作成せよ。

（２）(16.2.3), (16.2.11), (16.2.12) で与えられる保険料は、各年齢での予定脱退率を大きくすれば、いずれもその値が小さくなることを証明せよ。

（３）　20歳で年金制度に加入した男子が 60歳になった時、最終給与の３割に当たる終身年金を支給するとする。昇給指数が 0.03であるとして、給与に比例する保険料率を次の仮定に基づいて計算せよ。予定利率は 5％で、 ${}_{40}p_{20}^{s}=0.25$,　 $\ddot{a}_{20:\overline{40|}}^{ss}=14.84$ であり、60歳以降は第５回全会社表が用いられるものとする。

（４）　加入年齢20歳、年金開始年齢60歳で、10年保証期間付終身年金を支給しようとする。いま昇給テーブルとしては、20歳の s_{20} から出発して毎年公差 δs_{20} で等差級数的に増加するものをとる。年金額は勤務年数に関係なく最終５ヶ年の平均給与の 25％であり、それを４分割して３月ごとに支払うとする。その時保険料は、毎年の給与の何％とすればよいか。それを与える式を書け。

またこの場合に10年後の責任準備金を与える式を書け。

（5） 年金開始後に被保険者が死亡した時にその妻が生存していれば、死亡の年度末から10年間、ただし妻の死亡または再婚まで、もとの年金の6割を支給しようとする。その時（16.2.3）式はどう変わるか。

また年金開始後1年目における責任準備金の式を書け。

（6） 毎年の給与 s_{x+t-1} と発生年金額 b_{x+t} の間に

$$b_{x+t} = k_t\, s_{x+t-1} \qquad (t = 1, 2, \cdots\cdots\cdots, r - x)$$

という関係があり、かつ

$$s_x \leq s_{x+1} \leq \cdots\cdots\cdots \leq s_{r-1} \tag{1}$$

$$s_x \geq s_{x+1}\, v\, p_x^s \geq s_{x+2}\, v^2\, {}_2p_x^s \geq \cdots\cdots\cdots \geq s_{r-1}\, v^{r-x-1}\, {}_{r-x-1}p_x^s \tag{2}$$

$$k_1 \leq k_2 \leq \cdots\cdots\cdots \leq k_{r-x} \tag{3}$$

という関係がある時、不等式

$$\frac{B_{x+t}}{B_r} \leq \frac{S_{x+t}}{S_r} \leq \frac{t}{r-x} \leq \frac{\ddot{a}^{ss}_{x:\overline{t}|}}{\ddot{a}^{ss}_{x:\overline{r-x}|}} \leq \frac{\ddot{a}^{s}_{x:\overline{t}|}}{\ddot{a}^{s}_{x:\overline{r-x}|}}$$

が成立することを証明せよ。

（7） $x + t$ 歳の加入者ばかりの年金制度で、（16.2.3）の方法で加入年齢方式による通常掛金を求めた。過去勤務債務については $r - x - t$ 年で償却するが、 $\ddot{a}_{\overline{r-x-t}|}$ でなく $\ddot{a}^{s}_{x+t:\overline{r-x-t}|}$ で割って毎年の償却額を定めた。（すなわち残存人数に応じた額で償却される） その時通常掛金と過去勤務債務掛金との和は、個人平準保険料方式における掛金に等しくなることを証明せよ。

練習問題解答

第７章　練習問題

(1)　(7.1.3), (7.1.7) にならって保険金額１の場合の収支相等の式をつくると

$$
\begin{aligned}
{}_{20}\overline{P}^{*}_{35:\overline{30}|}\,\ddot{a}_{35:\overline{20}|} &= \overline{A}_{35:\overline{30}|} + 0.015 \\
&+ {}_{20}\overline{P}^{*}_{35:\overline{30}|}\{0.3 + 0.1(\ddot{a}_{35:\overline{2}|} - \ddot{a}_{35:\overline{1}|}) + 0.05(\ddot{a}_{35:\overline{5}|} - \ddot{a}_{35:\overline{2}|})\} \\
&+ 0.03\,{}_{20}\overline{P}^{*}_{35:\overline{30}|}\,\ddot{a}_{35:\overline{20}|} + 0.003\,\ddot{a}_{35:\overline{20}|} + 0.0015(\ddot{a}_{35:\overline{30}|} - \ddot{a}_{35:\overline{20}|})
\end{aligned}
$$

であるから

$$
{}_{20}\overline{P}^{*}_{35:\overline{30}|} = \frac{\overline{A}_{35:\overline{30}|} + 0.015 + 0.003\,\ddot{a}_{35:\overline{20}|} + 0.0015(\ddot{a}_{35:\overline{30}|} - \ddot{a}_{35:\overline{20}|})}{(1-0.03)\ddot{a}_{35:\overline{20}|} - 0.3 - 0.1(\ddot{a}_{35:\overline{2}|} - \ddot{a}_{35:\overline{1}|}) - 0.05(\ddot{a}_{35:\overline{5}|} - \ddot{a}_{35:\overline{2}|})}
$$

これを計算すると0.02433となるので、保険金額1,000万円の場合の営業保険料は243,300円。

(2)　養老保険の保険金額１を基準とするときの、この保険の年額営業保険料は

$$
\begin{aligned}
P^{(12)*} &= \frac{\overline{A}_{35:\overline{30}|} + \alpha_1 + \gamma_1\,\ddot{a}^{(12)}_{35:\overline{20}|} + \gamma_1'(\ddot{a}_{35:\overline{30}|} - \ddot{a}_{35:\overline{20}|})}{(1-\beta_2)\,\ddot{a}^{(12)}_{35:\overline{20}|}} \\
&+ 4\,\frac{\overline{A}^{1}_{35:\overline{20}|} + \alpha_2 + \gamma_2\,\ddot{a}^{(12)}_{35:\overline{20}|}}{(1-\beta_2)\,\ddot{a}^{(12)}_{35:\overline{20}|}}
\end{aligned}
$$

である。$\ddot{a}^{(12)}_{35:\overline{20}|}$ は (4.4.3) の右辺第２項までを使って計算することにすると、この値は

$$
P^{(12)*} = 0.04860
$$

となる。養老保険金額が200万円ならば、この値は97,200円であるが、月額はこれを12で割って、8,100円となる。

(3) (*a*) $F = 1.01\,\ddot{a}_{x+f:\overline{n}|}$

(*b*) $$P^{*} = \frac{A^{\,1}_{x:\overline{f}|} + 0.02 + 0.003\,\ddot{a}_{x:\overline{f}|}}{0.97\,\ddot{a}_{x:\overline{f}|}} \times F$$

(*c*) $F = 9,769598$ $\qquad P^{*} = 0.301532$

(4) 標準体契約およびこのような条件付保険契約に関する営業保険料の算式は

$$P^{*} = P(1+k) + C \qquad \text{および} \qquad P^{R*} = P^{R}(1+k) + C$$

である。従って収入すべき特別保険料は

$$P^{R*} - P^{*} = (P^{R} - P)(1+k)$$

となる。(4.16.9)のときにならって収支相等の式をつくれば

$$P^{R}\,\ddot{a}^{(1+\alpha)}_{x:\overline{n}|} = \overline{A}^{(1+\alpha)}_{x:\overline{n}|} + n(P^{R} - P)(1+k)A^{(1+\alpha)\,1}_{x:\overline{n}|}$$

従って

$$P^{R} = \frac{\overline{A}^{(1+\alpha)}_{x:\overline{n}|} - nP(1+k)A^{(1+\alpha)\,1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(1+\alpha)}_{x:\overline{n}|} - n(1+k)A^{(1+\alpha)\,1}_{x:\overline{n}|}}$$

となる。特別保険料は

$$(P^{R} - P)(1+k) = \frac{\overline{A}^{(1+\alpha)}_{x:\overline{n}|} - P\,\ddot{a}^{(1+\alpha)}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(1+\alpha)}_{x:\overline{n}|} - n(1+k)A^{(1+\alpha)\,1}_{x:\overline{n}|}}(1+k)$$

(5) (*a*) (7.4.2)を導いた時のような収支相等の式をつくり、それからPおよびP^{*}を導く。

$$\begin{aligned}
P\,\ddot{a}_{x:\overline{f}|} &= P^{*}(IA)^{\,1}_{x:\overline{f}|} + {}_{f|}A_{x:\overline{n}|} \\
&= (P + C)(1+k)(IA)^{\,1}_{x:\overline{f}|} + {}_{f|}A_{x:\overline{n}|}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P &= \frac{{}_{f|}A_{x:\overline{n}|} + C(1+k)(IA)^{\,1}_{x:\overline{f}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{f}|} - (1+k)(IA)^{\,1}_{x:\overline{f}|}} \\
&= \frac{M_{x+f} - M_{x+f+n} + D_{x+f+n} + C(1+k)(R_x - R_{x+f} - fM_{x+f})}{(N_x - N_{x+f}) - (1+k)(R_x - R_{x+f} - fM_{x+f})}
\end{aligned}$$

$$P^{*} = \frac{M_{x+f} - M_{x+f+n} + D_{x+f+n} + C(N_x - N_{x+f})}{(N_x - N_{x+f}) - (1+k)(R_x - R_{x+f} - fM_{x+f})}(1+k)$$

(*b*) $f + t\ (t < n)$年後の過去法による責任準備金は

$$\frac{1}{D_{x+f+t}}\{P(N_x-N_{x+f})-P^*(R_x-R_{x+f}-fM_{x+f})-(M_{x+f}-M_{x+f+t})\}$$

であり、将来法による責任準備金は

$$\frac{1}{D_{x+f+t}}(M_{x+f+t}-M_{x+f+n}+D_{x+f+n})$$

である。(*a*)の結果を用いて過去法の場合の分子を変形すると

$$\begin{aligned}\{\quad\} &= P(N_x-N_{x+f})-(P+c)(1+k)(R_x-R_{x+f}-fM_{x+f})\\ &\qquad -(M_{x+f}-M_{x+f+t})\\ &= P\{(N_x-N_{x+f})-(1+k)(R_x-R_{x+f}-fM_{x+f})\}\\ &\qquad -c(1+k)(R_x-R_{x+f}-fM_{x+f})-(M_{x+f}-M_{x+f+t})\\ &= M_{x+f+t}-M_{x+f+n}+D_{x+f+n}\end{aligned}$$

となり、これは将来法の場合の分子である。

(6)　この一時払営業保険料を A とすれば、純保険料は $0.9A$ であり、それは終身年金現価と死亡時給付金との合計に等しい。A の整数部分を B ($B=[A]$) とすれば

$$\begin{aligned}0.9A &= a_{60}+\frac{1}{D_{60}}\{A\bar{C}_{60}+(A-1)\bar{C}_{61}+\cdots\cdots\cdots+(A-B)C_{60+B}\}\\ &= a_{60}+\frac{1}{D_{60}}\{(A-B)(\bar{C}_{60}+\bar{C}_{61}+\cdots\cdots\cdots+\bar{C}_{60+B})\\ &\qquad +B\bar{C}_{60}+(B-1)\bar{C}_{61}+\cdots\cdots+\bar{C}_{60+B-1}\}\end{aligned}$$

(4.11.11)を用いると

$$=a_{60}+(A-B)\frac{\bar{M}_{60}-\bar{M}_{61+B}}{D_{60}}+\frac{B\bar{M}_{60}-(\bar{R}_{61}-\bar{R}_{61+B})}{D_{60}}$$

この式から試行によって A を求めればよいが、先ず a_{60} の値から推定した A として $13+\varepsilon$ (ε は極めて小さい値)を入れてみる。その時右辺第2項は0と見なして計算ができ、左辺<右辺となる。次に A として $14+\varepsilon$ を入れて計算すると、左辺>右辺となる。従って $B=13$, $A=13+x$ であることがわかる。これを上式に入れて計算すると、$x=0.517$ となるので、$A=13.517$ である。

(7)　完全年金であるから死亡時を t とすると、購入額から支払年金額を差引いた差額は $A-t$ である。従って収支相等の式は

$$0.9\,A = a_{60}^{(k)} + \int_0^A (A - t)\, v^t\ {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt$$

$$= \mathring{a}_{60}^{(k)} + A\ \bar{A}^{\,1}_{60:\overline{A|}} - (\bar{I}\bar{A})^{\,1}_{60:\overline{A|}}$$

(4.11.15)を用いると

$$= a_{60}^{(k)} + (A + \frac{1}{2})\bar{A}^{\,1}_{60:\overline{A|}} - (\bar{I}\bar{A})^{\,1}_{60:\overline{A|}}$$

$a_{60}^{(k)}$ を(4.13.6)により求めて、それから類推した整数 A を用いて

$$\bar{A}^{\,1}_{60:\overline{A|}} = \frac{\bar{M}_{60} - \bar{M}_{60+A}}{D_{60}}$$

$$(I\bar{A})^{\,1}_{60:\overline{A|}} = \frac{\bar{R}_{60} - \bar{R}_{60+A} + A\,\bar{M}_{60+A}}{D_{60}}$$

を計算した上、上式の左辺と右辺を計算して比較する。いくつかの整数 A についてそのような比較をした時、左辺と右辺の大小が逆転する二つの整数の間に求める値がある。それを試行により求めればよい。

第8章　練習問題

(1) $\,^{20}_{\ 5}\overline{V}_{40:\overline{25}|} = 0.12708$　　　$\,^{20}_{\ 5}\overline{V}^{[10Z]}_{40:\overline{25}|} = 0.11287$

$\,^{20}_{\ 5}\overline{V}^{[Z]}_{40:\overline{25}|} = 0.10610$　　　$\,^{20}_{\ 5}\overline{V}^{[PT]}_{40:\overline{25}|} = 0.10722$

$\,^{20}_{\ 5}\overline{V}^{[A]}_{40:\overline{25}|} = 0.10710$　　　((8.3.2)を用いる)

$\,^{20}_{\ 5}\overline{V}^{[I]}_{40:\overline{25}|} = 0.12807$

(2) 過去法による責任準備金の式は (5.3.1)を参考に

$$\frac{1}{D_{x+1}}(P_1 D_x - \bar{C}_x) \qquad (t=1)$$

$$\frac{1}{D_{x+t}}\{P_1 D_x + P_2(N_{x+1} - N_{x+t}) - (\bar{M}_x - \bar{M}_{x+t})\} \qquad (2 \leq t < h)$$

$$\frac{1}{D_{x+t}}\{P_1 D_x + P_2(N_{x+1} - N_{x+h}) + \overline{P}_{x:\overline{n}|}(N_{x+h} - N_{x+t}) - (\bar{M}_x - \bar{M}_{x+t})\} \qquad (h \leq t)$$

である。$t=1$ のときは (8.1.3)と、$\ddot{a}_{x:\overline{h}|} - 1 = v\,p_x\,\ddot{a}_{x+1:\overline{h-1}|}$

と $\dfrac{D_x}{D_{x+1}} = \dfrac{1}{v\,p_x}$ を用いると

$$上式 = \frac{D_x}{D_{x+1}}\{\overline{P}_{x:\overline{n}|} - \alpha(1 - \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}})\} - \frac{\bar{C}_x}{D_{x+1}}$$

$$= {}_1\overline{V}_{x:\overline{n}|} - \alpha\frac{\ddot{a}_{x+1:\overline{h-1}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}$$

これは (8.1.5)に一致する。$2 \leq t < h$ のときは、(8.1.2), (8.1.3)を用いると

$$上式 = \frac{D_x}{D_{x+t}}\{\overline{P}_{x:\overline{n}|} - \alpha(1 - \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}})\} + \frac{N_{x+1} - N_{x+t}}{D_{x+t}}(\overline{P}_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}) - \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+t}}{D_{x+t}}$$

$$= {}_t\overline{V}_{x:\overline{n}|} - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\left[\frac{D_x}{D_{x+t}}\frac{D_{x+1}}{D_x}\frac{N_{x+1} - N_{x+h}}{D_{x+1}} - \frac{N_{x+1} - N_{x+t}}{D_{x+t}}\right]$$

$$= {}_t\bar{V}_{x:\overline{n}|} - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\ \ddot{a}_{x+t:\overline{h-t}|}$$

これは (8.1.5) に一致する。$h \leq t$ のときは同様にして

$$上式 = {}_t\bar{V}_{x:\overline{n}|} - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} \times 0 = {}_t\bar{V}_{x:\overline{n}|}$$

となる。

(3)　(ここでは年金現価を $\sum v^t\ {}_tp_x$ によって細かく計算した)

(a)　先ずこの契約の純保険料と営業保険料を計算しておくと

$$P = \frac{1}{\ddot{a}_{40:\overline{25}|}} - d = 0.02091$$

$$P^* = \frac{1}{0.97}\left(P + \frac{0.025}{\ddot{a}_{40:\overline{25}|}} + 0.0025\right) = 0.02602$$

この P を用いると (8.1.2) より

$$P_2 = P + \frac{0.02}{\ddot{a}_{40:\overline{10}|}} = 0.02345$$

$$P_1 = P_2 - 0.02 = 0.00345$$

(b)　第 t 年度末における10年チルメル式責任準備金をここでは ${}_tV$ で表わすことにして先ずそれらを計算しよう。(5.3.7) (8.1.5) を参考にすると

$${}_0V = 0$$

$${}_1V = \left(1 - \frac{\ddot{a}_{41:\overline{24}|}}{\ddot{a}_{40:\overline{25}|}}\right) - 0.02\ \frac{\ddot{a}_{41:\overline{9}|}}{\ddot{a}_{40:\overline{10}|}} = 0.00197$$

同様に計算して

$${}_3V = 0.04925,\ {}_4V = 0.07467,\qquad {}_{11}V = 0.28933,\ {}_{12}V = 0.32396$$

次に第 t 年後の危険保険料、貯蓄保険料、付加保険料をそれぞれ ${}_tP^r$, ${}_tP^s$, ${}_tP^e$ で表わすと、(8.1.8), (8.1.7), (5.6.10) を参考にして

$$\begin{cases} {}_1P^r = v\,q_{40}(1 - {}_1V) = 0.00158 \\ {}_1P^s = v\ {}_1V - {}_0V = 0.00187 \\ {}_1P^e = P^* - P_1 = 0.02257 \end{cases}$$

$$\begin{cases} {}_4P^r = v\,q_{43}(1 - {}_4V) = 0.00191 \\ {}_4P^s = v\,{}_4V - {}_3V = 0.02153 \\ {}_4P^e = P^* - P_2 = 0.00257 \end{cases}$$

$$\begin{cases} {}_{12}P^r = v\,q_{51}(1 - {}_{12}V) = 0.00317 \\ {}_{12}P^s = v\,{}_{12}V - {}_{11}V = 0.01774 \\ {}_{12}P^e = P^* - P = 0.00511 \end{cases}$$

(4)　(8.1.3)より

$$v^{\frac{1}{2}}q_x = \overline{P}_{x:\overline{n}|} - \alpha\left(1 - \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\right)$$

となるようにαを定めればよい。この式より

$$\begin{aligned} v^{\frac{1}{2}}q_x\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= \overline{A}_{x:\overline{n}|} - \alpha(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1) \\ &= v^{\frac{1}{2}}q_x + v\,p_x\overline{A}_{x+1:\overline{n-1}|} - \alpha\,v\,p_x\,\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|} \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{v\,p_x\,\overline{A}_{x+1:\overline{n-1}|}}{v\,p_x\,\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}} - \frac{v^{\frac{1}{2}}q_x(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1)}{v\,p_x\,\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}} = \overline{P}_{x+1:\overline{n-1}|} - v^{\frac{1}{2}}q_x$$

これが求めるαである。またその時には

$$P_2 = P_1 + \alpha = \overline{P}_{x+1:\overline{n-1}|}$$

であるので、将来法で

$$\begin{aligned} {}_t\overline{V}^{[z]}_{x:\overline{n}|} &= \overline{A}_{x+t:\overline{n-t}|} - P_2\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \\ &= \overline{A}_{(x+1)+(t-1):\overline{(n-1)-(t-1)}|} - \overline{P}_{x+1:\overline{n-1}|}\,\ddot{a}_{(x+1)+(t-1):\overline{(n-1)-(t-1)}|} \\ &= {}_{t-1}\overline{V}_{x+1:\overline{n-1}|} \end{aligned}$$

(5)　(a)　この場合$\gamma' = 0$であるから、(7.1.5)より

$$(1-\beta)P^*_{x:\overline{n}|} - \gamma = P_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{1}$$

である。さて (8.3.2)より

$${}_tV^{[A]}_{x:\overline{n}|} = A_{x+t:\overline{n-t}|} - \left(P_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\right)\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

であるから、(5.6.5)を導いた過程において、$P_{x:\overline{n}|}$の代りに$P_{x:\overline{n}|} + \dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$を用いれば、同様にして

$$ {}_tV_{x:\overline{n}|}^{[A]} + \left(P_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \right) - v\,q_{x+t} = v\,p_{x+t}\ {}_{t+1}V_{x:\overline{n}|}^{[A]} $$

が得られる。この左辺に先の(1)を入れれば求める式となる。

(*b*) 右辺の〔 〕の中を(*a*)で得た再帰式を用いて変形し、さらに $d = 1 - v$, $q_{x+t} = 1 - p_{x+t}$ を用いると

$$ \begin{aligned} [\quad] &= 1 - \left(v\,p_{x+t}\ {}_{t+1}V_{x:\overline{n}|}^{[A]} + v\,q_{x+t} \right) - (1 - v) \\ &= v\,p_{x+t} \left(1 - {}_{t+1}V_{x:\overline{n}|}^{[A]} \right) \\ &= \frac{D_{x+t+1}}{D_{x+t}} \left(1 - {}_{t+1}V_{x:\overline{n}|}^{[A]} \right) \end{aligned} $$

(6) 本章§4の始めに述べた式を

$$ {}_{t+0}V = {}_tV - E_t + P $$

とする。(第5章§1参照) 以下は§4におけるように (8.4.1)を導いて、保険料積立金と未経過保険料を決定する。

第9章　練習問題

(1)　保険金額1について計算を行なうと、(9.1.1)による解約返戻金は

$$ {}_3W = {}^{20}_{3}\overline{V}^{[I]}_{40:\overline{25}|} - \frac{7}{10}\sigma = 0.05553 $$

$$ {}_{15}W = {}^{20}_{15}\overline{V}^{[I]}_{40:\overline{25}|} = 0.50191 $$

これらを用い、(9.3.1)により払済保険金額を計算すると

$$ t = 3 \text{ では}\quad S = \frac{{}_3W}{\overline{A}_{43:\overline{22}|} + \gamma'\ddot{a}_{43:\overline{22}|}} = 0.15720 $$

$$ t = 15 \text{ では}\quad S = \frac{{}_{15}W}{\overline{A}_{55:\overline{10}|} + \gamma'\ddot{a}_{55:\overline{10}|}} = 0.81859 $$

延長保険に関しては、先ず $t = 3$ では

$$ \overline{A}^{1}_{43:\overline{14}|} + \gamma'\ddot{a}_{43:\overline{14}|} = 0.05418 $$

$$ \overline{A}^{1}_{43:\overline{13}|} + \gamma'\ddot{a}_{43:\overline{13}|} = 0.05840 $$

であるので、左辺の式が ${}_3W = 0.05553$ に等しくなるような T を1次補間で求めると、$14 + 0.320 \fallingdotseq$ 14年4カ月となる。$t = 15$ では生存保険金が期待されるが、それは (9.4.2)により

$$ S' = \frac{{}_{15}W - (\overline{A}^{1}_{55:\overline{10}|} + \gamma'\ddot{a}_{55:\overline{10}|})}{A_{55:\overset{1}{\overline{10}|}}} = 0.78942 $$

である。以上をまとめ、また保険金額を1,000万円とすると

	$t = 3$	$t = 15$
(a) 解約返戻金	55.53 万円	501.91 万円
(b) 払済保険金額	157.20	818.59
(c) 延長期間および 生存保険金額	14年4カ月 —	10年 789.42 万円

(2)　この時は

$$(9.5.1)\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}=\overline{P}_{x:\overline{m}|}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}+{}_t\overline{V}_{x:\overline{m}|}-{}_t\overline{V}_{x:\overline{n}|}$$
$$=\overline{A}_{x+t:\overline{m-t}|}-{}_t\overline{V}_{x:\overline{n}|}=\overline{P}_{x+t:\overline{m-t}|}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}-{}_t\overline{V}_{x:\overline{n}|}$$
$$=(9.5.2)\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}$$

(3)　(a) (9.5.1)に当る考え方をする場合は、集金経費が変更後の保険料全体に対しかかると考えるべきであるので、(9.5.1)をその分修正して

$${}_{m'}\overline{P}^{*}_{x:\overline{n'}|}+\frac{{}^{m'}_{t}\overline{V}^{[A]}_{x:\overline{n'}|}-{}^{m}_{t}\overline{V}^{[A]}_{x:\overline{n}|}}{(1-\beta)\,\ddot{a}_{x+t:\overline{m'-t}|}}$$

(b) (9.5.2)に当る考え方をする場合は、集金経費について考慮する外に、残余期間に対する新保険料から、新契約費を除かねばならない。これを除かないともとの契約の新契約時と合せ2度新契約費をかけることになるからである。(7.1.5)の右辺を参照してこれを行なうと求める保険料は

$$\left({}_{m'-t}\overline{P}^{*}_{x+t:\overline{n'-t}|}-\frac{\alpha}{(1-\beta)\,\ddot{a}_{x+t:\overline{m'-t}|}}\right)-\frac{{}^{m}_{t}\overline{V}^{[A]}_{x:\overline{n}|}}{(1-\beta)\,\ddot{a}_{x+t:\overline{m'-t}|}}$$

(a)および(b)で得た両保険料が等しいことは次のようにして証明される。すなわち (8.3.1)からわかるように

$$(a)\times(1-\beta)\,\ddot{a}_{x+t:\overline{m'-t}|}$$
$$=\overline{A}_{x+t:\overline{n'-t}|}+\gamma\ddot{a}_{x+t:\overline{m'-t}|}+\gamma'(\ddot{a}_{x+t:\overline{n'-t}|}-\ddot{a}_{x+t:\overline{m'-t}|})-{}^{m}_{t}\overline{V}^{[A]}_{x:\overline{n}|}$$
$$=(1-\beta)\,\ddot{a}_{x+t:\overline{m'-t}|}\;{}_{m'-t}\overline{P}^{*}_{x+t:\overline{n'-t}|}-\alpha-{}^{m}_{t}\overline{V}^{[A]}_{x:\overline{n}|}$$
$$=(b)\times(1-\beta)\,\ddot{a}_{x+t:\overline{m'-t}|}$$

(4)　旧契約と変更後契約のそれぞれの t 年経過後の責任準備金を ${}_t\overline{V}_{x:\overline{n}|}$ および ${}^{m}_{t}\overline{V}_{x:\overline{n}|}$ とする。この責任準備金の差額を払込終了時までに平準化して徴収すると考えると、変更後の保険料は

$${}_{m}\overline{P}^{*}_{x:\overline{n}|}+\frac{{}^{m}_{t}\overline{V}_{x:\overline{n}|}-{}_t\overline{V}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}$$

（ただし ${}_{m}\overline{P}^{*}_{x:\overline{n}|}$ は x 歳契約、m 年払込 n 年満期養老保険の営業保険料）

また旧契約の t 年経過後の責任準備金で、$x+t$ 歳契約、$m-t$ 年払込 $n-t$ 年満期養老保険の保険料を割引くと考えると、変更後の保険料は

$$ {}_{m-t}\overline{P}^{*}_{x+t:\overline{n-t}|} - \frac{{}_t\overline{V}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}} $$

(5)　$\gamma' = 0$ として、(9.6.2) と (9.6.3) を見比べれば

$$ \overline{P} \times \frac{{}_t\overline{V}}{\overline{A}} = \frac{{}_t\overline{V}}{\ddot{a}} $$

であれば、両式が等しくなることがわかるが、$\overline{P} = \dfrac{\overline{A}}{\ddot{a}}$ であるからこの式は明らかに成立する。

(6)　(*a*)　t 年経過後の旧契約の責任準備金 ${}_t\overline{V}_{x:\overline{n}|} + {}_t\overline{V}^{1}_{x:\overline{n}|}$ で購入しうる払済養老保険金額は

$$ S = \frac{{}_t\overline{V}_{x:\overline{n}|} + {}_t\overline{V}^{1}_{x:\overline{n}|}}{\overline{A}_{x+t:\overline{n-t}|}} $$

であるので、転換後の保険料は、この S を用いて

$$ \overline{P}_1 = (2 - S)\,\overline{P}_{x+t:\overline{n-t}|} + 2\,\overline{P}^{1}_{x+t:\overline{n-t}|} $$

(*b*)　${}_t\overline{V}_{x:\overline{n}|}$ で購入しうる払済養老保険金額および ${}_t\overline{V}^{1}_{x:\overline{n}|}$ で購入しうる払済定期保険金額は、それぞれ

$$ S^{E} = \frac{{}_t\overline{V}_{x:\overline{n}|}}{\overline{A}_{x+t:\overline{n-t}|}}\ , \qquad S^{T} = \frac{{}_t\overline{V}^{1}_{x:\overline{n}|}}{\overline{A}^{1}_{x+t:\overline{n-t}|}} $$

であるから、転換後の保険料はこの S^{E}, S^{T}を用いて

$$ \overline{P}_2 = (2 - S^{E})\,\overline{P}_{x+t:\overline{n-t}|} + (2 - S^{T})\,\overline{P}^{1}_{x+t:\overline{n-t}|} $$

(*c*)　$\overline{P}_1$ と $\overline{P}_2$ を比べて、両者が等しいことを証明するには

$$ S\,\overline{P}_{x+t:\overline{n-t}|} = S^{E}\,\overline{P}_{x+t:\overline{n-t}|} + S^{T}\,\overline{P}^{1}_{x+t:\overline{n-t}|} $$

となることを言えばよい。ところで $\overline{P} = \dfrac{\overline{A}}{\ddot{a}}$ を用いると

$$ S\,\overline{P}_{x+t:\overline{n-t}|} = \frac{{}_t\overline{V}_{x:\overline{n}|} + {}_t\overline{V}^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}} $$

$$S^E\,\overline{P}_{x+t:\overline{n-t}|} + S^T\overline{P}^{\,1}_{x+t:\overline{n-t}|} = \frac{{}_t\overline{V}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}} + \frac{{}_t\overline{V}^{\,1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}$$

であるから両者は等しい。

第10章　練習問題

(1)　損益計算書を分解した利源分析表（(10.3.9)の後で述べたもの）を各保険年度について作成して利源分析を行なう。ただし P, ${}_tV$ 等は保険金額100万円に対するものとする。また利息収入 A と利息収入 B とは、利息収入総額を $l_{x+t-1}\,({}_{t-1}V+P)$ と $(l_{x+t-1}\,P^e - E)$ との比によって按分して定める。

第１年度　（単位1,000円）

収入の部		支出の部	
前年度末責任準備金	0	保険金	90,000
収入純保険料	345,000	解約契約責任準備金	18,715
(100,000×3,450円)		(9,500×1,970円)	
予定利息	18,975	当年度末責任準備金	178,108
千円 (345,000×0.055)		(90,410×1,970円)	
収入利息A	30,441	予定利息	18,975
収入付加保険料	2,257,000	事業費	2,500,000
(100,000×22,570円)			
利息収入B	−21,441		
解約契約責任準備金	18,715	解約返戻金	0

従って　死差益 = 77,152千円　利差益 = 11,466千円

費差費 = −264,441千円　解約益 = 18,715千円

第4年度　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（単位1,000円）

収入の部		支出の部	
前年度末責任準備金 （84,500×49,250円） 収入純保険料 （84,500×23,450円） 予定利息 （上記2項の和の5.5%）	4,161,625 1,981,525 337,873	保険金 解約契約責任準備金 （1,250×74,670円） 当年度末責任準備金 （83,100×74,670円）	150,000 93,338 6,205,077
収入利息A	528,095	予定利息	337,873
収入付加保険料 （84,500×2,570円） 収入利息B	217,165 1,905	事業費	195,000
解約契約責任準備金	93,338	解約返戻金	85,838

従って　　死差益＝32,608千円　利差益＝190,222千円

費差益＝24,070千円　解約益＝　7,500千円

第12年度　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（単位1,000円）

収入の部		支出の部	
前年度末責任準備金 （78,000×289,330円） 収入純保険料 （78,000×20,910円） 予定利息 （上記2項の和の5.5%）	22,567,740 1,630,980 1,330,930	保険金 解約契約責任準備金 （390×323,960円） 当年度末責任準備金 （77,300×323,960円）	310,000 126,344 25,042,108
利息収入A	2,015,792	予定利息	1,330,930
収入付加保険料 （78,000×5,110円） 利息収入B	398,580 18,208	事業費	180,000
解約契約責任準備金	126,344	解約返戻金	126,344

従って　　死差益＝51,198千円　利差益＝684,862千円

費差益＝236,788千円　解約益＝　　0

(2)　(a) (10．3．1)に当る式は

$$l_{x+t-1}\,({}_{t-1}V-1)(1+i)-(l_{x+t-1}-d_{x+t-1})\,{}_{t}V=0$$

である。(この式は(5．2．4)より ${}_{t}V=\ddot{a}_{x+t}$ であることと、(4．3．17)により証明できる。)

次に、(10．3．2)および(10．3．3)に当る式は

$$l_{x+t-1}\,({}_{t-1}V-1)(1+i')-(l_{x+t-1}-d'_{x+t-1})\,{}_{t}V=G$$

$$G=l_{x+t-1}\,({}_{t-1}V-1)(i'-i)+(d'_{x+t-1}-d_{x+t-1})\,{}_{t}V$$

となる。最後の式の右辺第1項が利差益、第2項が死差損($d'<d$)を表わす。

(b)　G が正となるためには

$$(i'-i)({}_{t-1}V-1)>\frac{d_{x+t-1}-d'_{x+t-1}}{l_{x+t-1}}\,{}_{t}V$$

であるが、${}_{t-1}V$ と ${}_{t}V$ に(5．2．4)を用い、さらに(4．3．17)を用いると

$$\begin{aligned} i'-i &>(q_{x+t-1}-q'_{x+t-1})\frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_{x+t-1}-1} \\ &=(q_{x+t-1}-q'_{x+t-1})\frac{1}{v\,p_{x+t-1}} \end{aligned}$$

第11章　練習問題

(1)　選択生命表が用いられ、かつ第２種の予定事業費が、α, β, γ であるとすると、次の収支相等の式が成立する。

$$P^* \ddot{a}_{[x]:\overline{n}|} = \bar{A}_{[x]:\overline{n}|} + \alpha + (\beta P^* + \gamma)\ddot{a}_{[x]:\overline{n}|} + \frac{1}{D_{[x]}} r P^* \sum_{j=k}^{n} (j - k + 1) D_{[x]+j}$$

右辺第４項において

$$\sum_{j=k}^{n} (j - k + 1) D_{[x]+j} = S_{[x]+k} - S_{[x]+n+1} - (n - k + 1) N_{[x]+n+1}$$

であるので、これを B とおけば

$$P^* = \frac{\bar{M}_{[x]} - \bar{M}_{[x]+n} + D_{[x]+n} + \alpha D_{[x]} + \gamma (N_{[x]} - N_{[x]+n})}{(1 - \beta)(N_{[x]} - N_{[x]+n}) - r B}$$

(2)　将来法の責任準備金の式に基づいて、$t < k$ ならば

$${}_tV = \bar{A}_{[x]+t:\overline{n-t}|} + (\beta \pi + \gamma)\ddot{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|} + \frac{1}{D_{[x]+t}} r \pi \sum_{j=k}^{n} (j - k + 1) D_{[x]+j} - \pi \ddot{a}_{[x]+t:\overline{n-t}|}$$

である。$t \geq k$ ならば上式の第３項を

$$\frac{1}{D_{[x]+t}} r \pi \sum_{j=t}^{n} (t - k + 1) D_{[x]+j}$$

とする。

(3)　第４章、練習問題(3)の(1)における $(IA)_{x:\overline{n}|}$ を用いて

$$P^* = \frac{1}{1-\beta} \left\{ P_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + \gamma + b \frac{(IA)_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \right\}$$

複式の場合の各年度における死亡保険金は、$(1 + b)$, $(1 + b)^2$, …………, $(1 + b)^n$ であるから、この部分の一時払保険料は

$$\tilde{A}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{l_x}\{(1+b)v\,d_x + (1+b)^2 v^2 d_{x+1} + \cdots\cdots\cdots + (1+b)^n v^n d_{x+n-1} + (1+b)^n v^n l_{x+n}\}$$

これは

$$(1+b)v = v' \rightarrow \frac{1+b}{1+i} = \frac{1}{1+i'} \rightarrow i' = \frac{i-b}{1+b}$$

とした場合の一時払保険料に当る。この $\tilde{A}_{x:\overline{n}|}$ を単式の場合の $A_{x:\overline{n}|} + b(IA)_{x:\overline{n}|}$ の代りに用いればよい。

(4)

$$P = \frac{1}{N_x - N_{x+n}}\Big[(M_x - M_{x+n} + D_{x+n}) + b'(R_x - R_{x+5} - 5M_{x+5})$$
$$+ 5b(M_{x+5} - M_{x+n} + D_{x+n}) + b'(R_{x+5} - R_{x+10} - 5M_{x+10})$$
$$+ 5b(M_{x+10} - M_{x+n} + D_{x+n}) + b'(R_{x+10} - R_{x+15} - 5M_{x+15})$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ 5b(M_{x+n-5} - M_{x+n} + D_{x+n}) + b'(R_{x+n-5} - R_{x+n} - 5M_{x+n})$$
$$+ 5b\,D_{x+n}\Big]$$

(5) 本章§3の算式を次のように改める。

$$R_1 = (P_1 - E_1)(1+i') - (S_1 + W_1)(1+\frac{i'}{2})$$

$$R_2 = (R_1 + P_2 - D_2 - E_2)(1+i') - (S_2 + W_2)(1+\frac{i'}{2})$$

$$R_t = (R_{t-1} + P_t - D_t - E_t)(1+i') - (S_t + W_t)(1+\frac{i'}{2})$$

第12章　練習問題（1）

(1)　(a)　$0.25 \times 0.10 \times 0.02 = 0.0005$

(b)　$(1 - 0.25) \times (1 - 0.10) \times (1 - 0.02) = 0.6615$

(c)　(b)の余確率として　　0.3385

(d)　(a)の余確率として　　0.9995

(2)　(a)　特定の5人が死亡し、他は生存するから $q_x^5 p_x^{15}$

(b)　特定の5人以外の死亡は関係ないから q_x^5

(c)　(a)の確率を5人の組合せすべてについて加えればよいから $\binom{20}{5} q_x^5 p_x^{15}$

(d)　(c)の確率を0から5について加えればよいから

$$p_x^{20} + \binom{20}{1} q_x p_x^{19} + \binom{20}{2} q_x^2 p_x^{18} + \cdots\cdots\cdots + \binom{20}{5} q_x^5 p_x^{15}$$

(3)　4人のうち1年以内に誰かが死ぬ確率は (12.2.4), (12.2.1) より

$$1 - p_x^4 = 1 - (1 - q_x)^4 = 4 q_x - 6 q_x^2 + 4 q_x^3 - q_x^4$$

さらに特定の者 A が最初に死ぬ確率は、4人についての機会が同等であるとして、その $\frac{1}{4}$ である。

(4)　$$\mu_x = -\frac{d \log l_x}{dx} = \frac{2x - 3}{9{,}700 + 3x - x^2} = -\frac{d}{dx} \log (9{,}700 + 3x - x^2)$$

であるので

$$l_x = k (9{,}700 + 3x - x^2)$$

$x = 20$ として k を求めると $k = 1$ であるので

$$l_{53} = 7{,}050, \quad l_{54} = 6{,}946, \quad l_{73} = 4{,}590, \quad l_{74} = 4{,}446$$

となる。これを用いて

$$_{20}q_{\overline{53, 54}} = \left(1 - \frac{l_{73}}{l_{53}}\right)\left(1 - \frac{l_{74}}{l_{54}}\right) = 0.1256$$

(5)　(a)　$[t, t + 1]$ で初めて誰かが死亡するのだから (12.2.5) より

$${}_{t|}q_{xxx} = {}_tp_{xxx} - {}_{t+1}p_{xxx} = {}_tp_x^3 - {}_{t+1}p_x^3$$

(*b*) (12．2．16)により、その確率は

$${}_tp_{\overline{xxx}}^{\;2} - {}_{t+1}p_{\overline{xxx}}^{\;2}$$

その値は (12．2．17)で $y = z = x$ としたものであるから

$$= 3\ {}_{t|}q_{xx} - 2\ {}_{t|}q_{xxx}$$

(*c*) (12．2．10)を用いて、その確率は

$${}_tp_{\overline{xxx}} - {}_{t+1}p_{\overline{xxx}}$$

であるが、(12．2．8) を用いると

$$= \{1 - (1 - {}_tp_x)^3\} - \{1 - (1 - {}_{t+1}p_x)^3\}$$

$$= \{3\ {}_tp_x - 3\ {}_tp_x^2 + {}_tp_x^3\} - \{3\ {}_{t+1}p_x - 3\ {}_{t+1}p_x^2 + {}_{t+1}p_x^3\}$$

$$= 3\ {}_{t|}q_x - 3\ {}_{t|}q_{xx} + {}_{t|}q_{xxx}$$

(6) (*a*) (12．2．11)より

$$\begin{aligned}{}_tp_{\overline{xyzw}}^{[2]} = {}&{}_tp_{xy}(1 - {}_tp_z)(1 - {}_tp_w) + {}_tp_{xz}(1 - {}_tp_y)(1 - {}_tp_w)\\ &+ {}_tp_{xw}(1 - {}_tp_y)(1 - {}_tp_z) + {}_tp_{yz}(1 - {}_tp_x)(1 - {}_tp_w)\\ &+ {}_tp_{yw}(1 - {}_tp_x)(1 - {}_tp_z) + {}_tp_{zw}(1 - {}_tp_x)(1 - {}_tp_y)\end{aligned}$$

この右辺を整理すれば、与式が得られる。

(*b*) (12．2．14)と (12．2．11)を用いると

$$\begin{aligned}{}_tp_{\overline{xyzw}}^{\;3} &= {}_tp_{\overline{xyzw}}^{[3]} + {}_tp_{\overline{xyzw}}^{[4]}\\ &= {}_tp_{xyz}(1 - {}_tp_w) + {}_tp_{xyw}(1 - {}_tp_z)\\ &\quad + {}_tp_{xzw}(1 - {}_tp_y) + {}_tp_{yzw}(1 - {}_tp_x) + {}_tp_{xyzw}\end{aligned}$$

この最終式を整理すれば与式が得られる。

(7) (*a*) $({}_mp_x - {}_{m+n}p_x)^2\ {}_{m+n}p_x$

(*b*) この期間内に全員が死亡する確率は $({}_mp_x - {}_{m+n}p_x)^3$ であるが、順序を指定すると、全部で6通りの順序があるから、求める確率は

$$\frac{1}{6}({}_mp_x - {}_{m+n}p_x)^3$$

(*c*) 誰か1人をとると、彼がこの期間内に死亡する確率は ${}_mp_x - {}_{m+n}p_x$ であり、死亡しない確率は $1 - ({}_mp_x - {}_{m+n}p_x)$ である。従ってこの期間内に誰も死亡しない確率は $\{1 - ({}_mp_x - {}_{m+n}p_x)\}^3$ であり、誰かがこの期間内に死亡

する確率はその余確率として

$$1-\{1-({}_{m}p_x-{}_{m+n}p_x)\}^3$$

(8)　(a)　$1-{}_{16}p_{24}\ {}_{18}p'_{22}=1-\dfrac{l_{40}}{l_{24}}\dfrac{l'_{40}}{l'_{22}}=0.02765$

(b)　${}_{16|}q_{24}\ {}_{18}q'_{22}+{}_{16}q_{24}\ {}_{18|}q'_{22}$

$$=\frac{d_{40}}{l_{24}}\ \frac{l'_{22}-l'_{40}}{l'_{22}}+\frac{l_{24}-l_{40}}{l_{24}}\ \frac{d'_{40}}{l'_{22}}=0.00003672$$

(c)　(12.3.17)と(12.3.4)を用いれば

${}_{16|}q_{24}\,(1-{}_{16\frac{1}{2}}p'_{22})+{}_{18|}q'_{22}\,(1-{}_{18\frac{1}{2}}p_{24})$

$$=\frac{d_{40}}{l_{24}}\left(1-\frac{l'_{38}+l'_{39}}{2\,l'_{22}}\right)+\frac{d'_{40}}{l'_{22}}\left(1-\frac{l_{42}+l_{43}}{2\,l_{24}}\right)$$

$=0.00003909$

(9)　その確率は　${}_{n-1}q^{\,1}_{x,\,x+1}=\displaystyle\int_0^{n-1}{}_tp_{x+1}\ {}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt$

であるが、この時には第2章練習問題(1)の(19)の解答中にあったように

$${}_tp_x=1-at-\frac{b}{2}t^2$$

となる。従って

$${}_tp_{x+1}=\frac{{}_{t+1}p_x}{p_x}=\frac{1-a(t+1)-\dfrac{b}{2}(t+1)^2}{1-a-\dfrac{b}{2}}$$

であり、これと ${}_tp_x\,\mu_{x+t}=a+bt$ とを被積分関数に入れて、t についての積分を行なうと

$${}_{n-1}q^{\,1}_{x,\,x+1}=\frac{n-1}{1-a-\dfrac{b}{2}}\left\{a\left(1-a-\frac{b}{2}\right)\right.$$

$$+\frac{n-1}{2}\left(-a^2-2ab+b-\frac{b^2}{2}\right)-\frac{(n-1)^2}{6}\left(-ab-2ab-2b^2\right)$$

$$\left.-\frac{(n-1)^3}{8}b^2\right\}$$

(10) (12.3.8)を用いて

$$_{\infty}q^{\ \,1}_{20,40} = \int_0^{\infty} {}_sp_{20,40}\ \mu_{20+s}\, ds = 0.2697$$

であり、また $_{10}q_{20} = 0.0735$, $_{10}q_{30} = 0.1005$ である。両者が10年以上を隔てて死亡する確率は

$$\int_0^{\infty} {}_sp_{20}\ \mu_{20+s}\ {}_{s+10}p_{30}\, ds + \int_0^{\infty} {}_sp_{30}\ \mu_{30+s}\ {}_{s+10}p_{20}\, ds$$

$$= {}_{10}p_{30}\ {}_{\infty}q^{\ \,1}_{20,40} + {}_{10}p_{20}\ {}_{\infty}q^{\ \,1}_{30,30}$$

$$= (1 - {}_{10}q_{30})\ {}_{\infty}q^{\ \,1}_{20,40} + (1 - {}_{10}q_{20})\frac{1}{2}$$

$$= 0.7058$$

求める確率はその余確率だから、0.2942

(11) (a) (12.1.24), (12.1.22), (12.3.6)を順次用いて

$$_tq_{xy} = \int_0^t {}_sp_{xy}\ \mu_{x+s,y+s}\, ds = \int_0^t {}_sp_{xy}\,(\mu_{x+s} + \mu_{y+s})\,ds$$

$$= {}_tq^{\ 1}_{xy} + {}_tq_{x\overset{1}{y}}$$

次に (12.3.19)の右辺と (12.3.20)の右辺を等しいとおくと

$$_tq^{\ 1}_{xy} + {}_tq_{x\overset{1}{y}} = {}_tq_x + {}_tp_x\ {}_tq_y$$

$$= {}_tq_x + (1 - {}_tq_x)\,{}_tq_y = {}_tq_x + {}_tq_y - {}_tq_x\ {}_tq_y$$

(b) (12.1.28), (12.1.26), (12.3.16)を順次用いると

$$_tq_{\overline{xy}} = \int_0^t {}_sp_{\overline{xy}}\ \mu_{\overline{x+s,\,y+s}}\, ds = \int_0^t (\,{}_sq_y\ {}_sp_x\ \mu_{x+s} + {}_sq_x\ {}_sp_y\ \mu_{y+s})\,ds$$

$$= {}_tq^{\ 2}_{xy} + {}_tq_{x\overset{2}{y}}$$

次に (12.3.19)と上式を用いると

$$_tq^{\ 2}_{xy} + {}_tq_{x\overset{2}{y}} = {}_tq_x + {}_tq_y - (\,{}_tq^{\ 1}_{xy} + {}_tq_{x\overset{1}{y}})$$

$$= {}_tq_x + {}_tq_y - {}_tq_{xy}$$

(12) (a) 練習問題(11)の結果を用いると

$$_{t|}q^{\ \ 3}_{xyz} = \int_t^{t+1} {}_sq_{\overline{yz}}\ {}_sp_x\ \mu_{x+s}\, ds$$

$$= \int_t^{t+1} (\,{}_sq^{\ 2}_{yz} + {}_sq_{y\overset{2}{z}})\,{}_sp_x\ \mu_{x+s}\, ds$$

これは(12.3.24)により $_{t|}q^{\ \ 3}_{\underset{2\ 1}{xyz}} + {}_{t|}q^{\ \ 3}_{\underset{1\ 2}{xyz}}$ に等しい。

(b) (12.1.26)を用いると

$$
{}_{t|}q_{\overset{2}{\overline{xy}}z} = \int_t^{t+1} {}_sp_{\overline{xy}}\ {}_sq_z\ \mu_{\overline{x+s,\,y+s}}\,ds
$$

$$
= \int_t^{t+1} {}_sq_z\,(\,{}_sq_y\ {}_sp_x\ \mu_{x+s} + {}_sq_x\ {}_sp_y\ \mu_{y+s})\,ds
$$

(12．2．6) を用いると

$$
= \int_t^{t+1} {}_sq_{\overline{zy}}\ {}_sp_x\,\mu_{x+s}\,ds + \int_t^{t+1} {}_sq_{\overline{xz}}\ {}_sp_y\,\mu_{y+s}\,ds
$$

これは(*a*)でみたように　${}_{t|}q_{\overset{3}{x}yz} + {}_{t|}q_{x\overset{3}{y}z}$　に等しい。

(*c*)　(12．3 .32) を導いた時のように、(12．1 .10) を用いて

$$
{}_{t|}q_{\overset{1}{x}y\overline{zw}} = \int_t^{t+1} {}_sp_y\ {}_sp_{\overline{zw}}\ {}_sp_x\,\mu_{x+s}\,ds
$$

$$
= \int_t^{t+1} {}_sp_y\,(\,{}_sp_z + {}_sp_w - {}_sp_{zw})\,{}_sp_x\,\mu_{x+s}\,ds
$$

$$
= {}_{t|}q_{\overset{1}{x}yz} + {}_{t|}q_{\overset{1}{x}yw} - {}_{t|}q_{\overset{1}{x}yzw}
$$

(*d*)　(*x*)の死亡時に注目して、式をつくると

$$
{}_{t|}q_{\overset{2}{x}y\underset{1}{\overline{zw}}} = \int_t^{t+1} {}_sp_y\ {}_sq_{\overline{zw}}\ {}_sp_x\,\mu_{x+s}\,ds = \int_t^{t+1} {}_sp_y\,(\,1 - {}_sp_{\overline{zw}}\,)\,{}_sp_x\,\mu_{x+s}\,ds
$$

$$
= {}_{t|}q_{\overset{1}{x}y} - {}_{t|}q_{\overset{1}{x}y\overline{zw}}
$$

(*e*)　(12．2 .12) を用いると

$$
{}_{t|}q_{\overset{3}{x}yzw} = \int_t^{t+1} {}_sp^{[1]}_{\overline{yzw}}\ {}_sp_x\ \mu_{x+s}\,ds
$$

$$
= \int_t^{t+1} [\,{}_sp_y\ {}_sq_{\overline{zw}} + {}_sp_z\ {}_sq_{\overline{yw}} + {}_sp_w\,{}_sq_{\overline{yz}}\,]\,{}_sp_x\,\mu_{x+s}\,ds
$$

$$
= {}_{t|}q_{\overset{2}{x}y\underset{1}{\overline{zw}}} + {}_{t|}q_{\overset{2}{x}z\underset{1}{\overline{yw}}} + {}_{t|}q_{\overset{2}{x}w\underset{1}{\overline{yz}}}
$$

(*f*)　(*z*)の死亡時に注目して式をつくり、(12．3 .22) を用いると

$$
{}_tq_{\overset{3:4}{x}y\underset{2}{z}\underset{1}{w}} = \int_0^t {}_sq_w\ {}_sp_{xyz}\ \mu_{z+s}\ {}_{t-s}q_{x+s}\,ds
$$

$$
= \int_0^t {}_sq_w\ {}_sp_{xyz}\ \mu_{z+s}\,(\,1 - {}_{t-s}p_{x+s}\,)\,ds
$$

$$
= \int_0^t {}_sq_w\ {}_sp_{xyz}\ \mu_{z+s}\,ds - \int_0^t {}_sq_w\ {}_sp_{yz}\,\mu_{z+s}\ {}_tp_x\,ds
$$

$$
= {}_tq_{xy\overset{2}{z}\underset{1}{w}} - {}_tp_x\ {}_tq_{y\overset{2}{z}\underset{1}{w}}
$$

(13) y の死亡に注目して

$$\int_5^{15}(1-{}_{s-5}p_x)\,{}_sp_y\,\mu_{y+s}\,({}_{s+5}p_{\overline{zw}}-{}_{20}p_{\overline{zw}})\,ds$$

が求める確率である。${}_{s+5}p_{\overline{zw}}$, ${}_{20}p_{\overline{zw}}$ に(12.1.10)を用いてもよい。

(14) (a) (x)の死亡時に注目して式をつくり、(12.3.16)を用いると

$${}_tq^{3}_{xy\underset{2}{z}\underset{1}{w}}=\int_0^t {}_sq^{2}_{zw}\,{}_sp_{xy}\,\mu_{x+s}\,ds$$

$$=\int_0^t \left[\int_0^s {}_uq_w\,{}_up_z\,\mu_{z+u}\,du\right]{}_sp_{xy}\,\mu_{x+s}\,ds$$

(b) (y)の死亡時に注目して式をつくると

$${}_tq^{4}_{x\underset{3}{y}\underset{2}{z}\underset{1}{w}}=\int_0^t {}_sq^{2}_{zw}\,{}_sp_{xy}\,\mu_{y+s}\,{}_{t-s}q_{x+s}\,ds$$

$$=\int_0^t {}_sq^{2}_{zw}\,{}_sp_{xy}\,\mu_{y+s}\,(1-{}_{t-s}p_{x+s})\,ds$$

$$={}_tq_{x\overset{3}{y}\underset{2}{z}\underset{1}{w}}-{}_tp_x\,{}_tq_{\overset{3}{y}\underset{2}{z}\underset{1}{w}}$$

次に

$${}_tq^{2:3}_{xyz\underset{1}{w}}={}_tq^{2}_{xyz\underset{1}{w}}+{}_tq^{3}_{x\underset{2}{y}z\underset{1}{w}}+{}_tq^{3}_{xy\underset{2}{z}\underset{1}{w}}$$

第12章　練習問題（2）

(1) (a) (4.3.8), (12.4.2)に基づいて計算すると

$a_{30:\overline{10}|}=7.49999$　　$a_{35:\overline{10}|}=7.48390$　　$a_{40:\overline{10}|}=7.45396$

$a_{30,35:\overline{10}|}=7.44664$　　$a_{30,40:\overline{10}|}=7.41691$

$a_{35,40:\overline{10}|}=7.40109$　　$a_{35,35:\overline{10}|}=7.43072$

$a_{30,35,40:\overline{10}|}=7.36443$　　$a_{35,35,35:\overline{10}|}=7.37810$

$a_{35,35,35,35:\overline{10}|}=7.32601$

(b) (12.5.3), (12.5.22)に基づいて計算すると

$a_{\overline{30,35}:\overline{10}|}=7.53724$　　$a_{\overline{30,40}:\overline{10}|}=7.53703$

$a_{\overline{35,40}:\overline{10}|}=7.53676$　　$a_{\overline{35,35}:\overline{10}|}=7.53701$

$a_{\overline{30,35,40}:\overline{10}|} = 7.53762$ 　　 $a_{\overline{35,35,35}:\overline{10}|} = 7.53762$

(c)　(12．5 .25) に基づいて計算すると

$a^{[2]}_{\overline{30,35,40}:\overline{10}|} = 0.17137$ 　　 $a^{[2]}_{\overline{35,35,35}:\overline{10}|} = 0.15788$

(d)　(12．5 .28) に基づいて計算すると

$a^{2}_{\overline{30,35,40}:\overline{10}|} = 7.53580$ 　　 $a^{2}_{\overline{35,35,35}:\overline{10}|} = 7.53598$

(e)　(12．5 .34) に基づいて計算すると

$a_{30,\overline{35,40}:\overline{10}|} = 7.49913$ 　　 $a_{\overline{30,35},40:\overline{10}|} = 7.45358$

$a_{35,\overline{35,35}:\overline{10}|} = 7.48335$

(2)　第6章§1定理の(2)を利用する。今

$$g_j = v^{j-1}\ {}_{j-1}p_x \qquad (\ j = 1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots n\ )$$

$$h_j = v^{j-1} \qquad (\ j = 1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots n\ )$$

$$f_j = {}_{j-1}p_y \qquad (\text{単調減少})$$

とすると、(６．１．９)を用いて $t < n$ に対し

$$\frac{\sum_{j=1}^{t} g_j}{\sum_{j=1}^{n} g_j} = \frac{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} > \frac{\ddot{a}_{\overline{t}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} = \frac{\sum_{j=1}^{t} h_j}{\sum_{j=1}^{n} h_j}$$

すなわち、条件(６．１．４)が満足される。従って(６．１．５)が成立し

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} v^{j-1}\ {}_{j-1}p_x\ {}_{j-1}p_y}{\sum_{j=1}^{n} v^{j-1}\ {}_{j-1}p_x} > \frac{\sum_{j=1}^{n} v^{j-1}\ {}_{j-1}p_y}{\sum_{j=1}^{n} v^{j-1}}$$

これは証明すべき不等式である。

(3)　(12．1 .37) で述べたように、この時は

$${}_tp_x\ {}_tp_y = {}_tp_{xy} = {}_tp_{ww} = {}_tp_w\ {}_tp_w$$

である。従って

$$\ddot{a}_{\overline{xy}} = \sum_{t=0}^{\infty} v^t\ {}_tp_{\overline{xy}} = \sum_{t=0}^{\infty} v^t\,(\ {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{xy})$$

$$\ddot{a}_{\overline{ww}} = \sum_{t=0}^{\infty} v^t\,(\ {}_tp_w + {}_tp_w - {}_tp_{ww})$$

$$\ddot{a}_{\overline{xy}} - \ddot{a}_{\overline{ww}} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t\,(\ {}_tp_x + {}_tp_y - 2\ {}_tp_w)$$

において右辺の(　)内は

$$ {}_tp_x + {}_tp_y - 2\,{}_tp_w = {}_tp_x + {}_tp_y - 2\sqrt{{}_tp_x\,{}_tp_y} $$
$$ = (\sqrt{{}_tp_x} - \sqrt{{}_tp_y})^2 \geq 0 $$

となる。

(4)　$d_x = k$ とすれば、生命表の最終年齢を ω として $l_0 = k\omega$ となる。((2.7.1)参照) また $l_x = l_0 - xk$ であるから

$$ 1 - {}_tp_x = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} = \frac{tk}{l_0 - xk} $$

従って(12.2.8)より

$$ {}_tp_{\overline{xyz\cdots\cdots\cdots(m)}} = 1 - (1 - {}_tp_x)(1 - {}_tp_y)\cdots\cdots\cdots $$
$$ = 1 - \frac{(tk)^m}{(l_0 - xk)(l_0 - yk)\cdots\cdots\cdots} $$
$$ a_{\overline{xyz\cdots\cdots\cdots(m)}:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t\ {}_tp_{\overline{xyz\cdots\cdots\cdots(m)}} $$
$$ = \sum_{t=1}^{n} v^t - \frac{k^m}{(l_0 - xk)(l_0 - yk)\cdots\cdots\cdots} \sum_{t=1}^{n} v^t\ t^m $$

同様に

$$ a_{\overline{u,u,u,\cdots\cdots\cdots(m)}:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t - \frac{k^m}{(l_0 - uk)^m} \sum_{t=1}^{n} v^t\ t^m $$

であるから、

$$ (l_0 - xk)(l_0 - yk)\cdots\cdots\cdots = (l_0 - uk)^m $$

であれば、与えられた式が成立する。$l_0 = \omega k$ であるから、この式は

$$ (\omega - x)(\omega - y)\cdots\cdots\cdots = (\omega - u)^m $$

となる。すなわち $\omega - u$ が $\omega - x,\ \omega - y, \cdots\cdots\cdots$ の幾何平均となるよう u を定めればよい。

(5)　(7.4.2)を導いた場合と同様にこの場合の収支相等の式は

$$ P\,\ddot{a}_{2,35:\overline{20}|} = P^*(IA)^1_{2:\overline{20}|} + A_{2:\overline{20}|}^{\ 1} $$

となり、これを解けば

$$ P = \frac{A_{2:\overline{20}|}^{\ 1} + 0.002\,(IA)^1_{2:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{2,35:\overline{20}|} - 1.1\,(IA)^1_{2:\overline{20}|}} $$

となる。5年後の責任準備金は、父が生存中であれば将来法により

$$ {}_5V = P^*\{6\frac{C_7}{D_7}+7\frac{C_8}{D_7}+\cdots\cdots\cdots+20\frac{C_{21}}{D_7}\}+A_{7:\overset{1}{\overline{15|}}}-P\,\ddot{a}_{7,40:\overline{15|}} $$

第5章練習問題(1)の(15)の解答におけるように

$$ \{\cdots\cdots\}=\frac{R_7-R_{22}+5M_7-20M_{22}}{D_7} $$

であるので

$$ {}_5V = A_{7:\overset{1}{\overline{15|}}}+P^*\frac{R_7-R_{22}+5M_7-20M_{22}}{D_7}-P\,\ddot{a}_{7,40:\overline{15|}} $$

となる。父が死亡した契約では

$$ {}_5V = A_{7:\overset{1}{\overline{15|}}}+P^*\frac{R_7-R_{22}+5M_7-20M_{22}}{D_7} $$

(6)　年払保険料をPとして、先ず給付の現価をもとめてみよう。既払保険料$1P$を返還する場合は、息子が第1年度で死亡するか、父が第1年度に死亡して、その後息子が22歳になるまでに死亡する場合であるから、その現価は

$$ P\{v\,q_2+q_{35}(v^2\,{}_{1|}q_2+v^3\,{}_{2|}q_2+\cdots\cdots\cdots+v^{20}\,{}_{19|}q_2)\} $$

$q_{35}=1-p_{35}$として整理すると

$$ =P(\frac{M_2-M_{22}}{D_2}-p_{35}\frac{M_3-M_{22}}{D_2}) $$

$2P$を返還する場合の現価は

$$ 2P\{v^2\,p_{35}\,{}_{1|}q_2+{}_{1|}q_{35}(v^3\,{}_{2|}q_2+v^4\,{}_{3|}q_2+\cdots\cdots\cdots+v^{20}\,{}_{19|}q_2)\} $$

${}_{1|}q_{35}=p_{35}-{}_2p_{35}$として整理すると

$$ =2P(p_{35}\frac{M_3-M_{22}}{D_2}-{}_2p_{35}\frac{M_4-M_{22}}{D_2}) $$

以下同様の式が得られるから、これらを加えて給付のこの部分を整理すると

$$ P(\frac{M_2-M_{22}}{D_2}+p_{35}\frac{M_3-M_{22}}{D_2}+{}_2p_{35}\frac{M_4-M_{22}}{D_2}+\cdots\cdots\cdots $$
$$ +{}_{19}p_{35}\frac{M_{21}-M_{22}}{D_2}) $$

これにさらに ${}_{20|}A_2 = \dfrac{M_{22}}{D_2}$ を加えたものが給付の現価である。

一方収入の現価は

$$
\begin{aligned}
&P\{\ddot{a}_{2,35:\overline{20}|} + {}_{20}p_{2,35}\, v^{20}\ddot{a}_{22} + {}_{20}p_2\,(1 - {}_{20}p_{35})\, v^{20}\ {}_{3|}\ddot{a}_{22}\} \\
&= P\{\ddot{a}_{2,35:\overline{20}|} + {}_{20}p_{35}\ {}_{20}p_2\ v^{20}\,(\ddot{a}_{22:\overline{3}|} + {}_{3|}\ddot{a}_{22}) \\
&\qquad + {}_{20}p_2\ v^{20}\ {}_{3|}\ddot{a}_{22} - {}_{20}p_2\ {}_{20}p_{35}\ v^{20}\ {}_{3|}\ddot{a}_{22}\} \\
&= P\{\ddot{a}_{2,35:\overline{20}|} + {}_{20}p_{35}\,\frac{D_{22}}{D_2}\,\ddot{a}_{22:\overline{3}|} + \frac{D_{25}}{D_2}\,\ddot{a}_{25}\}
\end{aligned}
$$

従って

$$
\begin{aligned}
P &= M_{22} \div \{D_2\,\ddot{a}_{2,35:\overline{20}|} + {}_{20}p_{35}\,D_{22}\,\ddot{a}_{22:\overline{3}|} + D_{25}\,\ddot{a}_{25} \\
&\quad - (M_2 - M_{22}) - p_{35}\,(M_3 - M_{22}) - \cdots\cdots\cdots - {}_{19}p_{35}\,(M_{21} - M_{22})\}
\end{aligned}
$$

10年経過後の責任準備金は、父が生存している場合は、将来法により

$$
\begin{aligned}
{}_{10}V &= {}_{10|}A_{12} + P\{11\,\frac{M_{12} - M_{22}}{D_{12}} + p_{45}\,\frac{M_{13} - M_{22}}{D_{12}} + \cdots\cdots\cdots \\
&\quad + {}_{9}p_{45}\,\frac{M_{21} - M_{22}}{D_2}\} - P\{\ddot{a}_{12,45:\overline{10}|} + {}_{10}p_{45}\,\frac{D_{22}}{D_{12}}\,\ddot{a}_{22:\overline{3}|} + \frac{D_{25}}{D_{12}}\,\ddot{a}_{25}\}
\end{aligned}
$$

父が死亡している時は、さらに父が死亡するまでに払込まれた保険料の回数によって、責任準備金を区別し、t 回払込の契約については

$$
{}_{10}V = {}_{10|}A_{12} + tP\,\frac{M_{12} - M_{22}}{D_{12}} - P\,\frac{D_{25}}{D_{12}}\,\ddot{a}_{25}
$$

(7)　(a)　(12. 2 .19)と同様に考えると

$$
\begin{aligned}
a_{xy,\overline{zw}:\overline{n}|} &= \sum_{t=1}^{n} v^t\ {}_tp_{xy,\overline{zw}} \\
&= \sum_{t=1}^{n} v^t\ {}_tp_{xy}\,({}_tp_z + {}_tp_w - {}_tp_{zw}) \\
&= a_{xyz:\overline{n}|} + a_{xyw:\overline{n}|} - a_{xyzw:\overline{n}|}
\end{aligned}
$$

(b)　(12. 5 .22)を用いると

$$
\begin{aligned}
a_{x,\overline{yzw}:\overline{n}|} &= \sum_{t=1}^{n} v^t\ {}_tp_{x,\overline{yzw}} \\
&= \sum_{t=1}^{n} v^t\ {}_tp_x\,({}_tp_y + {}_tp_z + {}_tp_w - {}_tp_{yz} - {}_tp_{yw} - {}_tp_{zw} + {}_tp_{yzw})
\end{aligned}
$$

$$= a_{xy:\overline{n}|} + a_{xz:\overline{n}|} + a_{xw:\overline{n}|}$$

$$- a_{xyz:\overline{n}|} - a_{xyw:\overline{n}|} - a_{xzw:\overline{n}|} + a_{xyzw:\overline{n}|}$$

(c)　(12.1.10)を用いると

$$a_{\overline{xy},\,\overline{zw}:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t\ {}_tp_{\overline{xy}}\ {}_tp_{\overline{zw}}$$

$$= \sum_{t=1}^{n} v^t\,(\,{}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{xy})\,({}_tp_z + {}_tp_w - {}_tp_{zw})$$

$$= a_{xz:\overline{n}|} + a_{xw:\overline{n}|} + a_{yz:\overline{n}|} + a_{yw:\overline{n}|}$$

$$- a_{xzw:\overline{n}|} - a_{yzw:\overline{n}|} - a_{xyz:\overline{n}|} - a_{xyw:\overline{n}|} + a_{xyzw:\overline{n}|}$$

(8)　年金支払時点の各々について、年金が支払われる条件を考えると、最初の g 年間は (y) の生死に関係なく (x) が生存していれば年金が支払われるので、この部分の年金現価は

$$a_{x:\overline{g}|} = a_x - v^g\,{}_gp_x\,a_{x+g}$$

である。それ以降 $g+t\ (t \geq 1)$ の時点の年金が支払われるためには、その時点で (x) が生存し、かつ (y) はその g 年前の時点 t で生存していなければならない。従ってその部分の年金現価は

$$\sum_{t=1}^{\infty} v^{g+t}\ {}_{g+t}p_x\ {}_tp_y = v^g\ {}_gp_x\ a_{x+g,\,y}$$

となる。両者を加えれば

$$a_x - v^g\,{}_gp_x\,(\,a_{x+g} - a_{x+g,\,y})$$

(9)　前問における二つの部分の年金が

$$a_{x:\overline{g}|} = a_{x:\overline{n}|} - v^g\,{}_gp_x\ a_{x+g,\,\overline{n-g}|}$$

$$\sum_{t=1}^{n-g} v^{g+t}\ {}_{g+t}p_x\ {}_tp_y = v^g\,{}_gp_x\ a_{x+g,\,y:\overline{n-g}|}$$

となるので、和は

$$a_{x:\overline{n}|} - v^g\,{}_gp_x\,(\,a_{x+g:\overline{n-g}|} - a_{x+g,\,y:\overline{n-g}|})$$

(10)　問題(8)において (y) のかわりに、(y),(z)の最終生存者としたものであるから、同じ　$a_{x:\overline{g}|} = a_x - v^g\,{}_gp_x\,a_{x+g}$　と　$v^g\,{}_gp_x\,a_{x+g,\overline{yz}}$　の和となるが、後者に(12.5.34)を用いると、和は

$$a_x - v^g\,{}_gp_x\,(\,a_{x+g} - a_{x+g,\,y} - a_{x+g,\,z} + a_{x+g,\,yz})$$

(11)　妻の生命表を用いる確率と年金現価にはダッシュをつけ、また夫と妻の共存確率や年金現価にもダッシュをつけることにする。まず夫に対する基本年金の現価は(4.3.27)を用いて

$$v^{30}\ {}_{30}p_{30}\ (\ddot{a}_{\overline{10}|} + {}_{10|}\ddot{a}_{60}) = \frac{D_{60}}{D_{30}}\ (\ddot{a}_{\overline{10}|} + \frac{D_{70}}{D_{60}}\ \ddot{a}_{70})$$

である。次に付加の年金が支払われる条件を考えると、先ず30年間(25)′と(30)が共存していることであるが、さらにその後の $10+t\ (t \geq 0)$ の時点における年金が支払われる条件は、その時点で妻が生存していることと、夫が〔$t, 10+t$〕の間で死亡したこととである。従ってその現価は

$$v^{30}\ {}_{30}p'_{25,30} \sum_{t=0}^{\infty} v^{10+t}\ {}_{10+t}p'_{55}\ ({}_{t}p_{60} - {}_{10+t}p_{60})$$

$$= \frac{D'_{55}}{D'_{25}}\ {}_{30}p_{30}\ \frac{D'_{65}}{D'_{55}}\ [\sum_{t=0}^{\infty} v^{t}\ {}_{t}p'_{65}\ {}_{t}p_{60} - {}_{10}p_{60} \sum_{t=0}^{\infty} v^{t}\ {}_{t}p'_{65}\ {}_{t}p_{70}]$$

$$= \frac{D'_{65}}{D'_{25}}\ {}_{30}p_{30}\ [\ddot{a}'_{65,60} - {}_{10}p_{60}\ \ddot{a}'_{65,70}]$$

となる。両者を加えれば、もとめる年金現価となる。

(12)　年金支払時点の各々について、年金が払われる条件を考えると、$z-y$ 年後($\leq z-x$)までは最終生存者が生存していることであり、それ以後 $8-x$ 年後までは(x)が生存していることであるから、年金の現価は

$$\sum_{t=1}^{z-y} v^{t}\ {}_{t}p_{\overline{xy}} + \sum_{t=z-y+1}^{z-x} v^{t}\ {}_{t}p_{x}$$

(12.1.10)を用いると

$$= a_{x:\overline{z-x}|} + a_{y:\overline{z-y}|} - a_{xy:\overline{z-y}|}$$

(13)　この年金は $z-y$ 年後まで支払はない。それ以後 $z-x$ 年より後は(y)が生存している場合に年金が支払われ、$z-x$ 年より後は(x),(y)の最終生存者が生存している場合に年金が支払われるので、現価は

$$\sum_{t=z-y+1}^{z-x} v^{t}\ {}_{t}p_{y} + \sum_{t=z-x+1}^{\infty} v^{t}\ {}_{t}p_{\overline{xy}}$$

となる。(12.1.10)を用いると

$$= {}_{z-x|}a_{x} + {}_{z-y|}a_{y} - {}_{z-x|}a_{xy}$$

(14)　問題(12)と同様にして、年金現価は

$$a^{(2)}_{35:\overline{15}|} + a^{(2)}_{40:\overline{10}|} - a^{(2)}_{35,40:\overline{10}|}$$

となる。近似計算するため(4.4.4)，(12.4.5)でそれぞれ第2項までとると

$$= a_{35:\overline{15}|} + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{D_{50}}{D_{35}}\right) + a_{40:\overline{10}|} + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{D_{50}}{D_{40}}\right)$$

$$- a_{35,40:\overline{10}|} - \frac{1}{4}\left(1 - v^{10}\ {}_{10}p_{35,40}\right)$$

このうち $a_{40:\overline{10}|}$ と $a_{35,40:\overline{10}|}$ は問題(1)でその数値が与えられている。その他の項を計算して加減すると答は 10.11367。

(15)　現在からの経過年数を t とし、t を次の4段階に別けて、年金が給付される条件を考える。

(i)　$0 \leq t < 10$

3人とも60歳に達しないから年金の支払はない。

(ii)　$10 \leq t < 15$

(40)は55歳未満であるから、彼が死亡していれば、(50)の生存に対し年金が支払われる。(45)は55歳以上60歳未満なので、その生死はこの部分の年金の支払には関係しない。従って、この区間で支払われる年金の現価は

$$\sum_{t=0}^{4} v^{10+t}\left(1 - {}_{10+t}p_{40}\right){}_{10+t}p_{50} = {}_{10|}\ddot{a}_{50:\overline{5}|} - {}_{10|}\ddot{a}_{40,50:\overline{5}|}$$

(iii)　$15 \leq t < 20$

(45)と(50)は60歳以上になっているが、(40)は55歳以上60歳未満である。従って(40)の生死は年金支払に関係しない。この区間で支払われる年金の現価は

$${}_{15|}\ddot{a}_{\overline{45,50}:\overline{5}|} = \sum_{t=15}^{19} v^{t}\ {}_{t}p_{\overline{45,50}}$$

(12.1.10)を ${}_{t}p_{\overline{45,50}}$ に用いると

$$= {}_{15|}\ddot{a}_{45:\overline{5}|} + {}_{15|}\ddot{a}_{50:\overline{5}|} - {}_{15|}\ddot{a}_{45,50:\overline{5}|}$$

(iv)　$20 \leq t$

3人とも60歳以上であるので、この区間で支払われる年金の現価は

$$ {}_{20|}\ddot{a}_{\overline{40,45,50}} = \sum_{t=20}^{\infty} v^t \, {}_t p_{\overline{40,45,50}} $$

(12.5.22)を ${}_t p_{\overline{40,45,50}}$ に用いると

$$ = {}_{20|}\ddot{a}_{40} + {}_{20|}\ddot{a}_{45} + {}_{20|}\ddot{a}_{50} - {}_{20|}\ddot{a}_{40,45} - {}_{20|}\ddot{a}_{40,50} - {}_{20|}\ddot{a}_{45,50} + {}_{20|}\ddot{a}_{40,45,50} $$

(ii), (iii), (iv)の年金現価を加えればよいが、その際

$$ {}_{10|}\ddot{a}_{50:\overline{5|}} + {}_{15|}\ddot{a}_{50:\overline{5|}} + {}_{20|}\ddot{a}_{50} = {}_{10|}\ddot{a}_{50} $$

等となるので、和は

$$ {}_{20|}\ddot{a}_{40} + {}_{15|}\ddot{a}_{45} + {}_{10|}\ddot{a}_{50} - {}_{20|}\ddot{a}_{40,45} $$
$$ -\left({}_{10|}\ddot{a}_{40,50:\overline{5|}} + {}_{20|}\ddot{a}_{40,50} \right) - {}_{15|}\ddot{a}_{45,50} + {}_{20}\ddot{a}_{40,45,50} $$

(16)　$m < n$ としておくと、その一時払保険料は

$$ A_{\overset{1}{xy}:\overline{m|}} + v^m \, {}_m p_{xy} \, A_{\overset{1}{y+m}:\overline{n-m|}} $$

となる。年払保険料は、保険金支払の起った年度まで払込まれるとすると

$$ \ddot{a}_{xy:\overline{m|}} + v^m \, {}_m p_{xy} \, \ddot{a}_{y+m:\overline{n-m|}} $$

で一時払保険料を割ったものとなる。$m > n$ の場合は同様の式が得られる。$m = m$ の場合は(12.4.8) およびその年払の場合である。

(17)　$m < n$ としておくと、その一時払保険料は

$$ A_{\overset{1}{\overline{xy}}:\overline{m|}} + v^m (1 - {}_m p_x) \, {}_m p_y \, A_{\overset{1}{y+m}:\overline{n-m|}} $$

となる。年払保険料はこれを

$$ \ddot{a}_{\overline{xy}:\overline{m|}} + v^m (1 - {}_m p_x) \, {}_m p_y \, \ddot{a}_{y+m:\overline{n-m|}} $$

で割る。$m > n$ の場合も同様の式が得られ、$m = n$ の場合は、(12.5.6)およびその年払の場合である。

(18)　(12.5.31), (12.5.28)により

$$ A_2 = 1 - d\, \ddot{a}_{\overset{2}{30,35,40}:\overline{11|}} $$
$$ = 1 - d\left(\ddot{a}_{30,35:\overline{11|}} + \ddot{a}_{30,40:\overline{11|}} + \ddot{a}_{35,40:\overline{11|}} - 2\,\ddot{a}_{30,35,40:\overline{11|}} \right) $$

$\ddot{a}_{30,35:\overline{11|}} = 1 + a_{30,35:\overline{10|}}$ 等であるから問題(1)の計算結果から、これらを計算すると結局　$A_2 = 0.55501$

(19)　(12.5.31)により支出の現価は $A_2 = 1 - d\,\ddot{a}_{\overset{3}{xyzw}}$ であり、一方収入の現価は $P\,\ddot{a}_{\overset{3}{xyzw}}$ であるから

$$P = \frac{A_2}{\ddot{a}_{\overline{xyzw}}^{\,3}} = \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{xyzw}}^{\,3}} - d$$

このなかの $\ddot{a}_{\overline{xyzw}}^{\,3}$ を連生共存年金の項で表わすには、(12. 5 .27) により

$$\ddot{a}_{\overline{xyzw}}^{\,3} = \ddot{a}_{\overline{xyzw}}^{\,[3]} + \ddot{a}_{xyzw}$$

であるが、右辺第１項は (12. 5 .25) と同じように計算して

$$\ddot{a}_{\overline{xyzw}}^{\,[3]} = \ddot{a}_{xyz} + \ddot{a}_{xyw} + \ddot{a}_{xzw} + \ddot{a}_{yzw} - 4\,\ddot{a}_{xyzw}$$

となるので

$$\ddot{a}_{\overline{xyzw}}^{\,3} = \ddot{a}_{xyz} + \ddot{a}_{xyw} + \ddot{a}_{xzw} + \ddot{a}_{yzw} - 3\,\ddot{a}_{xyzw}$$

となる。これを P の式に入れればよい。

(20)　各年度末に年金が支払われる条件を考えると、最初の10年間については、少くとも３人が生存していることであるから、この部分の年金現価は $a_{\overline{40,40,40,40:\overline{10|}}}^{\,3}$ である。問題(9)の答でみたのと同様にして、これは

$$4\,a_{40,40,40:\overline{10|}} - 3\,a_{40,40,40,40:\overline{10|}}$$

に等しい。

次に $10+t$（$t \geq 1$）で年金が支払われる条件は、この時点で４人とも生存しているか、t から $10+t$ の間に１人が死亡し、残り３人が生存していることである。この１人の選定の仕方は４通りあるからこの部分の年金現価は

$$\sum_{t=1}^{\infty} v^{10+t}\ {}_{10+t}p_{40,40,40,40} + \sum_{t=1}^{\infty} 4\,v^{10+t}\ {}_{10+t}p_{40,40,40}\,(\,{}_{t}p_{40} - {}_{10+t}p_{40})$$

$$= 4\,v^{10}\ {}_{10}p_{40,40,40} \sum_{t=1}^{\infty} v^{t}\ {}_{t}p_{50,50,50,40} - 3 \sum_{t=1}^{\infty} v^{10+t}\ {}_{10+t}p_{40,40,40,40}$$

$$= 4\,v^{10}\ {}_{10}p_{40,40,40}\ a_{50,50,50,40} - 3\,(\,a_{40,40,40,40} - a_{40,40,40,40:\overline{10|}})$$

である。両者を加えると

$$4\,a_{40,40,40:\overline{10|}} + 4\,v^{10}\ {}_{10}p_{40,40,40}\ a_{50,50,50,40} - 3\,a_{40,40,40,40}$$

第12章　練習問題(3)

(1)　(a)　(12.6.3)を用いて

$a_{35|30:\overline{10}|} = 0.05335$　　$a_{40|30:\overline{10}|} = 0.08307$　　$a_{35|35:\overline{10}|} = 0.05317$

(b)　(12.6.10)を用いて

$a_{40|30,35:\overline{10}|} = 0.08221$　　$a_{35|35,35:\overline{10}|} = 0.05263$

(c)　(12.6.13)を用いて

$a_{35,40|30:\overline{10}|} = 0.13556$　　$a_{35,35|35:\overline{10}|} = 0.10580$

(d)　(12.6.15), (12.5.3), (12.5.34)を用いて

$a_{40|\overline{30,35}:\overline{10}|} = 0.08366$　　$a_{35|\overline{35,35}:\overline{10}|} = 0.05372$

(e)　(12.6.20), (12.5.34)を用いて

$a_{\overline{35,40}|30:\overline{10}|} = 0.00086$　　$a_{\overline{35,35}|35:\overline{10}|} = 0.00055$

(f)　(12.6.21)を用いて

$a_{35,35,35|35:\overline{10}|} = 0.15788$　$a_{35,35|35,35:\overline{10}|} = 0.10471$

$a_{35|35,35,35:\overline{10}|} = 0.05208$

(2)　①　$a_{xy|zw:\overline{n}|} = a_{zw:\overline{n}|} - a_{xyzw:\overline{n}|}$

はすでに前問で数値が計算されており、0.10471

②　練習問題(2)の(7)の結果を用いると

$$a_{\overline{xy}|zw:\overline{n}|} = a_{zw:\overline{n}|} - a_{\overline{xy},z,w:\overline{n}|}$$
$$= a_{zw:\overline{n}|} - a_{xzw:\overline{n}|} - a_{yzw:\overline{n}|} + a_{xyzw:\overline{n}|}$$

練習問題(1)の(1)の結果を用いると、0.00054

③　$a_{xy|\overline{zw}:\overline{n}|} = a_{\overline{zw}:\overline{n}|} - a_{xy\overline{zw}:\overline{n}|}$

$$= a_{\overline{zw}:\overline{n}|} - a_{xyz:\overline{n}|} - a_{xyw:\overline{n}|} + a_{xyzw:\overline{n}|}$$

(12.5.3)および練習問題(1)の(1)の結果を用いると、0.10689

④　練習問題(2)の(7)の結果を用いると

$$a_{\overline{xy}|\overline{zw}:\overline{n}|} = a_{\overline{zw}:\overline{n}|} - a_{\overline{xy},\overline{zw}:\overline{n}|}$$
$$= a_{\overline{35,35}:\overline{10}|} - 4\,a_{35,35:\overline{10}|} + 4\,a_{35,35,35:\overline{10}|} - a_{35,35,35,35:\overline{10}|}$$
$$= 0.00055$$

(3)　(a)　②の給付の現価は ${}_{m|}\ddot{a}_x$ であり、③の給付の現価は $\dfrac{1}{2}a_{x|y}$ であるから、①の払込条件を考えて、年払純保険料は

$$P=\frac{{}_{m|}\ddot{a}_x+\dfrac{1}{2}a_{x|y}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}$$

(b)　年金開始後の維持費は年金支払時に同時に使われると考えられるので、営業保険料は

$$P^*=\frac{1.01\left({}_{m|}\ddot{a}_x+\dfrac{1}{2}a_{x|y}\right)+0.3+0.03\,\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}{0.97\,\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}$$

(c)　上記の式の分子で ${}_{m|}\ddot{a}_x+\dfrac{1}{2}a_{x|y}$ の代りに

$${}_{m|}\ddot{a}_x^{(4)}+\frac{1}{2}v^m\,{}_mp_{xy}\,a_{x+m|y+m}^{(4)}$$

を用いればよい。

(4)　(x)について考えると、その期待値は

$$\frac{1}{3}a_{xyz}+\frac{1}{2}\left(a_{y|xz}+a_{z|xy}\right)+a_{\overline{yz}|x}$$

第2項に(12.6.10)を用い、第3項に(12.6.20)と(12.5.34)とを用いると

$$=\frac{1}{3}a_{xyz}+\frac{1}{2}\left(a_{xz}-a_{xyz}+a_{xy}-a_{xyz}\right)+a_x-\left(a_{xy}+a_{xz}-a_{xyz}\right)$$

$$=a_x-\frac{1}{2}\left(a_{xy}+a_{xz}\right)+\frac{1}{3}a_{xyz}$$

(y), (z)についても同様の式ができる。その3者を加えると、和は

$$a_x+a_y+a_z-\frac{1}{2}\left(a_{xy}+a_{xz}+a_{xy}+a_{yz}+a_{xz}+a_{yz}\right)+\frac{3}{3}a_{xyz}$$

$$=a_x+a_y+a_z-a_{xy}-a_{yz}-a_{xz}+a_{xyz}$$

これは(12.5.22)より $a_{\overline{xyz}}$ に等しい。

(5)　現価は次のとおり

$$1{,}000{,}000\,a_{xyz}+800{,}000\left(a_{x|yz}+a_{y|xz}+a_{z|xy}\right)$$
$$+600{,}000\left(a_{\overline{xy}|z}+a_{\overline{xz}|y}+a_{\overline{yz}|x}\right)$$

(6)　(12．4．27)の場合に③が加わったものがこの場合の給付であるから、その一時払保険料は

$$A = A_{2:\overset{1}{\overline{20}|}} + \frac{1}{20}(I\bar{A})^{1}_{2:\overline{20}|} + 0.1\, a_{35|2:\overline{19}|}$$

年払保険料は、②，③の条件から親子の共存期間中の払込となるので

$$P = \frac{A_{2:\overset{1}{\overline{20}|}} + \frac{1}{20}(I\bar{A})^{1}_{2:\overline{20}|} + 0.1\, a_{35|2:\overline{19}|}}{\ddot{a}_{35,\,2:\overline{20}|}}$$

責任準備金については、親の生存中と死亡後とに分けて考えるが、親の生存中では

$$_{t}V = A_{2+t:\overset{1}{\overline{20-t}|}} + \frac{1}{20}\,\frac{(t+1)\bar{C}_{2+t} + \cdots\cdots + 20\bar{C}_{21}}{D_{2+t}}$$

$$+ 0.1\, a_{35+t|2+t:\overline{19-t}|} - P\,\ddot{a}_{35+t,\,2+t:\overline{20-t}|}$$

親の死亡後は

$$_{t}V = A_{2+t:\overset{1}{\overline{20-t}|}} + \frac{1}{20}\,\frac{(t+1)\bar{C}_{2+t} + \cdots\cdots + 20\bar{C}_{21}}{D_{2+t}} + 0.1\, a_{2+t:\overline{19-t}|}$$

なお第5章練習問題(1)の(15)の解答によれば、責任準備金を表わす式の第2項は

$$\frac{1}{20}\,\frac{\bar{R}_{2+t} - \bar{R}_{22} + t\,\bar{M}_{2+t} - 20\,\bar{M}_{22}}{D_{2+t}}$$

とすることができる。

(7)　この場合は夫(x)の通常の終身保険が基本にあり、その上にその他の給付が特約として加えられていると考えることができる。従って保険料も別個に求めて、両者を加えればよく

$$P = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x} + \frac{\frac{1}{4}\bar{A}_y + 0.1\, a_{x|y}}{\ddot{a}_{xy}}$$

営業保険料は

$$P^{*} = \frac{1}{1-\beta}\left\{\frac{\bar{A}_x + \alpha + \gamma\,\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x} + \frac{\frac{1}{4}\bar{A}_y + (0.1+\gamma')\,a_{x|y}}{\ddot{a}_{xy}}\right\}$$

(8)　減額される額とその条件を考えると、求める年金現価は

$$a_{x|y}-\frac{1}{2}v^7\,{}_7p_{xy}\,a_{x+7|y+7}-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)v^{10}\,{}_{10}p_{xy}\,a_{x+10|y+10}$$

(9)　g 年の保証年金部分につきその現価を考えると、養老保険で保険金のかわりに、保証年金現価を用いたものとなるので

$$A_{x:\overline{m}|}\ \ddot{a}_{\overline{g}|}$$

となる。次に保証年金経過後の年金部分を考えると、(12.6.22)の場合のように考えて、その現価は

$$\sum_{t=1}^{m-1}v^{g+t}(1-{}_tp_x)\,{}_{g+t}p_y+\sum_{t=m}^{\infty}v^{g+t}\,{}_{g+t}p_y$$

$$=v^g\,{}_gp_y\left[\sum_{t=1}^{m-1}v^t(1-{}_tp_x)\,{}_tp_{y+g}+\sum_{t=m}^{\infty}v^t\,{}_tp_{y+g}\right]$$

$$=\frac{D_{y+g}}{D_y}(a_{y+g}-a_{x,y+g:\overline{m-1}|})$$

両者を加えたものが求める年金現価である。

(10)　20年の確定期間の年金部分につきその現価を考えると、共存終身保険 A_{xy} で保険金のかわりに $\ddot{a}_{\overline{20}|}$ を用いたものとなるので、それは

$$A_{xy}\ \ddot{a}_{\overline{20}|}$$

である。次に確定期間経過後の年金部分を考えよう。(x) が先に死亡して (y) に年金が支給される場合と、その逆の場合に分けて考えると、その現価は

$$\sum_{t=1}^{\infty}\{v^{t+20}(1-{}_tp_x)\,{}_{t+10}p_y+v^{t+20}(1-{}_tp_y)\,{}_{t+10}p_x\}$$

$$=v^{20}\,{}_{10}p_y\sum_{t=1}^{\infty}v^t(1-{}_tp_x)\,{}_tp_{y+10}+v^{20}\,{}_{10}p_x\sum_{t=1}^{\infty}v^t(1-{}_tp_y)\,{}_tp_{x+10}$$

$$=v^{10}\frac{D_{y+10}}{D_y}(a_{y+10}-a_{x,y+10})+v^{10}\frac{D_{x+10}}{D_x}(a_{x+10}-a_{x+10,y})$$

両者を加えたものが求める年金現価である。

(11)　それは次式で与えられる。

$$2{,}000{,}000\left(a_{\overline{50,35}|25}-\frac{1}{2}a_{\overline{50,35}|25:\overline{20}|}\right)$$

(12.6.20)と(12.5.34)を用いると、(　)の中は

$$= a_{25} - a_{25,35} - a_{25,50} + a_{25,35,50}$$

$$- \frac{1}{2}(a_{25:\overline{20}|} - a_{25,35:\overline{20}|} - a_{25,50:\overline{20}|} + a_{25,35,50:\overline{20}|})$$

(12)　(12.6.3)により

$$P = \frac{a_{x|y}}{\ddot{a}_{xy}} = \frac{a_y - a_{xy}}{\ddot{a}_{xy}} = \frac{\ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}}{\ddot{a}_{xy}} = \frac{\ddot{a}_y}{\ddot{a}_{xy}} - 1$$

であるので

$$_tV(a_{x|y}) = a_{x+t|y+t} - P\ddot{a}_{x+t,y+t}$$

$$= \ddot{a}_{y+t} - \ddot{a}_{x+t,y+t} - \frac{\ddot{a}_y}{\ddot{a}_{xy}}\ddot{a}_{x+t,y+t} + \ddot{a}_{x+t,y+t}$$

$$= \ddot{a}_{y+t} - \frac{\ddot{a}_y}{\ddot{a}_{xy}}\ddot{a}_{x+t,y+t}$$

従って与えられた条件下では、これは負となる。

(13)　(12.6.6) の右辺第1項に(4.4.4)を入れ、第2項に(12.4.5)を入れて変形し、さらに $\mu_{xy} = \mu_x + \mu_y$ に留意すると

$$a^{(k)}_{x|y:\overline{n}|} = a_{y:\overline{n}|} - a_{xy:\overline{n}|} - \frac{k-1}{2k} v^n {}_np_y(1 - {}_np_x) + \frac{k^2-1}{12k^2}\beta$$

$$\beta = v^n {}_np_y(1 - {}_np_x) + \mu_x + v^n({}_np_y\,\mu_{y+n} - {}_np_{xy}\,\mu_{x+n,y+n})$$

特に y に終身年金を与える場合は ${}_np_y \to 0$ であるので

$$a^{(k)}_{x|y} = a_y - a_{xy} + \frac{k^2-1}{12k^2}\mu_x$$

さらに $k \to \infty$ とすれば

$$\bar{a}_{x|y} = a_y - a_{xy} + \frac{1}{12}\mu_x$$

(14)　(12.2.14)の記号を用いて

$$a_{u|\overset{3}{\overline{xyzw}}} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t(1 - {}_tp_u)\,{}_tp_{\overset{3}{\overline{xyzw}}}$$

であるが、本章練習問題(1)の(6)の(b)の結果を用いると

$$= \sum_{t=1}^{\infty} v^t (1 - {}_tp_u)({}_tp_{xyz} + {}_tp_{xyw} + {}_tp_{xzw} + {}_tp_{yzw} - 3\,{}_tp_{xyzw})$$

$$= a_{u|xyz} + a_{u|xyw} + a_{u|xzw} + a_{u|yzw} - 3a_{u|xyzw}$$

あるいは上記 $\sum v^t$ の後を全部 ${}_tp\ldots$ の項に展開すれば、連生年金の項で表わした式が得られる。

(15) (a)

$$a_{\overset{1}{x}yz|w:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q_{\overset{1}{x}yz}\, v^t\, {}_tp_w\, \ddot{a}_{w+t:\overline{n-t+1}|}$$

$$= \sum_{t=1}^{n} v^t\, {}_tq_{\overset{1}{x}yz}\, {}_tp_w$$

(12.3.15)を用いると与式が証明される。

(b)

$$a_{\overset{1}{x}y|zw:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q_{\overset{1}{x}y}\, v^t\, {}_tp_{zw}\, \ddot{a}_{z+t,\,w+t:\overline{n-t+1}|}$$

$$= \sum_{t=1}^{n} v^t\, {}_tq_{\overset{1}{x}y}\, {}_tp_{zw}$$

(12.3.7)を用いると与式が証明される。

(c) (12.6.14), (12.6.17)と同様に

$$a_{\overset{1}{x}y|\overline{zw}:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q_{\overset{1}{x}y}\, v^t \left[\, {}_tp_z\, {}_tq_w\, \ddot{a}_{z+t:\overline{n-t+1}|} \right.$$

$$\left. + {}_tq_z\, {}_tp_w\, \ddot{a}_{w+t:\overline{n-t+1}|} + {}_tp_z\, {}_tp_w\, \ddot{a}_{z+t,\,w+t:\overline{n-t+1}|} \right]$$

$$= \sum_{t=1}^{n} v^t\, {}_tq_{\overset{1}{x}y}\, {}_tp_{\overline{zw}}$$

(12.6.16)を導いたように与式が証明される。

(d)

$$a_{\overset{2}{x}y|zw:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q_{\overset{2}{x}y}\, v^t\, {}_tp_{zw}\, \ddot{a}_{z+t,\,w+t:\overline{n-t+1}|}$$

$$= \sum_{t=1}^{n} v^t\, {}_tq_{\overset{2}{x}y}\, {}_tp_{zw}$$

(12.3.19)を用いると与式が証明される。

(e) (12.6.14), (12.6.17)と同様に

$$a_{\overset{2}{x}y|\overline{zw}:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q_{\overset{2}{x}y}\, v^t \left[\, {}_tp_z\, {}_tq_w\, \ddot{a}_{z+t:\overline{n-t+1}|} \right.$$

$$\left. + {}_tq_z\, {}_tp_w\, \ddot{a}_{w+t:\overline{n-t+1}|} + {}_tp_z\, {}_tp_w\, \ddot{a}_{\overline{z+t,\,w+t}:\overline{n-t+1}|} \right]$$

$$= \sum_{t=1}^{n} v^t \; {}_tq_{\overset{2}{x}y} \; {}_tp_{\overline{zw}}$$

(12.6.16)を導いたように与式が証明される。

(*f*)

$$a_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z|w:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} \; v^t \; {}_tp_w \; \ddot{a}_{w+t:\overline{n-t+1}|}$$

$$= \sum_{t=1}^{n} v^t \; {}_tq_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} \; {}_tp_w$$

(12.3.23)を用いると与式が証明される。

(*g*)

$$a_{\underset{1}{x}\underset{2}{y}\overset{3}{z}|w:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q_{\underset{1}{x}\underset{2}{y}\overset{3}{z}} \; v^t \; {}_tp_w \; \ddot{a}_{w+t:\overline{n-t+1}|}$$

$$= \sum_{t=1}^{n} v^t \; {}_tq_{\underset{1}{x}\underset{2}{y}\overset{3}{z}} \; {}_tp_w$$

(12.3.25)を用いると与式が証明される。

(*h*) 省略

(16) ① (12.7.3)より

$$a_{\overset{1}{35},35|35:\overline{10}|} = \frac{1}{2} a_{35,35|35:\overline{10}|} = 0.05290$$

② (12.7.6)より

$$a_{\overset{2}{35},35|35:\overline{10}|} = a_{35|35:\overline{10}|} - a_{\overset{1}{35},35|35:\overline{10}|} = 0.00027$$

③ 前問(*a*)より

$$a_{\overset{1}{35},35,35|35:\overline{10}|} = \frac{1}{3} a_{35,35,35|35:\overline{10}|} = 0.05263$$

④ 前問(*b*)より

$$a_{\overset{1}{35},35|35,35:\overline{10}|} = \frac{1}{2} a_{35,35|35,35:\overline{10}|} = 0.05236$$

⑤ 前問(*c*)より

$$a_{\overset{1}{35},35|\overline{35,35}:\overline{10}|} = 2\,a_{\overset{1}{35},35|35:\overline{10}|} - a_{\overset{1}{35},35|35,35:\overline{10}|} = 0.05344$$

⑥ 前問(*d*)より

$$a_{\overset{2}{35},35|35,35:\overline{10}|} = a_{35|35,35:\overline{10}|} - a_{\overset{1}{35},35|35,35:\overline{10}|} = 0.00027$$

⑦ 前問(*e*)より

$$a_{\overset{2}{35},35|\overline{35,35}:\overline{10}|} = 2\,a_{\overset{2}{35},35|35:\overline{10}|} - a_{\overset{2}{35},35|35,35:\overline{10}|} = 0.00028$$

⑧ 前問(*f*)より

$$a_{\underset{1}{35},\overset{2}{35},35|35:\overline{10}|} = a_{\overset{1}{35},35|35:\overline{10}|} - a_{35,\overset{1}{35},35|35:\overline{10}|} = 0.00027$$

⑨　前問(g)より

$$a_{\underset{1}{35},\,\underset{2}{35},\,\overset{3}{35}|35:\overline{10}|} = a_{\underset{1}{35},\,\overset{2}{35},\,35|35:\overline{10}|} - a_{35,\,\overset{2}{35}|35,\,35:\overline{10}|} = 0.000001$$

⑩　前問(h)より

$$a_{\underset{1}{35},\,\overset{2:3}{35},\,35|35:\overline{10}|} = a_{\underset{1}{35},\,\overset{2}{35},\,35|35:\overline{10}|} + a_{\underset{1}{35},\,\overset{3}{35},\,\underset{2}{35}|35:\overline{10}|} = 0.00027$$

(17)　(a)　(12.3.37)と前々問(a)の結果を用いると

$$a_{\overset{1}{\overline{xy}},\,z|w:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t\,{}_tq_{\overset{1}{\overline{xy}},\,z}\,{}_tp_w = \sum_{t=1}^{n} v^t\left({}_tq_{\overset{1}{x}yz} + {}_tq_{x\overset{1}{y}z}\right){}_tp_w$$

$$= a_{\overset{1}{x}yz|w:\overline{n}|} + a_{x\overset{1}{y}z|w:\overline{n}|}$$

(b)　(12.3.25)と前々問(f)の結果を用いると

$$a_{\overset{1}{\overline{xy}},\,z|w:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t\,{}_tq_{\overset{1}{\overline{xy}},\,z}\,{}_tp_w = \sum_{t=1}^{n} v^t\left({}_tq_{\overset{2}{x}\underset{1}{y}z} + {}_tq_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z}\right){}_tp_w$$

$$= a_{\overset{2}{x}\underset{1}{y}z|w:\overline{n}|} + a_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z|w:\overline{n}|}$$

(c)　本章練習問題(1)の(12)(a)の結果と前々問(g)の結果を用いると

$$a_{\overset{3}{x}yz|w:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t\,{}_tq_{\overset{3}{x}yz}\,{}_tp_w = \sum_{t=1}^{n} v^t\left({}_tq_{\overset{3}{x}\underset{1}{y}\underset{2}{z}} + {}_tq_{\overset{3}{x}\underset{2}{y}\underset{1}{z}}\right){}_tp_w$$

$$= a_{\overset{3}{x}\underset{1}{y}\underset{2}{z}|w:\overline{n}|} + a_{\overset{3}{x}\underset{2}{y}\underset{1}{z}|w:\overline{n}|}$$

(d)　本章練習問題(1)の(12)(b)の結果と、上記(c)の解答の第一式を用いると

$$a_{\overset{2}{\overline{xy}},\,z|w:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t\,{}_tq_{\overset{2}{\overline{xy}},\,z}\,{}_tp_w = \sum_{t=1}^{n} v^t\left({}_tq_{\overset{3}{x}yz} + {}_tq_{x\overset{3}{y}z}\right){}_tp_w$$

$$= a_{\overset{3}{x}yz|w:\overline{n}|} + a_{x\overset{3}{y}z|w:\overline{n}|}$$

(18)　この保険の給付の現価は $A_{\overline{xyz}}$ であるが、一方収入の現価は最初の年払保険料を P として

$$P\left(\ddot{a}_{\overline{xyz}} - \frac{1}{2}a_{x|yz} - \frac{1}{2}a_{x\overset{2}{z}|y} - a_{\overline{xy}|z}\right)$$

または

$$P\left(\ddot{a}_x + \frac{1}{2}a_{x|yz} + \frac{1}{2}a_{x\overset{2}{z}|y} + a_{\overset{2}{x}z|y}\right)$$

であるので、両者を等しいとおいて P が求められる。なお収入の現価を表わ

す二つの式は、$(x)(y)(z)$の死亡順序をすべての場合について書いて見れば、これらを確めることができる。また両者が等しいことは次のような証明もできる。すなわち

$$\ddot{a}_x + a_{x|yz} + a_{x\overset{2}{z}|y} + a_{\overset{2}{x}z|y} + a_{\overline{xy}|z}$$

において

$$a_{x|yz} = a_{yz} - a_{xyz} \qquad ((12.6.10)による)$$

$$a_{x\overset{2}{z}|y} + a_{\overset{2}{x}z|y} = a_{\overline{xz}|y} = a_y - a_{\overline{xz},y} \qquad ((12.6.20)による)$$

$$= a_y - a_{xy} - a_{yz} + a_{xyz} \qquad ((12.5.34)による)$$

$$a_{\overline{xy}|z} = a_z - a_{xz} - a_{yz} + a_{xyz}$$

であるので、上式は

$$= 1 + a_x + a_y + a_z - a_{xy} - a_{yz} - a_{xz} + a_{xyz}$$

$$= 1 + a_{\overline{xyz}} = \ddot{a}_{\overline{xyz}} \qquad ((12.5.22)による)$$

となる。

第12章　練習問題（4）

(1)
$$\frac{A^{1}_{xyz:\overline{m|}} + v^m\,{}_mp_{xyz}}{\ddot{a}_{xyz:\overline{m|}}}$$

(2)
$$\frac{A^{1}_{xy:\overline{m|}} + v^m\,{}_mp_{xy}\,A_{x+m}}{\ddot{a}_{xy:\overline{m|}} + v^m\,{}_mp_{xy}\,\ddot{a}_{x+m}}$$

(3)
$$(IA)^{1}_{xy:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1}(t+1)v^{t+1}{}_{t|}q^{1}_{xy}$$
$$\fallingdotseq \sum_{t=0}^{n-1}(t+1)v^{t+1}{}_{t+\frac{1}{2}}p_y\;{}_{t|}q_x$$
$$= \frac{1}{D_{xy}}\left(R^{1}_{xy} - R^{1}_{x+n,\,y+n} - n\,M^{1}_{x+n,\,y+n}\right)$$

ただし　　$R^{1}_{xy} = M^{1}_{xy} + M^{1}_{x+1,\,y+1} + \cdots\cdots\cdots$

(4)　一時払保険料は $A_{20,\overset{2}{50}:\overline{20|}} + v^{20}\,{}_{20}p_{50}\,A_{70}$ である。(12.8.15)を用いて第1項を書き直し整理すれば、$A_{50} - A_{20,\overset{1}{50}:\overline{20|}}$ とすることもできる。年払保険料は

$\ddot{a}_{50}$ で割る。

(5)　一時払保険料は $A_{\overset{1}{30}:\overline{10|}} + v^{10}\ {}_{10}p_{30,60}\ A_{\overset{1}{40},70}$ である。また契約の消滅は、10年以内であれば(30)の死亡により、10年以後は(30), (60)のどちらかの死亡により起るので、年払保険料は

$$\ddot{a}_{30:\overline{10|}} + v^{10}\ {}_{10}p_{30,60}\ \ddot{a}_{40,70}$$

で一時払保険料を割る。($v^{10}\ {}_{10}p_{30,60}\ A_{\overset{1}{40},70}$ のかわりに $A_{\overset{1}{30},60} - A_{\overset{1}{30},60:\overline{10|}}$ を、$v^{10}\ {}_{10}p_{30,60}\ \ddot{a}_{40,70}$ のかわりに $\ddot{a}_{30,60} - \ddot{a}_{30,60;\overline{10|}}$ を用いてもよい。)

(6)　一時払保険料は、(12. 3 .17) を用いると

$$A_{\overset{1}{x}:\overline{5|}} + \sum_{t=0}^{\infty} v^{5+t+1}\ {}_{5+t|}q_{x\overset{2}{y}}$$

$$= A_{\overset{1}{x}:\overline{5|}} + \sum_{t=0}^{\infty} v^{5+t+1}\left({}_{5+t|}q_x - {}_{5+t|}q_{\overset{1}{x}y}\right)$$

$$= A_x - \left(A_{\overset{1}{x}y} - A_{\overset{1}{x}y:\overline{5|}}\right)$$

である。年払保険料は、これを $\ddot{a}_x$ で割る。

(7)　一時払保険料は

$$\frac{1}{2}A_{\overset{1}{x}y} + \frac{1}{2}A_{x\overset{2}{y}} + A_{\overset{2}{x}y}$$

であるが、(12. 8 .15) を用いると

$$= \frac{1}{2}A_{\overset{1}{x}y} + \frac{1}{2}\left(A_y - A_{x\overset{1}{y}}\right) + \left(A_x - A_{\overset{1}{x}y}\right)$$

$$= A_x + \frac{1}{2}A_y - \frac{1}{2}\left(A_{\overset{1}{x}y} + A_{x\overset{1}{y}}\right)$$

さらに(12. 8 . 5)と(4 . 9 .11) (12. 4 .15)とを用いると

$$= (1 - d\,\ddot{a}_x) + \frac{1}{2}(1 - d\,\ddot{a}_y) - \frac{1}{2}(1 - d\,\ddot{a}_{xy})$$

$$= 1 - d\,\ddot{a}_x - \frac{1}{2}d\,\ddot{a}_y + \frac{1}{2}d\,\ddot{a}_{xy}$$

となる。年払保険料は、これを $\ddot{a}_{xy}$ で割る。

(8)　給付の現価は $A_{\overset{1}{x}y:\overline{n|}} + \{P(1+k)+C\}(IA)_{\overset{1}{x}y:\overline{n|}}$ であり、収入の現価は $P\,\ddot{a}_{xy:\overline{n|}}$ であるから、両者を等しいとして P について解けばよい。

(9)　年払営業保険料を P^* とすると、支出現価，収入現価は次のようになる。

年金給付の現価	$A(\ddot{a}_x - \ddot{a}_{xy:\overline{z-y}\rvert})$
死亡給付の現価	$P^*(IA)^{\ \ 1}_{xy:\overline{z-y}\rvert}$
営業保険料比例事業費の現価	$\alpha P^* \ddot{a}_{xy:\overline{z-y}\rvert}$
年金額比例事業費の現価	$\beta A(\ddot{a}_x - \ddot{a}_{xy:\overline{z-y}\rvert})$
収入営業保険料の現価	$P^* \ddot{a}_{xy:\overline{z-y}\rvert}$

収支を等しいとして P^* について解けばよい。

(10)　①の給付の現価は $\sum_x S_x v^{x-2} {}_{x-2}p_2$ である。次に②の給付の現価は次のようにして定める。まず父が $t+s$ 年後($t=0, 1, \cdots\cdots\cdots, 19; 0 \leq s < 1$) に死亡して息子がその時点で生存していれば、以後息子に支給される年金の現価は

$$K_{t+s} = H_{2+t} + H_{2+t+1}\, v\, {}_1p_{2+t+s} + \cdots\cdots\cdots + H_{2+19}\, v^{19-t}\, {}_{19-t}p_{2+t+s}$$

である。父の死亡に対し息子にこの K_{t+s} を支給すると考えれば、 ②の給付の現価は、(12.8.2)のように

$$\sum_{t=0}^{19} \int_t^{t+1} v^s K_s\, {}_sp_{2,35}\, \mu_{35+s}\, ds$$

である。$v^s K_s$ に中間値 $v^{t+\frac{1}{2}} K_{t+\frac{1}{2}}$ を入れて近似すれば

$$\doteqdot \sum_{t=0}^{19} v^{t+\frac{1}{2}} K_{t+\frac{1}{2}}\ {}_{t|}q_{2,\overset{1}{35}}$$

である。今、第12章§4の(9)と§8の(1)のなかで定義した記号を用いると

$$v^{t+\frac{1}{2}}\ {}_{t|}q_{2,\overset{1}{35}} = \frac{v^{\frac{2+35}{2}+t+\frac{1}{2}}\ l_{2+t+\frac{1}{2}}\ d_{35+t}}{v^{\frac{2+35}{2}}\ l_2\ l_{35}}$$

$$= \frac{\overline{C}_{2+t,\overset{1}{35+t}}}{D_{2,35}}$$

であるので、結局上記の値は

$$\frac{1}{D_{2,35}} \sum_{t=0}^{19} K_{t+\frac{1}{2}}\ \overline{C}_{2+t,\overset{1}{35+t}}$$

となる。③の給付の現価は、年払営業保険料を P^* とし、また第 t 年度にお

ける既払生存給付金の合計を $T_t=\sum_{x<2+t} S_x$ で表わすと

$$\sum_{t=0}^{19}\left[(t+1)P^{*}-T_{t+1}\right]v^{t+\frac{1}{2}}\,{}_{t|}q_2$$
$$=P^{*}(I\bar{A})^{1}_{2:\overline{20|}}-\sum_{t=0}^{19}T_{t+1}\frac{\bar{C}_{2+t}}{D_2}$$

である。④の支出の現価は

$$\alpha+\beta P^{*}+\gamma\ddot{a}_{2,35:\overline{20|}}+\gamma'(\ddot{a}_{2:\overline{20|}}-\ddot{a}_{2,35:\overline{20|}})$$
$$+\delta\left(\frac{1}{D_{2,35}}\sum_{t=0}^{19}K_{t+\frac{1}{2}}\bar{C}_{2+t,\overset{1}{35+t}}\right)$$

である。

以上四つの支出の合計を収入の合計 $P^{*}\ddot{a}_{2,35:\overline{20|}}$ に等しいとして、整理すれば P^{*}が得られる。

(11)　まず契約から5年以内に(30)が死亡すれば保険金が必らず支払われるから、その現価は $\bar{A}^{\,1}_{30:\overline{5|}}$ である。次に契約から5年以後は、(30)の死亡時点の5年前に(60)が生存していることが条件であるから、その現価は

$$\int_5^{\infty}v^t\,{}_{t-5}p_{60}\,{}_tp_{30}\,\mu_{30+t}\,dt$$
$$=v^5\,{}_5p_{30}\int_0^{\infty}v^s\,{}_sp_{60}\,{}_sp_{35}\,\mu_{35+s}\,ds=\frac{D_{35}}{D_{30}}\bar{A}_{\overset{1}{35},60}$$

となる。また(60)の死亡から5年間(30)が生存している場合の給付の現価は、純保険料を A として

$$1.075A\int_0^{\infty}v^{t+5}\,{}_tp_{60}\,{}_{t+5}p_{30}\,\mu_{60+t}\,dt=1.075A\frac{D_{35}}{D_{30}}A_{35,\overset{1}{60}}$$

である。以上三者の和を A に等しいとおいて解けば

$$A=\frac{\bar{A}^{\,1}_{30:\overline{5|}}+\dfrac{D_{35}}{D_{30}}\bar{A}_{\overset{1}{35},60}}{1-1.075\dfrac{D_{35}}{D_{30}}A_{35,\overset{1}{60}}}$$

(12)　(12.3.30)を用いると

$$A^{\,2}_{xyz:\overline{n|}}=\sum_{t=0}^{n-1}v^{t+1}\,{}_{t|}q^{\,2}_{xyz}=A^{\,2}_{x\underset{1}{y}z:\overline{n|}}+A^{\,2}_{xy\underset{1}{z}:\overline{n|}}$$

となる。右辺は(12. 8 .35)で計算できる。

保険料を年払とする時は、(y), (z) の最終生存者と (x) とが共存中にそれが払込まれるので、(12. 8 .28)の $\ddot{a}_{x,\overline{yz}:\overline{n}|}$ で一時払保険料を割る。

(13) (a) (12. 3 .35)により

$$A_{\overset{1}{\overline{xy}},z:\overline{n}|}=\sum_{t=0}^{n-1}v^{t+1}{}_{t|}q_{\overset{1}{\overline{xy}},z}=A_{\overset{2}{x}\underset{1}{y}z:\overline{n}|}+A_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z:\overline{n}|}$$

となる。右辺は(12. 8 .35)で計算できる。

(b) (12. 1 .26)を用いれば

$$\bar{A}_{\overset{1}{\overline{xy}},z:\overline{n}|}=\int_0^n v^s\,{}_sp_{\overline{xy}}\,{}_sp_z\,\mu_{\overline{x+s,y+s}}\,ds$$

$$=\bar{A}_{\overset{2}{x}\underset{1}{y}z:\overline{n}|}+\bar{A}_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z:\overline{n}|}$$

(c) 保険料を年払とする時は、(x), (y) の最終生存者と (z) が共存中にそれが払込まれるので、(12. 8 .28)の $\ddot{a}_{\overline{xy},z:\overline{n}|}$ で一時払保険料を割る。

(14) (a) (12. 3 .27)より

$$A_{\overset{2:3}{xy}\underset{1}{z}:\overline{n}|}=\sum_{t=0}^{n-1}v^{t+1}{}_{t|}q_{\overset{2:3}{xy}\underset{1}{z}}=A_{\overset{2}{x}y\underset{1}{z}:\overline{n}|}+A_{\overset{3}{x}\underset{2}{y}\underset{1}{z}:\overline{n}|}$$

(b)
$$\bar{A}_{\overset{2:3}{xy}\underset{1}{z}:\overline{n}|}=\int_0^n v^s(\,{}_sq_z\,{}_sp_y+{}_sq_{z\overset{2}{y}})\,{}_sp_x\,\mu_{x+s}\,ds$$

$$=\bar{A}_{\overset{2}{x}y\underset{1}{z}:\overline{n}|}+\bar{A}_{\overset{3}{x}\underset{2}{y}\underset{1}{z}:\overline{n}|}$$

(c) 保険料を年払とする場合は§8(7)の場合と同じ理由で、一時払保険料を $\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}+a_{\overset{2}{y}z|x:\overline{n-1}|}$ で割る。

(15) 一時払保険料は

$$A_{30,35,\overset{2}{40}}+A_{\underset{1}{30},\overset{2}{35},40}+A_{\overset{2}{30},\underset{1}{35},40}$$

$$+\frac{1}{2}\left(A_{30,35,\overset{1}{40}}+A_{30,\overset{2}{35},\underset{1}{40}}+A_{\overset{2}{30},35,\underset{1}{40}}\right)$$

であり、年払保険料はそれを

$$1+a_{\overset{2}{\overline{xyz}}}\quad\text{あるいは}\quad\ddot{a}_{xyz}+a_{x|yz}+a_{y|xz}+a_{z|xy}$$

で割る。〔(12. 5 .28)と(12. 6 .10)を用いて両者の等しいことを証明せよ〕

(16)
$$A_{20,\overset{2}{\overline{40,50,60}}}=\sum_{t=0}^{\infty}v^{t+1}{}_{t|}q_{20,\overset{2}{\overline{40,50,60}}}$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \left({}_{t|}q_{\overline{40,50,60}} - {}_{t|}q_{20,\overset{1}{\overline{40,50,60}}} \right)$$

$$= A_{\overline{40,50,60}} - A_{20,\overset{1}{\overline{40,50,60}}}$$

であるが、右辺第1項は(12.5.24)で計算できる。第2項については次のように変形する。すなわち

$${}_{t|}q_{20,\overset{1}{\overline{40,50,60}}} = \int_t^{t+1} {}_sp_{20}\ {}_sp_{\overline{40,50,60}}\ \mu_{\overline{40+s,50+s,60+s}}\,ds$$

であるが、(12.1.26)を得たように計算すると

$${}_sp_{\overline{40,50,60}}\ \mu_{\overline{40+s,50+s,60+s}}$$
$$= {}_sq_{50}\ {}_sq_{60}\ {}_sp_{40}\,\mu_{40+s} + {}_sq_{40}\ {}_sq_{60}\ {}_sp_{50}\,\mu_{50+s} + {}_sq_{40}\ {}_sq_{50}\ {}_sp_{60}\,\mu_{60+s}$$
$$= (1 - {}_sp_{50})(1 - {}_sp_{60})\,{}_sp_{40}\,\mu_{40+s} + \cdots\cdots\cdots$$

となるので

$${}_{t|}q_{20,\overset{1}{\overline{40,50,60}}}$$
$$= {}_{t|}q_{20,\overset{1}{40}} - {}_{t|}q_{20,\overset{1}{40},50} - {}_{t|}q_{20,\overset{1}{40},60} + {}_{t|}q_{20,\overset{1}{40},50,60} + \cdots\cdots\cdots$$

となり、これを用いて

$$A_{20,\overset{1}{\overline{40,50,60}}} = A_{20,\overset{1}{40}} + A_{20,\overset{1}{50}} + A_{20,\overset{1}{60}}$$
$$- A_{20,\overset{1}{40},50} - A_{20,\overset{1}{40},60} - A_{20,40,\overset{1}{50}} - A_{20,\overset{1}{50},60}$$
$$- A_{20,40,\overset{1}{60}} - A_{20,50,\overset{1}{60}} + A_{20,\overset{1}{40},50,60} + A_{20,40,\overset{1}{50},60} + A_{20,40,50,\overset{1}{60}}$$

となる。年払保険料は、一時払保険料を $\ddot{a}_{\overline{40,50,60}}$ で割る。

(17) 最初の m 年については (z) の生死に関係ないので、この部分の一時払保険料は、(12.5.6), (12.1.15)を用いて

$$A_{\overset{1}{\overline{xy}}:\overline{m}|} = \sum_{t=0}^{m-1} v^{t+1}\ {}_{t|}q_{\overline{xy}}$$
$$= \left(\sum_{t=0}^{\infty} - \sum_{t=m}^{\infty} \right) v^{t+1} \left({}_{t|}q_x + {}_{t|}q_y - {}_{t|}q_{xy} \right)$$
$$= \left(A_x - v^m\,{}_mp_x\,A_{x+m} \right) + \left(A_y - v^m\,{}_mp_y\,A_{y+m} \right)$$
$$- \left(A_{xy} - v^m\,{}_mp_{xy}\,A_{x+m,\,y+m} \right)$$

となる。一方 m 年経過後の部分については、保険金支払時点の少なくとも m 年前に (z) が生存していなければならないから、この部分の一時払保険料は、

(12.1.27)を参考に

$$A=\sum_{t=m}^{\infty} v^{t+1}\int_{t}^{t+1} {}_{s-m}p_z\ {}_{s}p_{\overline{xy}}\ \mu_{x+s,\,y+s}\,ds$$

となるが、(12.1.26)を用いると

$$=\sum_{t=m}^{\infty} v^{t+1}\int_{t}^{t+1} {}_{s-m}p_z\,(\,{}_{s}q_y\ {}_{s}p_x\ \mu_{x+s}+\ {}_{s}q_x\ {}_{s}p_y\ \mu_{y+s})\,ds$$

である。この右辺第1項のみとると

$$\sum_{t=m}^{\infty} v^{t+1}\int_{t}^{t+1} {}_{s-m}p_z\,(1-\ {}_{s}p_y)\ {}_{s}p_x\ \mu_{x+s}\,ds$$

$$=\sum_{t=m}^{\infty} v^{t+1}\int_{t}^{t+1}(\ {}_{s-m}p_z\ {}_{m}p_x\ {}_{s-m}p_{x+m}\ \mu_{x+s}$$

$$-\ {}_{s-m}p_z\ {}_{m}p_y\ {}_{s-m}p_{y+m}\ {}_{m}p_x\ {}_{s-m}p_{x+m}\ \mu_{x+s})\,ds$$

$$=v^m\,{}_{m}p_x\sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\int_{t}^{t+1} {}_{s}p_z\ {}_{s}p_{x+m}\ \mu_{x+s}\,ds$$

$$-\ v^m\,{}_{m}p_y\ {}_{m}p_x\sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\int_{t}^{t+1} {}_{s}p_z\ {}_{s}p_{y+m}\ {}_{s}p_{x+m}\ \mu_{x+s}\,ds$$

$$=v^m\,{}_{m}p_x\,A_{\overset{1}{x+m},\,z}-v^m\,{}_{m}p_{xy}\,A_{\overset{1}{x+m},\,y+m,\,z}$$

であるので

$$A=v^m\,{}_{m}p_x\,A_{\overset{1}{x+m},\,z}+v^m\,{}_{m}p_y\,A_{\overset{1}{y+m},\,z}$$

$$-\ v^m\,{}_{m}p_{xy}\,(A_{\overset{1}{x+m},\,y+m,\,z}+\ A_{x+m,\,\overset{1}{y+m},\,z})$$

二つの部分を加え $v^m\,{}_{m}p_x=\dfrac{D_{x+m}}{D_x}$ 等とすると、答は

$$A_x-\frac{D_{x+m}}{D_x}(\,A_{x+m}-A_{\overset{1}{x+m},\,z})+A_y-\frac{D_{y+m}}{D_y}(\,A_{y+m}-A_{\overset{1}{y+m},\,z})$$

$$-\ A_{xy}+\frac{D_{x+m,\,y+m}}{D_{xy}}(\,A_{x+m,\,y+m}-A_{\overset{1}{x+m},\,y+m,\,z}-\ A_{x+m,\,\overset{1}{y+m},\,z})$$

(18)　契約後10年間については、保険金支払の条件は(30)の死亡時に(50)が生存していることであるから、この部分の一時払保険料は

$$\bar{A}_{\overset{1}{30},\,50:\overline{10|}}=\bar{A}_{\overset{1}{30},\,50}-v^{10}\,{}_{10}p_{30,\,50}\,\bar{A}_{\overset{1}{40},\,60}$$

となる。一方10年以後の部分の一時払保険料は与えられた条件から

$$\int_0^{\infty} v^{10+s}\ {}_{10+s}p_{30,50}\ {}_sp_{40}\ \mu_{30+10+s}\, ds = v^{10}\ {}_{10}p_{30,50} \int_0^{\infty} {}_sp_{40,60}\ {}_sp_{40}\ \mu_{40+s}\, ds$$

$$= \frac{D_{40,60}}{D_{30,50}} \bar{A}^{\ 1}_{40,40,60}$$

である。両者を加えれば証明が終る。

(19)　契約後15年間についての一時払保険料は $A_{\overline{30,35},45:\overline{15|}}^{\ 1}$ である。次の５年間については期初に(35)が死亡していなければならないから、その部分の一時払保険料は

$$v^{15}\ {}_{15}p_{30,50}\,(1 - {}_{15}p_{35})\,A^{\ 1}_{45,60:\overline{5|}}$$

である。両者を加えて一時払保険料となる。

年払保険料は、それを

$$\ddot{a}_{\overline{30,35},45:\overline{15|}} + v^{15}\ {}_{15}p_{30,50}\,(1 - {}_{15}p_{35})\,\ddot{a}_{45,60:\overline{5|}}$$

で割る。

(20)
$$(c^x + c^y)\bar{A}^{\ 1}_{xy} = (c^x + c^y)\int_0^{\infty} v^t\ {}_tp_{xy}\,\mu_{x+t}\,dt$$

であるが、(２．７．５)を用いると

$$\begin{aligned}(c^x + c^y)\mu_{x+t} &= (c^x + c^y)(A + Bc^{x+t})\\ &= A(c^x + c^y) + Bc^x(c^{x+t} + c^{y+t})\\ &= A(c^x + c^y) + c^x(\mu_{x+t} - A + \mu_{y+t} - A)\\ &= A(c^y - c^x) + c^x\mu_{x+t,y+t}\end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned}(c^x + c^y)\bar{A}^{\ 1}_{xy} &= \int_0^{\infty} v^t\ {}_tp_{xy}\,[A(c^y - c^x) + c^x\mu_{x+t,y+t}]\,dt\\ &= A(c^y - c^x)\bar{a}_{xy} + c^x\bar{A}_{xy}\end{aligned}$$

$A = -\log s$ であるから、両辺を $c^x + c^y$ で割れば与式が証明される。

$\bar{P}^{1\,(\infty)}_{xy}$ については、この両辺を $\bar{a}_{xy}$ で割ればよい。

最後に

$$\begin{aligned}{}_t\bar{V}^{1\,(\infty)}_{xy} &= \bar{A}_{x+t,y+t}^{\ 1} - \bar{P}^{1\,(\infty)}_{xy}\,\bar{a}_{x+t,y+t}\\ &= \frac{c^x}{c^x + c^y}(\bar{A}_{x+t,y+t} - \bar{P}^{(\infty)}_{xy}\,\bar{a}_{x+t,y+t})\\ &= \frac{c^x}{c^x + c^y}\ {}_t\bar{V}^{(\infty)}_{xy}\end{aligned}$$

(21)　本章練習問題(1)の(12)の (f) の式で t の代りに $t+1$ としたものから、もとの式を引くと

$$ {}_{t|}q^{3:4}_{xy\underset{2}{z}\underset{1}{w}} = {}_{t|}q_{xy\overset{2}{z}\underset{1}{w}} - \left({}_{t+1}p_x\ {}_{t+1}q_{y\overset{2}{z}\underset{1}{w}} - {}_tp_x\ {}_tq_{y\overset{2}{z}\underset{1}{w}} \right) $$

となる。この式を

$$ A^{3:4}_{xy\underset{2}{z}\underset{1}{w}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\ {}_{t|}q^{3:4}_{xy\underset{2}{z}\underset{1}{w}} $$

に入れ、(12.8.43) を得た時と同じような整理をすると与式が得られる。この保険を年払とするには、与式を $\ddot{a}_{xyz:\overline{n}|} + a_{y\overset{2}{z}\underset{1}{w}|x:\overline{n-1}|}$ で割る。

(22)　(z) の死亡時に注目して式をつくると

$$ \bar{A}^{3}_{xy\underset{2}{z}\underset{1}{w}:\overline{n}|} = \int_0^n v^s \left(1 - {}_sp_w\right) {}_sp_{xyz}\, \mu_{z+s}\, \bar{A}_{\overset{1}{x+s},\, y+s:\overline{n-s}|}\, ds $$

となる。この式は被積分関数に $\bar{A}_{\overset{1}{x+s},\, y+s:\overline{n-s}|}$ があり、積分が困難であるが、単位区間の〔$t, t+1$〕の中間値で代表すると

$$ \fallingdotseq \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+\frac{1}{2}} \bar{A}_{\overset{1}{x+t+\frac{1}{2}},\, y+t+\frac{1}{2}:\overline{n-t-\frac{1}{2}}|} \left({}_{t|}q_{xy\overset{1}{z}} - {}_{t|}q_{xy\overset{1}{z}w} \right) $$

となり、この中の $\bar{A}$ は t における値と $t+1$ における値の和の $\frac{1}{2}$ とすればよい。年払保険料は $\ddot{a}_{xyz:\overline{n}|} + a_{\overset{2}{z}w|xy:\overline{n-1}|}$ で割る。

(23)　(a)　$\bar{A}^{4}_{x\underset{3}{y}\underset{2}{z}\underset{1}{w}:\overline{n}|} = \bar{A}^{3:4}_{xy\underset{2}{z}\underset{1}{w}:\overline{n}|} - \bar{A}^{3}_{xy\underset{2}{z}\underset{1}{w}:\overline{n}|}$

年払保険料は $\ddot{a}_{xyz:\overline{n}|} + a^{3}_{y\underset{2}{z}\underset{1}{w}|x:\overline{n-1}|}$ で割る。

(b)　$\bar{A}^{4}_{xyz\underset{1}{w}:\overline{n}|} = \bar{A}^{4}_{x\underset{3}{y}\underset{2}{z}\underset{1}{w}:\overline{n}|} + \bar{A}^{4}_{x\underset{2}{y}\underset{3}{z}\underset{1}{w}:\overline{n}|}$

年払保険料は $\ddot{a}_{xyz:\overline{n}|} + a^{3}_{y\underset{2}{z}\underset{1}{w}|x:\overline{n-1}|} + a_{\underset{2}{y}\overset{3}{z}\underset{1}{w}|x:\overline{n-1}|}$ で割る。

(c)　$\bar{A}^{2:3:4}_{xyz\underset{1}{w}} = \bar{A}^{2}_{xyz\underset{1}{w}:\overline{n}|} + \bar{A}^{3}_{xy\underset{2}{z}\underset{1}{w}:\overline{n}|} + \bar{A}^{3}_{x\underset{2}{y}z\underset{1}{w}:\overline{n}|} + \bar{A}^{4}_{xyz\underset{1}{w}:\overline{n}|}$

年払保険料は $\ddot{a}_{xyz:\overline{n}|} + a^{2}_{yw|xz:\overline{n-1}|} + a^{2}_{zw|xy:\overline{n-1}|} + a^{\ 2}_{\overline{yz},\, w|x:\overline{n-1}|}$ で割る。

(24)

$$ \frac{D_{x+n}}{D_x} \left(\bar{A}_{x+n} - \bar{A}_{\overset{1}{x+n},\, y} \right) $$

$$ = v^n\, {}_np_x \left\{ \int_0^\infty v^s\, {}_sp_{x+n}\, \mu_{x+n+s}\, ds - \int_0^\infty v^s\, {}_sp_{x+n}\, {}_sp_y\, \mu_{x+n+s}\, ds \right\} $$

$$ = \int_0^\infty v^{n+s}\, {}_{n+s}p_x\, {}_sq_y\, \mu_{x+n+s}\, ds $$

これは (y) の死亡後 n 年以上経過して (x) が死亡した時に保険金が支払われることを表わしている。

責任準備金は次の三つの場合に分けて考える。

① (x), (y) が共存中

$$ {}_t\overline{V} = \frac{D_{x+n+t}}{D_{x+t}} \left(\overline{A}_{x+n+t} - \overline{A}_{x+\overset{1}{n+t},\,y+t} \right) - \overline{P}\,\ddot{a}_{x+t} $$

② (y) の死亡後 k 年($k < n$)経過しており、かつ (x) が生存の場合

$$ {}_t\overline{V} = v^{n-k}\;{}_{n-k}p_{x+t}\;\overline{A}_{x+(n-k)+t} - \overline{P}\,\ddot{a}_{x+t} $$

③ (y) の死亡後 n 年以上経過しており、かつ (x) が生存の場合

$$ {}_t\overline{V} = \overline{A}_{x+t} - \overline{P}\ddot{a}_{x+t} $$

(25) (y) の死亡に際し追加して支払われる額が平均して $\dfrac{1}{2k}$ であるとすると、(y) より先に (x) が死亡している条件を付して、その現価は

$$ \int_0^\infty v^t \left(1 - {}_tp_x \right) \frac{1}{2k}\,{}_tp_y\,\mu_{y+t}\,dt = \frac{1}{2k}\overline{A}_{x\overset{2}{y}} $$

となる。従って本章練習問題(3)の(13)の結果と(12.8.15)を用いると

$$ \mathring{a}^{(k)}_{x|y} = a^{(k)}_{x|y} + \frac{1}{2k}\overline{A}_{x\overset{2}{y}} $$

$$ = a_y - a_{xy} + \frac{k^2-1}{12k^2}\mu_x + \frac{1}{2k}\left(\overline{A}_y - \overline{A}_{x\overset{1}{y}} \right) $$

(26) (12.6.24)で $n \to \infty$ としてもよいが、次のように変形することもできる。すなわち

$$ \hat{a}^{(k)}_{x|y} = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_{xy}\,\mu_{x+t}\,\ddot{a}^{(k)}_{y+t}\,dt $$

であるが、(4.4.5)と(4.5.5)を用いると(β', $\overline{\beta}'$ は省略する)

$$ = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_{xy}\,\mu_{x+t}\left(\overline{a}_{y+t} + \frac{1}{2k} \right) dt $$

$$ = \overline{a}_{x|y} + \frac{1}{2k}\overline{A}^{\,1}_{xy} $$

これに本章練習問題(3)の(13)の結果を用いると

$$ = a_y - a_{xy} + \frac{1}{12}\mu_x + \frac{1}{2k}\overline{A}^{\,1}_{xy} $$

(27) $$ \hat{a}^{(k)}_{x|y} + \frac{1}{2k}\overline{A}_{x\overset{2}{y}} $$

第13章　練習問題

(1) $q_{40}^{aa}=0.0016490$　$q_{40}^{(i)}=0.0005224$　$q_{40}^{aa*}=0.0016492$

$q_{40}^{(i)*}=0.0005228$　$q_{40}^{ii}=0.013944$　$q_{40}^{i}=0.013270$

$p_{40}^{i}=0.986730$　${}_3p_{40}^{aa}=0.9928099$　$q_{40}^{a}=0.0016525$

$p_{40}^{ai}=0.00051889$

次に、$q_{41}^{i}=0.013949$, $q_{42}^{i}=0.014458$ を用いて

$$ {}_3p_{40}^{i}=p_{40}^{i}\,p_{41}^{i}\,p_{42}^{i}=(1-q_{40}^{i})(1-q_{41}^{i})(1-q_{42}^{i})=0.958899 $$

${}_3p_{40}^{ai}=0.0016555$　${}_3p_{40}^{a}=0.994465$　${}_3q_{40}^{a}=0.005535$

(2)　(3.2.17), (3.2.18)をみよ。

(3)
$$ v^{t+1}\,{}_tp_x^{aa}\,p_{x+t}^{ai}\,\ddot{a}^{i}_{x+t+1:\overline{n-t}|} $$

が前半の解答である。これを t について加え(13.1.17)を用いると

$$ \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\,\frac{l_{x+t+1}^{ii}-l_{x+t}^{ii}\,p_{x+t}^{i}}{l_x^{aa}}\,\ddot{a}^{i}_{x+t+1:\overline{n-t}|} $$

分子の l_x^{aa} を省略して、この和を整理すると

$$ \sum_{t=1}^{n} v^t\,l_{x+t}^{ii}\,\ddot{a}^{i}_{x+t:\overline{n-t+1}|}-\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\,l_{x+t}^{ii}\,p_{x+t}^{i}\,\ddot{a}^{i}_{x+t+1:\overline{n-t}|} $$

$$ =v^n\,l_{x+n}^{ii}+\sum_{t=1}^{n-1} v^t\,l_{x+t}^{ii}\left(\ddot{a}^{i}_{x+t:\overline{n-t+1}|}-v\,p_{x+t}^{i}\,\ddot{a}^{i}_{x+t+1:\overline{n-t}|}\right)-v\,l_x^{ii}\,p_x^{i}\,\ddot{a}^{i}_{x+1:\overline{n}|} $$

であるが第2項の(　)の中は1であるので

$$ =\sum_{t=1}^{n} v^t\,l_{x+t}^{ii}-v\,l_x^{ii}\,p_x^{i}\left(1+v\,p_{x+1}^{i}+\cdots\cdots+v^{n-1}\,{}_{n-1}p_{x+1}^{i}\right) $$

$$ =\sum_{t=1}^{n}\left(v^t\,l_{x+t}^{ii}-v^t\,l_x^{ii}\,{}_tp_x^{i}\right) $$

これを l_x^{aa} で割り、(13.1.19)を用いると、(13.2.6)の右辺となる。

(4)　前問解答中の下から2番目の式を用いると

$$ a^{ai}_{x:\overline{n}|}=\sum_{t=1}^{n} v^t\,\frac{l_{x+t}^{ii}}{l_x^{aa}}-\frac{l_x^{ii}}{l_x^{aa}}\left(v\,p_x^{i}+v^2\,{}_2p_x^{i}+\cdots\cdots+v^n\,{}_np_x^{i}\right) $$

$$= \frac{D_{x+1}^{ii} + \cdots\cdots\cdots + D_{x+n}^{ii}}{D_x^{aa}} - \frac{D_x^{ii}}{D_x^{aa}} \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{i}$$

これで上式が証明された。さらに右辺の2項にそれぞれ $\dfrac{D_x^{ii}}{D_x^{aa}}$ を加えると

$$= \frac{N_x^{ii} - N_{x+n+1}^{ii} - D_x^{ii}\ \ddot{a}_{x:\overline{n+1}|}^{i}}{D_x^{aa}}$$

この式で $n \to \infty$ とすれば下式が得られる。

(5) $$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{a(k)} = \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{n-1} \left(\sum_{t=0}^{k-1} v^{r+\frac{t}{k}}\ {}_{r+\frac{t}{k}}p_x^a \right)$$

と書き直し、$t = 0$ の場合、すなわち $v^r\ {}_rp_x^a$ の相つぐ値を直線で結んで、直線上の点で $v^{r+\frac{t}{k}}\ {}_{r+\frac{t}{k}}p_x^a$ の近似値とすると

$$\fallingdotseq \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{k} \left[\sum_{t=0}^{k-1} \left\{ v^r\ {}_rp_x^a - \left(v^r\ {}_rp_x^a - v^{r+1}\ {}_{r+1}p_x^a \right) \frac{t}{k} \right\} \right]$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} \left\{ v^r\ {}_rp_x^a - \frac{k-1}{2k} \left(v^r\ {}_rp_x^a - v^{r+1}\ {}_{r+1}p_x^a \right) \right\}$$

$$= \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{a} - \frac{k-1}{2k} \left(1 - v^n\ {}_np_x^a \right)$$

$a_{x:\overline{n}|}^{ai(k)}$ については、$v^0\ {}_0p_x^{ai} = 0$ に注意して、上記と同じ方法を用いる。

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{ai(k)} = \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{n-1} \left(\sum_{t=1}^{k} v^{r+\frac{t}{k}}\ {}_{r+\frac{t}{k}}p_x^{ai} \right)$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{k} \left[\sum_{t=1}^{k} \left\{ v^r\ {}_rp_x^{ai} + \left(v^{r+1}\ {}_{r+1}p_x^{ai} - v^r\ {}_rp_x^{ai} \right) \frac{t}{k} \right\} \right]$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} \left\{ v^r\ {}_rp_x^{ai} + \frac{k+1}{2k} \left(v^{r+1}\ {}_{r+1}p_x^{ai} - v^r\ {}_rp_x^{ai} \right) \right\}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} v^r\ {}_rp_x^{ai} - v^n\ {}_np_x^{ai} + \frac{k+1}{2k} v^n\ {}_np_x^{ai}$$

$$= a_{x:\overline{n}|}^{ai} - \frac{k-1}{2k} v^n\ {}_np_x^{ai}$$

(6)　(13.1.26)の ${}_{t|}q_x^{ai}$ を用いると

$$A^{ai}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\,{}_{t|}q_x^{ai} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{v^{t+1}(d^{ii}_{x+t} - l^{ii}_x\,{}_{t|}q^i_x)}{l^{aa}_x}$$

である。右辺の分母，分子に v^x を掛け

$$\sum_{t=0}^{n-1} v^{x+t+1} d^{ii}_{x+t} = M^{ii}_x - M^{ii}_{x+n}$$

$$v^x l^{ii}_x = D^{ii}_x, \qquad \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\,{}_{t|}q^i_x = A^i_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}$$

を用いると与式が得られる。

(7)　被保険者の年齢が xの時、①と②の一時払保険料を P_1，P_2 とすると

$$P_1 = J\sum_{t=0}^{\infty} \frac{v^{t+1}}{l^{aa}_x}(d^{aa}_{x+t} + i_{x+t})$$

$$P_2 = K\ddot{a}^{aa}_x + LA^{(i)}_x = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{v^t}{l^{aa}_x}(Kl^{aa}_{x+t} + Lvi_{x+t})$$

であるが、両者が等しければ

$$J\sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}(d^{aa}_{x+t} + i_{x+t}) = \sum_{t=0}^{\infty} v^t(Kl^{aa}_{x+t} + Lvi_{x+t})$$

仮定によりここで xのかわりに $x+1$ を入れても等式が成立するが、その式で両辺に vを掛ければ

$$J\sum_{t=0}^{\infty} v^{t+2}(d^{aa}_{x+t+1} + i_{x+t+1}) = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}(Kl^{aa}_{x+t+1} + Lvi_{x+t+1})$$

もとの式からこの式を引くと

$$Jv(d^{aa}_x + i_x) = Kl^{aa}_x + Lvi_x$$

となり、これがすべての年齢で成立する。この式に

$$i_x = l^{aa}_x - l^{aa}_{x+1} - d^{aa}_x$$

を入れて整理すると

$$Lvd^{aa}_x = Kl^{aa}_x - Jv(l^{aa}_x - l^{aa}_{x+1}) + Lv(l^{aa}_x - l^{aa}_{x+1})$$

$$d^{aa}_x = \frac{\{K + (L-J)v\}\,l^{aa}_x - (L-J)\,vl^{aa}_{x+1}}{Lv}$$

(8)　一時払保険料は

$$A = K\left(a_x^{a(i,\overline{75-x}|)} + \frac{D_{75}^{aa}}{D_x^{aa}}\ddot{a}_{75}^{a} + 3\bar{A}_x^a\right)$$

ただし $\bar{A}_x^a$ は (13.1.26) を用いて

$$\bar{A}_x^a = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+\frac{1}{2}}\left(\frac{d_{x+t}^{aa}}{l_x^{aa}} + \frac{d_{x+t}^{ii} - l_x^{ii}\ {}_{t|}q_x^i}{l_x^{aa}}\right)$$

$$= \frac{\bar{M}_x}{D_x^{aa}} - \frac{D_x^{ii}}{D_x^{aa}}\frac{\bar{M}_x^i}{D_x}$$

年払保険料 P は A を $\ddot{a}_{x:\overline{75-x}|}^{aa}$ で割る。

責任準備金は　①保険料払込中の者　②介護不要のまま75歳に到達し年金を支給されている者　③75歳までに要介護状態となり年金を支給されている者　に分けて積立てる。

①については

$${}_tV = K\left(a_{x+t}^{a(i,\overline{75-x-t}|)} + \frac{D_{75}^{aa}}{D_{x+t}^{aa}}\ddot{a}_{75}^{a} + 3\bar{A}_{x+t}^a\right) - P\ddot{a}_{x+t:\overline{75-x-t}|}^{aa}$$

②については

$${}_tV = K(\ddot{a}_{x+t} + 3\bar{A}_{x+t})$$

③については

$${}_tV = K(\ddot{a}_{x+t}^i + 3\bar{A}_{x+t}^i)$$

(9)　年金現価は

$$\sum_{s=1}^{n} v^s\ {}_sp_x^{ai} K_s + v^n\ {}_np_x^{ai} K\, a_{x+n}^i$$

である。年払保険料 P はこれを $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{aa}$ で割る。

$t < n$ の場合の責任準備金は、就業者については

$$\sum_{s=1}^{n-t} v^s\ {}_sp_{x+t}^{ai} K_{t+s} + v^{n-t}\ {}_{n-t}p_{x+t}^{ai} K\, a_{x+n}^i - P\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}^{aa}$$

となる。$t \geq n$ の場合は、就業不能者に対し

$$K\, a_{x+t}^i$$

(10)　使用する脱退表は夫についての死亡・就業不能脱退残存表と、妻についての通常の生命表および寡婦の死亡・再婚脱退残存表である。

一時払保険料については、各給付に対応する次の一時払保険料の和をとればよい。

(a) および (b)

$$\frac{\sum_{t=1}^{10} \alpha_t \, \bar{C}^{aa}_{x+t-1}}{D^{aa}_x} + \frac{\sum_{t=1}^{10} \beta_t \, \bar{C}^{(i)}_{x+t-1}}{D^{aa}_x}$$

(c)　(12. 8 .16)の類似で、問題(2)の記号を用いると

$$\lambda \int_{10}^{\infty} v^s \, {}_sq_y \, {}_sp^{aa}_x \, \mu^{(aa)}_{x+s} \, ds$$

(12. 8 .17)を得たように変形し、さらに(13. 3 . 4) を参照すると

$$= \lambda \left[\frac{\bar{M}^{aa}_{x+10}}{D^{aa}_x} - \int_{10}^{\infty} v^s \, {}_sp_y \, {}_sp^{aa}_x \, \mu^{(aa)}_{x+s} \, ds \right]$$

いま、$\bar{C}_{\overset{1}{x}y}$ の定義式で、d_xの代りに d^{aa}_x を用いたものを $\bar{C}^{aa}_{\overset{1}{x}y}$ とし、それから $\bar{M}^{aa}_{\overset{1}{x}y}$ をつくっておき、また D_{xy} の定義式で l_xの代りに l^{aa}_x を用いたものを D^{aa}_{xy} とすると

$$= \lambda \left[\frac{\bar{M}^{aa}_{x+10}}{D^{aa}_x} - \frac{\bar{M}^{aa}_{\overset{1}{x+10}, y+10}}{D^{aa}_{xy}} \right]$$

(d)　問題(2)の記号を用いると、前題と同様に

$$\nu_1 \int_{10}^{\infty} v^s \, {}_sq_y \, {}_sp^{aa}_x \, \mu^{(i)}_{x+s} \, \ddot{a}^i_{x+s} \, ds$$

$$\fallingdotseq \nu_1 \sum_{t=10}^{\infty} v^{t+\frac{1}{2}} \, {}_{t+\frac{1}{2}}q_y \, \ddot{a}^i_{x+t+\frac{1}{2}} \int_t^{t+1} {}_sp^{aa}_x \, \mu^{(i)}_{x+s} \, ds$$

$$\fallingdotseq \nu_1 \sum_{t=10}^{\infty} v^{t+\frac{1}{2}} \, {}_{t+\frac{1}{2}}q_y \, {}_tp^{aa}_x \, q^{(i)}_{x+t} \, \ddot{a}^i_{x+t+\frac{1}{2}}$$

(e)　(13. 4 .12)の記号を用いて

$$v^{10} \, {}_{10}p_{xy} \, \hat{a}^{(a+I)W}_{x+10|y+10}$$

第14章　練習問題

(1)　身体障害１級、２級を前節の就業不能と同じように考え、それと死亡とによる２重脱退表を作成した上、式(13.3.6)により計算する。ただし同所のP'の代りに$\pi_1+\pi_2$を用いる。

(2)　①の災害入院の平均給付日数を定める式は、６日以上入院の発生率をq^{ah},ちょうどi日入院する発生率をq^{ahi}として、(14.1.4)と類似の式で

$$T^1=\sum_{i=6}^{125}\frac{q^{ahi}}{q^{ah}}(i-5)+\sum_{i\geq 126}\frac{q^{ahi}}{q^{ah}}\times 120$$

で与えられる。②の疾病入院では、x歳で21日以上入院の発生率をq_x^{sh}とし、ちょうどi日入院する発生率をq^{shi}として、x歳での平均給付日数は

$$T_x^2=\sum_{i\geq 21}^{140}\frac{q_x^{shi}}{q_x^{sh}}(i-20)+\sum_{i\geq 141}\frac{q_x^{shi}}{q_x^{sh}}\times 120$$

となる。これらの平均給付日数を用いれば、①の給付の現価は、(10.1.3)を用いて

$$A_1=\sum_{t=0}^{n-1}v^{t+\frac{1}{2}}\,{}_tp_x\,q^{ah}\,T^1\,\delta$$

となり、②のそれは(14.2.1)の分子と同様に（ただし契約から６カ月以内は不支給であることを考慮して）

$$A_2=v^{\frac{3}{4}}\frac{q_x^{sh}}{2}T_x^2\,\delta+\sum_{t=1}^{n-1}v^{t+\frac{1}{2}}\,{}_tp_x\,q_{x+t}^{sh}\,T_{x+t}^2\,\delta$$

となる。③については、q_xと$\overline{q}_x^h$を用いた２重脱退表を作成し、((3.2.6)を用いる）それによって、xがn年後に入院の既応歴なく生存している確率${}_n\overline{p}_x$を求めると、③の給付の現価は

$$v^n\,{}_n\overline{p}_x(5P^*)=v^n\,{}_n\overline{p}_x(5P+5C)$$

となる。従って収支相等の原則から純保険料については

$$P\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=A_1+A_2+v^n\,{}_n\overline{p}_x(5P+5C)$$

が成立し

$$P = \frac{A_1 + A_2 + v^n\,{}_n\overline{p}_x \times 5\,C}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - v^n\,{}_n\overline{p}_x \times 5}$$

となる。営業保険料はこれにCを加え

$$P^* = \frac{A_1 + A_2 + C\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - v^n\,{}_n\overline{p}_x \times 5}$$

第15章　練習問題

(1)　M, N それぞれの１年間の支払保険金額を確率変数 X_M および X_N で表わすと次の結果となる。

(a)　二項分布として計算すると

$P_r\{X_M=0\}=(0.9985)^{1000}=0.22288$

$P_r\{X_M=1\}=1000(0.0015)(0.9985)^{999}=0.33482$

$P_r\{X_M=2\}=\binom{1000}{2}(0.0015)^2(0.9985)^{998}=0.25124$

$P_r\{X_M=3\}=\binom{1000}{3}(0.0015)^3(0.9985)^{997}=0.12556$

である。ポワソン分布では、平均値1.5のポワソン分布の表より上記に対応する確率はそれぞれ0.22313，0.33470，0.25120，0.12551となる。

(b)　各グループにおいて二項分布でかつ独立とすると

$P_r\{X_N=0\}=(0.999)^{420}(0.9985)^{380}(0.998)^{200}=0.24882$

$P_r\{0.6\leqq X_N\leqq 1.5\}$

$=420(0.001)(0.999)^{419}(0.9985)^{380}(0.998)^{200}$

$+(0.999)^{420}\times 380(0.0015)(0.9985)^{379}(0.998)^{200}$

$+(0.999)^{420}(0.9985)^{380}\times 200(0.002)(0.998)^{199}=0.34637$

$P_r\{1.6\leqq X_N\leqq 2.5\}$に該当する死亡の仕方は、例えば a グループ３人、b グループ０、c グループ０であるが、これを(３，０，０)で表わすことにすると、その他に(２，０，０)，(１，１，０)，(１，０，１)，(０，２，０)，(０，１，１)が該当する。そのうち例えば（２，０，０）と（１，１，０）に当たる場合はその確率が

$\binom{420}{2}(0.001)^2(0.999)^{418}(0.9985)^{380}(0.998)^{200}=0.021937$

$420(0.001)(0.999)^{419}\times 380(0.0015)(0.9985)^{379}(0.998)^{200}=0.059716$

である。その他の場合についても同様の計算をして、その結果を加えると結局求める確率は 0.22404 となる。

$P_r\{2.6\leqq X_N\leqq 3.5\}$に該当する死亡の仕方は、（４，０，０），（３，１，０），

(2,1,0),(2,0,1),(1,2,0),(1,1,1),(0,3,0),(0,2,1),(0,0,2)であるが、それぞれの場合について上記と同様の計算をし、その結果を加えるとこの確率は 0.10806 となる。

(c) M団体の1年間の支払保険金額の平均値は1.5,標準偏差は 1.2238 であり、N団体のそれらは 1.506 および 1.2262 である。

(2) (a) 予定死亡率 $0.8q_{25}$, $0.8q_{35}$, $0.9q_{45}$, q_{55} を使用して、$\ddot{a}^{(12)}_{x:\overline{1}|}$ を(4.4.2)によって計算し、さらに(15.1.7)によって、各年齢についての保険金額も考慮しつつ個人ごとの月払純保険料を求めると、25歳で303円、35歳で439円、45歳で1,353円、55歳で4,705円となる。それぞれの人数を掛けて合計すると、月額純保険料総額は852,150円。

(b) 保険金額合計は4,550百万円であるので、月額付加保険料総額は(15.2.1)より

$$4{,}550{,}000 \times 0.03 + 47{,}000 = 183{,}500\text{円}$$

(c) (a)と(b)を合わせて、月額営業保険料の総額は1,035,650円となるので保険金額100万円についての月払平均保険料率は

$$1{,}035{,}650 \div 4{,}550 = 228\text{円}$$

(d) 年間支払保険料は

$$4{,}550 \times 228 \times 12 + (5 \times 30 + 6 \times 10) \times 228 \times 6 - 8 \times 228 \times 6$$
$$= 12{,}725{,}136\text{円}$$

(c) (いろいろの計算手順が考えられるが、通常次のように行われる)

$$\text{月払対万付加保険料} = \gamma + \frac{K}{S} = 0.3 + \frac{47{,}000}{455{,}000} = 0.4033$$

$$\text{純保険料率} = 1 - \frac{\text{月払対万付加保険料}}{\text{月払対万平均保険料}} = 1 - \frac{0.4033}{2.28} = 0.8231$$

年間純保険料収入 = 12,725,136 × 0.8231 = 10,474,059円

死差益 = 年間純保険料 − 支払保険金 = 2,474,059円

配当金 = 死差益 × 配当率(0.57) = 1,410,214円

第16章　練習問題

(1)　$m_{20}^{(w)} = 0.08$を(16.1.6)に入れると、$q_{20}^{(w)*} = 0.07692$。同様の計算を順次行なって $q_x^{(w)*}(21 \leq x \leq 29)$を求めると、0.07229, 0.06763, 0.06295, 0.05825, 0.05353, 0.04878, 0.04401, 0.03922, 0.03440を得る。一方 $q_x^{(d)*}(20 \leq x \leq 29)$は0.00119, 0.00114,………,0.00086であり、これらを(3.2.6)に入れて $q_x^{(d)}$, $q_x^{(w)}$を出し、$l_{20}^s = 100,000$として、2重脱退残存表を作成すると

x	$q_x^{(d)}$	$q_x^{(w)}$	l_x^s	d_x^s	w_x
20	0.00114	0.07687	100,000	114	7,687
21	0.00110	0.07225	92,199	101	6,661
22	0.00100	0.06760	85,437	85	5,776
23	0.00093	0.06292	79,576	74	5,007
24	0.00089	0.05822	74,495	66	4,337
25	0.00089	0.05351	70,092	62	3,751
26	0.00088	0.04876	66,279	58	3,232
27	0.00087	0.04399	62,989	55	2,771
28	0.00085	0.03920	60,163	51	2,358
29	0.00085	0.03439	57,754	49	1,986
30			55,719		

(2)　(16.2.3)については $\dfrac{\ddot{a}_{x:\overline{r-x}|}^{s}}{{}_{r-x}p_x^s}$ が、また他の二つについては $\dfrac{\ddot{a}_{x:\overline{r-x}|}^{ss}}{{}_{r-x}p_x^s}$ が大きくなることを証明すればよい。(16.2.2) および (16.2.8) を見ると、それには $\dfrac{{}_tp_x^s}{{}_{r-x}p_x^s} = \dfrac{l_{x+t}^s}{l_r^s} = \dfrac{1}{{}_{r-x-t}p_{x+t}^s}$ が大きくなることを言えばよい。さてどの年齢の脱退率も大きくなれば、${}_{r-x-t}p_{x+t}^s = p_{x+t}^s\ p_{x+t+1}^s \cdots\cdots\ p_{r-1}^s$ は常に小さくなるので、その逆数の上式は常に大きくなる。

(3)
$$\alpha = \frac{0.3(1.03)^{40}\,\ddot{a}_{60}\,(1.05)^{-40}\,{}_{40}p_{20}^{s}}{\ddot{a}_{20:\overline{40}|}^{ss}} = 0.029$$

(4)　最終５カ年の平均給与は

$$\frac{1}{5}\sum_{t=36}^{40}(1 + t\,\delta)\,s_{20} = (1 + 38\delta)\,s_{20}$$

である。従ってこの場合(16. 2 .10)に相当する収支相等の式は、$\ddot{a}_{20:\overline{40}|}^{ss}$ に(16. 2 . 8)を用いて

$$\alpha\, s_{20}\sum_{t=0}^{39}(1 + t\,\delta)\,v^{t}\,{}_{t}p_{20}^{s} = 0.25\,(1 + 38\delta)\,s_{20}\,(\ddot{a}_{\overline{10}|}^{(4)} + {}_{10|}\ddot{a}_{60}^{(4)})\,v^{40}\,{}_{40}p_{20}^{s}$$

となり、これより

$$\alpha = \frac{0.25(1 + 38\,\delta)\,(\ddot{a}_{\overline{10}|}^{(4)} + {}_{10|}\ddot{a}_{60}^{(4)})\,D_{60}^{s}}{\sum_{t=0}^{39}(1 + t\,\delta)\,D_{20+t}^{s}}$$

を得る。この式の分母は、$S_{x}^{s} = N_{x}^{s} + N_{x+1}^{s} + \cdots\cdots + N_{60}^{s}$ として

$$(N_{20}^{s} - N_{60}^{s}) + \delta\,(S_{21}^{s} - S_{60}^{s} - 39\,N_{60}^{s})$$

と書くことができる。

責任準備金は

$$ {}_{10}V = 0.25(1 + 38\,\delta)\,s_{20}\,(\ddot{a}_{\overline{10}|}^{(4)} + {}_{10|}\ddot{a}_{60}^{(4)})\,v^{30}\,{}_{30}p_{30}^{s}$$
$$ - \sum_{t=0}^{29}\alpha\,\{1 + (30 + t)\,\delta\}\,s_{20}\,v^{30+t}\,{}_{t}p_{30}^{s}$$

(5)　(16. 2 . 3)の分子の $\ddot{a}_{r}$ の代りに、(16. 2 .13)を変更した次式を用いる。

$$\ddot{a}_{r} + h\,(0.6)\,\ddot{a}_{r|r-u:(10)}^{w}$$

ただし(13. 4 . 2)の $\ddot{a}_{y:\overline{m}|}^{w}$ を用いて

$$\ddot{a}_{r|r-u:(10)}^{w} = \sum_{t=1}^{\infty}\,{}_{t-1|}q_{r}\,{}_{t}p_{r-u}\,v^{t}\,\ddot{a}_{r-u+t:\overline{10}|}^{w}$$

年金開始後の責任準備金は次の三つの場合に分けて計上する。

(1)　被保険者、妻とも生存している場合

$$\ddot{a}_{r+1} + h\,(0.6)\,\ddot{a}_{r+1|r-u+1:(10)}^{w}$$

($r - u + 1$ の代りに妻の実際年齢 $y + 1$ を用いてもよい)

(2) 被保険者が生存し、妻のいない場合

$$\ddot{a}_{r+1}$$

(3) 被保険者が死亡し妻のみ生存している場合

$$0.6\,\ddot{a}^{w}_{y+1:\overline{10}|}$$

(6) 第6章定理の(3)を利用する。同所の記号につき

$$g_j = \begin{cases} s_{x+j-1} & (j=1,2,\cdots\cdots\cdots,t) \\ 0 & (j=t+1,\cdots\cdots\cdots,r-x) \end{cases}$$

$$h = s_{x+j-1} \quad (j=1,2,\cdots\cdots\cdots,r-x)$$

$$f = k_j \quad (j=1,2,\cdots\cdots\cdots,r-x)$$

とすると、(6.1.1)の逆の条件と(6.1.6)が満足されるので

$$\frac{\sum_{j=1}^{t} k_j\, s_{x+j-1}}{\sum_{j=1}^{t} s_{x+j-1}} \leq \frac{\sum_{j=1}^{r-x} k_j\, s_{x+j-1}}{\sum_{j=1}^{r-x} s_{x+j-1}}$$

となる。これより第1の不等式が得られる。第2の不等式は

$$g_j = \begin{cases} 1 & (j=1,\cdots\cdots\cdots,t) \\ 0 & (j=t+1,\cdots\cdots\cdots,r-x) \end{cases}$$

$$h_j = 1 \quad (j=1,\cdots\cdots\cdots,r-x)$$

$$f_j = s_{x+j-1} \quad (j=1,\cdots\cdots\cdots,r-x)$$

として得られる。第3の不等式は、第2の不等式の場合と同じ g_j , h_j をとり

$$f_j = \frac{s_{x+j-1}}{s_x}\, v^{j-1}\, {}_{j-1}p^{s}_{x}$$

として、本題の条件式(2)を用いて得られる。第4の不等式は

$$g_j = \begin{cases} v^{j-1}\, {}_{j-1}p^{s}_{x} & (j=1,\cdots\cdots\cdots,t) \\ 0 & (j=t+1,\cdots\cdots\cdots,r-x) \end{cases}$$

$$h_j = v^{j-1}\, {}_{j-1}p^{s}_{x} \quad (j=1,\cdots\cdots\cdots,r-x)$$

$$f = \frac{s_{x+j-1}}{s_x} \quad (j=1,\cdots\cdots\cdots,r-x)$$

として得られる。

(7)　加入年齢方式による通常掛金は(16. 2 .15)により

$$\frac{A\,\ddot{a}_r\,v^{r-x}\,{}_{r-x}p_x^s}{\ddot{a}^s_{x:\overline{r-x}|}} = \frac{A\,\ddot{a}_r\,v^{r-x-t}\,{}_{r-x-t}p^s_{x+t}\,v^t\,{}_tp_x^s}{\ddot{a}^s_{x:\overline{r-x}|}}$$

であり、また題意の過去勤務債務掛金は(16. 2 .15)を用いて

$$\frac{A\,\ddot{a}_r\,v^{r-x-t}\,{}_{r-x-t}p^s_{x+t}\,\ddot{a}^s_{x:\overline{t}|}}{\ddot{a}^s_{x:\overline{r-x}|}\,\ddot{a}^s_{x+t:\overline{r-x-t}|}}$$

である。両者の和は

$$\frac{A\,\ddot{a}_r\,v^{r-x-t}\,{}_{r-x-t}p^s_{x+t}}{\ddot{a}^s_{x:\overline{r-x}|}}\left(v^t\,{}_tp_x^s + \frac{\ddot{a}^s_{x:\overline{t}|}}{\ddot{a}^s_{x+t:\overline{r-x-t}|}}\right)$$

であるが、括弧の中は $\dfrac{\ddot{a}^s_{x:\overline{r-x}|}}{\ddot{a}^s_{x+t:\overline{r-x-t}|}}$ であるので、これは個人平準保険料方式による掛金である。

文　献

下記の〔1〕守田の著書には当時の参考書が多数記載されているが、ここでは主としてそれ以後のものを掲載した。

A．生命保険一般

〔1〕　守田常直：保険数学　上巻 1963，下巻 1964

〔2〕　小林　滋：生命保険数理（生命保険文化研究所テキスト）1990

〔3〕　生命保険新実務講座　6：第2編　数理　（有斐閣）1990

〔4〕　R. E. Larson and E. A. Gaumnitz : Life Insurance Mathematics 1951

〔5〕　C. W. Jordan : Life Contingencies 1975

〔6〕　N. L. Bowers，H. U. Gerber，J. C. Hickman，D. A. Jones and J. C. Nesbitt : Actuarial Mathematics 1986

〔7〕　A. Neill : Life Contingencies 1977

〔8〕　B. Benjamin and J. H. Pollard : The Analysis of Mortality and other Actuarial Statistics 1980

〔9〕　H. V. Gerber : Life Insurance Mathematics 1990

〔10〕　W. Saxer : Versicherungsmathematik，Band 1 1955，Band 2 1958

〔11〕　K. H. Wolff : Versicherungsmathematik 1970

〔12〕　K. Bohn : Die Mathematik der deutchen privaten Krankenversicherung 1980

B．企業年金については上記の参考書で記載しているものもあるが、アメリカのそれについて詳述したものとしては

〔13〕 B. N. Berin : The Fundamentals of Pension Mathematics 1972

〔14〕 C. L. Trowbridge and C. E. Farr : The Theory and Practice of Pension Funding 1976

〔15〕 H. E. Winklevoss : Pension Mathematics with Numerical Illustrations 1976

〔16〕 A. W. Anderson : Pension Mathematics for Actuaries 1985

がある。また日本の企業年金を詳しく解説したものは現在多数出版されているが、一例をあげておくと

〔17〕 新井鋼太郎：企業年金（生命保険文化研究所テキスト）1989

C．公的年金の数理を扱ったものとしては次のものがある。

〔18〕 大滝　勉：年金保険数学（日本アクチュアリー会 会報別冊第84号）1983

D．本書では取り上げていないが、損害保険に関連する数学の参考書としては次のものがある。

〔19〕 B. Benjamin : General Insurance 1977（日本アクチュアリー会 会報別冊 第107号 に翻訳されている）

〔20〕 E. Straub : Non-Life Insurance Mathematics 1988

〔21〕 R. E. Beard, T. Pentikainen and E. Pesonen : Risk Theory 1968

〔22〕 H. Bühlmann : Mathematical Methods in Risk Theory 1970

〔23〕 J. Grandell : Aspects of Risk Theory 1990

E．アクチュアリーの技術および各国アクチュアリー会に関する歴史については次のものがある。

〔24〕 H. Braun : Geschichte der Lebensversicherung und der Lebensversicherungstechnik 1963
（水島一也 訳：生命保険史）

〔25〕 日本アクチュアリー会８５年史 1985

F．保険数理の関連で現在発行されている雑誌のうち主なものの発行者および雑誌名は次のとうりである。

（１） 日本アクチュアリー会：会報および会報別冊
（２）（アメリカ）The Society of Actuaries : Transactions
（３）（イングランド）The Institute of Actuaries : Journal
（４）（スコットランド）The Faculty of Actuaries : Transactions
（５）（ドイツ）Die deutschen Gesellschaft für Versicherungs-mathematiker : Blätter
（６）（フランス）L'Institut des Actuaires Français : Bulletin
（７）（スイス）Die Vereinigung schweizerischer Versicherungs-mathematiker : Mitteilungen
（８）（北欧４国）Scandinavian Actuarial Journal（1973年以前の雑誌名は Skandinavisk Actuarietidskrift）
（９） 国際アクチュアリー会議：各回会議の Transactions
（10） 国際アクチュアリー会
ASTIN-section : The ASTIN Bulletin
AFIR-section : 国際会議論文集

用語　索引

上巻で使用された用語については掲載のページをゴチック体（太字）で、また下巻のそれについてはページを明朝体（細字）で表わした。用語には対応する英語または英訳を付記したが、英米で用いられていない概念についてはドイツ語を付した。

【か】

【こ】

【さ】

【し】

【す】

【せ】

【そ】

【た】

【ち】

【つ】

【て】

【と】

【ふ】

【へ】

【む】

【め】

【ゆ】

【よ】

【り】

【る】

【れ】

【わ】

<著者略歴>　二見　隆（ふたみ たかし）

大正13年１月　大阪市に生まれる。
昭和20年９月　東京大学理学部数学科卒業。
昭和21年４月　日本生命保険株式会社（後に相互会社）に入社。保険計理人、常務取締役、監査役を経て、同54年７月退任。
昭和52年７月　財団法人 生命保険文化研究所理事長に就任。
昭和60年５月　社団法人 日本アクチュアリー会理事長に就任。平成元年５月退任。
平成26年９月　逝去。

生命保険数学（'92改訂版）　下巻

昭和63年９月３日　初版発行
平成４年１月23日　'92改訂版

著　者　二　見　隆

発行所　公益社団法人　日本アクチュアリー会

〒104-6002 東京都中央区晴海1-8-10
晴海アイランド　トリトンスクエア　オフィスタワーX 2階
電話 03-5548-6033

発行者　浅野　紀久男

印刷所　株式会社　サンワ